

KERNFORSCHUNGSZENTRUM

KARLSRUHE

Oktober 1977

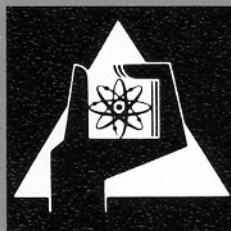
KFK 2426

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Schneller Brüter

**Direkte numerische Simulation turbulenter
Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder
bei Kanalströmungen**

G. Grötzbach

Note after publication: Engl. translation in □
DOE-tr-61 (USDOE Techn. Inform. Centre, Oak Ridge, Tennessee 1978)



**GESELLSCHAFT
FÜR
KERNFORSCHUNG M.B.H.**

KARLSRUHE

Als Manuskript vervielfältigt

Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

GESELLSCHAFT FÜR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

KFK 2426

Institut für Reaktorentwicklung
Projekt Schneller Brüter

Direkte numerische Simulation turbulenter
Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder
bei Kanalströmungen*

von

G. Grötzbach

Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe

*Als Dissertation genehmigt von der Fakultät
für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH)

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem instationäre, dreidimensionale, turbulente Strömungs- und Temperaturfelder in Kanalströmungen für Fluide konstanter Stoffwerte mit einem Differenzenverfahren simuliert werden können. Das Verfahren basiert auf einer Differenzenform der vollständigen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Enthalpie. Der nicht aufgelöste Impuls- und Wärmeaustausch innerhalb der Maschen wird durch Feinstrukturmodelle beschrieben. Es wird ein Impulsfeinstrukturmodell eingeführt, das erstmals auf kleine Reynolds-Zahlen, auf schlecht auflösende Maschennetze und auf Kanäle mit ortsabhängigen Wandrauigkeiten anwendbar ist. Das neu eingeführte Temperaturfeinstrukturmodell berücksichtigt zusätzlich den Einfluß der molekularen Prandtl-Zahl. Das theoretische Modell bestätigt bei Prandtl-Zahlen um eins die Erfahrungswerte für die turbulente Prandtl-Zahl der Feinstruktur, wie sie von anderen Autoren benutzt wird. Bei den sehr kleinen molekularen Prandtl-Zahlen von Flüssigmetallen zeigt das Modell, daß mit den heute realisierbaren Maschennetzen die totale Auflösung aller relevanten Temperaturschwankungen erreicht wird.

Das Verfahren ist in dem Rechenprogramm TURBIT-2 realisiert. Es erlaubt die Simulation von laminaren und turbulenten Strömungen mit Reynolds-Zahlen über 10^4 in Plattenkanälen und Ringspalten. Die numerischen Ergebnisse zeigen einen geringen Einfluß gegen Änderungen von Modellparametern. Die Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen ist bei glatten, rauhen und bei teilweise rauhen Kanälen mit Sekundärströmung selbst bei schlecht auflösenden Netzen gut. Die simulierten Temperaturfelder sind sehr unempfindlich gegen Änderungen von Modellparametern. Die numerisch ermittelten Ergebnisse stehen mit denen von Experimenten in guter Übereinstimmung. Zum Vergleich werden nur solche Experimente ausgewählt, für die die Randbedingungen sehr genau bekannt und die experimentellen Daten in sich konsistent sind. Die Qualität der numerischen Ergebnisse erlaubt es, Größen zu berechnen, die bisher noch nicht experimentell bestimmt werden konnten, die aber bei der Entwicklung statistischer Turbulenzmodelle von entscheidender Bedeutung sind.

ABSTRACT

Direct numerical simulation of turbulent velocity-, pressure- and temperature-fields in channel flows

For the simulation of non stationary, three-dimensional, turbulent flow- and temperature-fields in channel flows of fluids with constant properties a method is presented which is based on a finite difference scheme of the complete conservation equations for mass, momentum and enthalpie. The fluxes of momentum and heat within the grid cells are described by sub-grid scale models. The sub-grid scale model for momentum introduced here is for the first time applicable to small Reynolds-numbers, rather coarse grids, and channels with space dependent roughness distributions. The new developed sub-grid scale model for temperature takes in addition the influence of the molecular Prandtl-number into account. For Prandtl-numbers of about one the theoretical model confirms the empirically derived values for the turbulent sub-grid scale Prandtl-number which are currently used by other authors. For very small molecular Prandtl-numbers of liquid metals the model shows, that the total resolution of all relevant temperature-fluctuations can be achieved on the basis of presently realizable grids.

The method is realized in the computer code TURBIT-2. It is feasible for the simulation of laminar flows in plane channels and annuli as well, as for turbulent flows with Reynolds-numbers larger than about 10^4 . The numerical results for the flow field show only a small influence of the model parameters. For smooth, rough and partly roughened channels with secondary flows the agreement with experimental results is fairly good even when rather coarse grids are used. The temperature fields simulated are very insensitive to the parameters of the model. The numerical results are in good agreement with consistent, reliable experimental results. The accuracy of the numerical results allows to calculate quantities, which have not been measured up to now, but which are very important as far as the development of higher order statistical turbulence models is considered.

INHALT

Seite

1.	Einleitung	1
1.1	Schließungsproblem und statistisches Vorgehen	1
1.2	Direkte numerische Simulation	2
1.3	Ziel dieser Arbeit	4
2.	Grundgleichungen des Simulationsverfahrens	5
2.1	Geometrie	5
2.2	Grundgleichungen	6
2.3	Normierung der Grundgleichungen	7
2.4	Abgeleitete Gleichungen	9
2.4.1	Energiegleichung der Geschwindigkeitsschwankungen	10
2.4.2	Bilanz für Temperaturschwankungsquadrate	11
2.5	Über Maschenvolumina gemittelte Gleichungen	11
2.6	Bedeutung der Feinstrukturterme	14
3.	Schließung des Gleichungssystems mittels Feinstrukturmodellen	16
3.1	Gedankengang der Modellerstellung	16
3.2	Temperaturfeinstrukturmodell	19
3.2.1	Ansätze für das Temperaturfeinstrukturmodell	19
3.2.1.1	Gradienten-Ansatz	20
3.2.1.2	Isotropes Feinstrukturmodell	20
3.2.1.3	Inhomogenes Feinstrukturmodell	21
3.2.2	Berechnung der Konstanten im isotropen Modell	24
3.2.2.1	Bestimmungsgleichung für die isotrope Modellkonstante	24
3.2.2.2	Berechnung der Korrelationen räumlich gemittelter Feldgrößen bei Lokalisotropie	26
3.2.2.3	Berechnung der Feinstrukturkonstanten	31
3.2.2.4	Numerische Ergebnisse	33
3.2.3	Dämpfungsfunktion des inhomogenen Modells	35
3.2.3.1	Maschennetzabhängigkeit	36
3.2.3.2	Bestimmung der Modellkonstanten	37
3.3	Impulsfeinstrukturmodell	39
3.3.1	Ansätze für das Impulsfeinstrukturmodell	39
3.3.2	Berechnung der Konstanten im isotropen Modell	40
3.3.3	Numerische Ergebnisse	44
3.3.4	Der inhomogene Modellanteil	45

3.4	Feinstrukturenergiegleichung	47
3.4.1	Energiegleichungsmodell für isotrope Turbulenz	47
3.4.2	Erweiterungen für inhomogene Strömungen	50
3.4.2.1	Erweiterung des Produktionstermes	51
3.4.2.2	Erweiterung des Dissipationstermes	52
3.4.2.2.1	Wandkorrektur des isotropen Modells	52
3.4.2.2.2	Dissipation bei kleinen Reynolds-Zahlen	54
3.4.2.2.3	Dissipation in der laminaren Unterschicht	55
3.5	Zusammenfassung der Schließungsmodelle	56
4.	Differenzenverfahren	61
4.1	Lineare Differenzenapproximationen	61
4.2	Differenzenformeln	62
4.2.1	Temperaturgleichung	62
4.2.2	Impulsgleichungen	63
4.3	Randbedingungen	64
4.3.1	Temperaturrandbedingungen	64
4.3.1.1	Periodizität	64
4.3.1.2	Wandbedingungen	66
4.3.2	Geschwindigkeitsrandbedingungen	68
4.4	Stabilität	69
4.4.1	Zulässige Zeitschrittweite	69
4.4.2	Verbesserungen durch Galileitransformationen	70
5.	Rechenprogramm TURBIT-2	71
5.1	Vorläufer TURBIT-1 und EDDY	71
5.2	TURBIT-2	72
6.	Numerische Ergebnisse	75
6.1	Programm- und Modellprüfung	75
6.1.1	Tests mit laminaren Strömungen	75
6.1.2	Tests mit turbulenten Strömungen	76
6.1.2.1	Bereitstellen turbulenter Anfangsfelder	77
6.1.2.2	Beurteilung des Einlaufzustandes	78
6.1.2.3	Prüfung der Modelleinflüsse	79
6.1.2.3.1	Prüfung des Impulsmodells	80
6.1.2.3.2	Prüfung des Temperaturmodells	81

6.2	Auswertung numerischer Ergebnisse	83
6.2.1	Maschenmetz- und Fallspezifikation	83
6.2.2	Auswertung der Geschwindigkeitsfelder	84
6.2.2.1	Glatte Kanäle	84
6.2.2.1.1	Qualitative Beurteilung	84
6.2.2.1.2	Quantitative Beurteilung der Impulsmodellverbesserungen	85
6.2.2.1.3	Vergleich von Geschwindigkeits- profilen	86
6.2.2.2	Einseitig rauher Plattenkanal	87
6.2.2.3	Einseitig teilweise rauher Plattenkanal mit Sekundärströmung	88
6.2.2.3.1	Einfluß auf die turbulenten Geschwindigkeitsfelder	89
6.2.2.3.2	Einfluß auf die turbulenten Temperaturfelder	90
6.2.3	Auswertung der Temperaturfelder	90
6.2.3.1	Vergleich von Temperaturprofilen	91
6.2.3.2	Auswertung der Temperaturschwankungsfelder	92
6.2.3.2.1	Qualitative Beurteilung	92
6.2.3.2.2	Statistische Auswertung	93
6.2.3.3	Berechnung turbulenter Austauschgrößen	94
6.2.3.3.1	Radialer Austausch	95
6.2.3.3.2	Azimutaler Austausch	96
6.2.3.4	Schlußfolgerungen aus den Temperaturfeld- auswertungen	97
6.2.4	Auswertung der Druckfelder	98
6.2.4.1	Qualitative Beurteilung	98
6.2.4.2	Quantitativer Vergleich mit Experimenten	98
6.2.4.3	Auswertung für einen Ringspalt	99
6.2.5	Berechnung einiger Kreuzkorrelationen	100
6.2.5.1	Druck-Geschwindigkeits-Kreuzkorrelationen	100
6.2.5.1.1	Druck-Energie-Kreuzkorrelation	100
6.2.5.1.2	Pressure-Strain-Terme	100
6.2.5.2	Druck-Temperatur-Kreuzkorrelationen	101
6.2.5.2.1	Druck-Temperatur-Zweipunkt- korrelationen	101
6.2.5.2.2	Pressure-Scrambling-Terme	101
6.2.5.3	Energie-Temperatur-Kreuzkorrelation	102
7.	Schlußbemerkungen	103

Anhang 1	Temperaturgrundgleichung und -Differenzenformeln in Zylinderkoordinaten	106
Anhang 2	Beschreibung logarithmischer Temperaturprofile	108
Anhang 3	Ableitung der Bilanzgleichung für die Temperaturschwankungsquadrate innerhalb der Feinstruktur	110
Anhang 4	Beziehungen zwischen den Korrelationen R_{TT} und dem Energiespektrum $E_T(k)$ bei isotroper Turbulenz	113
Anhang 5	Einfluß realer Energiespektren auf Grob- und Feinstrukturenergie	121
Anhang 6	Feinstrukturanteil der Temperaturschwankungsenergie	128
Nomenklatur		130
Literatur		135
Tabellen		149
Abbildungen		161

1. EINLEITUNG

1.1 Schließungsproblem und statistisches Vorgehen

Die meisten in der Natur und der Technik vorkommenden Strömungen sind turbulente Strömungen, d.h. Strömungen, die stets instationär, dreidimensional, wirbelbehaftet und unregelmäßig sind [Rotta 1972]. Mathematisch beschreibbar sind diese Strömungen, ebenso wie die nicht turbulenten Strömungen, durch die Navier-Stokes'schen Gleichungen [Navier 1822, Stokes 1845]. In der Technik wählt man zumeist ein statistisches Vorgehen zur Beschreibung der Turbulenzfelder und verwendet die zeitlich gemittelten Navier-Stokes'schen Gleichungen, die von Reynolds [1894] abgeleitet wurden. Im Gegensatz zu den Navier-Stokes'schen Gleichungen stellen die Reynolds'schen Gleichungen kein geschlossenes Gleichungssystem dar, da durch die Zeitmittelung der stets instationäre turbulente Impulsaustausch herausgemittelt wird und zu zusätzlichen Unbekannten (Reynoldsspannungen) im Gleichungssystem führt, die eben gerade diesen turbulenten Impulsaustausch beinhalten und zusätzliche Modell-Annahmen erfordern.

In einfachen symmetrischen Kanalströmungen werden meist die Ansätze von Prandtl [1925], Nikuradse [1932, 1933] und van Driest [1956] für diese Unbekannten verwendet. Für nicht symmetrische Kanalströmungen, wie sie z.B. bei der Durchströmung von Reaktorbrandelementen [Smidt 1976] vorliegt, werden ähnliche, aber stärker verallgemeinerte Modelle verwendet, wie z.B. die Modelle von Buleev [1964], Meyder [1975] und Ramm [1975]. Ist das zu berechnende Strömungsproblem stark asymmetrisch, oder muß mit Rezirkulationsströmungen gerechnet werden, oder aber hat das Strömungsproblem keinen Grenzschichtcharakter (kein Wandeinfluß), dann werden aus den Navier-Stokes'schen-Gleichungen zusätzliche Bilanzgleichungen für typische Turbulenzgrößen abgeleitet, die es erlauben, die unbekanntes Reynoldsspannungen abzuschätzen. Bei diesen statistischen Turbulenzmodellen mit Transportgleichungen für charakteristische Turbulenzgrößen [z.B. Prandtl 1945, Rotta 1951, 1972, Rodi, Spalding 1970, Kolovandin u.a. 1972, 1973, Donaldson 1973, Launder, Spalding 1974, Launder, Reece, Rodi 1975] müssen die Schließungsannahmen auf der Ebene der zusätzlichen Erhaltungsgleichungen gemacht werden. Ihr Einfluß auf die Rechenergebnisse ist ungleich schwieriger abzuschätzen, da nur schwer die Größenordnung und physikalische Bedeutung der darin auftretenden zahlenmäßig gewachsenen Unbekannten zu beurteilen ist. Besonders erschwerend kommt hinzu, daß die in diesen

Modellen auftretenden Unbekannten oftmals nicht direkt experimentell bestimmt werden können oder abhängig von der Art des Anwendungsfalles sind.

1.2 Direkte numerische Simulation

Im Gegensatz zu den statistischen Turbulenzmodellen werden den direkten numerischen Simulationsverfahren nicht die zeitlich gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen zugrunde gelegt, sondern die zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen in der ursprünglichen, "primitiven" Art. Diese Gleichungen können für turbulente Strömungen gelöst werden, indem das Geschwindigkeitsfeld in Fourier- oder Chebyshev-Reihen entwickelt, oder mit einem Differenzenverfahren approximiert wird [Orszag, Israeli 1974]. Allerdings reicht die Rechengeschwindigkeit und Kernspeicherkapazität heutiger Großrechenanlagen nicht aus, um, mit welchem Verfahren auch immer, die kleinsten Wirbel turbulenter Strömungen aufzulösen, die sich von den größten in jeder Dimension z.B. um etwa 3 - 5 Größenordnungen unterscheiden [Corrsin 1961, Hirt 1968, Emmons 1970, Schumann 1973a, Leonard 1973]. D.h., daß das Auflösungsvermögen durch den Abbruch der unendlichen Reihen bzw. durch die endlichen Maschenweiten nicht bis zu den kleinsten Wirbeln reicht. Somit sind diese Verfahren nur auf den Bereich um die kritische Reynoldszahl anwendbar, wo die Wirbel noch relativ große Abmessungen haben.

Die gefilterten, d.h. in irgendeiner Art über Maschenvolumina gemittelten Gleichungen enthalten bei turbulenter Strömung formal ähnliche unbekannte Reynoldsspannungen wie die statistischen Turbulenzmodelle. Diese Terme haben aber wegen des Fehlens der Zeitmittelung eine andere physikalische Bedeutung. Sie stellen in kartesischen Koordinaten Oberflächenspannungen dar [Schumann 1973a] und beinhalten als solche nur denjenigen Impulsaustausch, der durch die vom Maschennetz nicht aufgelösten Wirbel bewirkt wird. Weiter folgt daraus, daß die Modellannahmen, die man für die unbekanntes Oberflächenspannungen einführen muß, mit zunehmender Verfeinerung der Maschennetze an Bedeutung verlieren. Die angenehmste Eigenschaft dieser Spannungen ist, daß sie entsprechend der weitgehenden Entkoppelung der Vorgänge bei kleinen Wirbeln von denen bei großen Wirbeln [Rotta 1972] universellen Gesetzmäßigkeiten gehorchen, die es erlauben, die Modellkonstanten unter Verwendung nur einer universellen empirischen Konstanten analytisch zu bestimmen. Diese Konstante ist aber nur universell, wenn die Reynoldszahl ausreichend hoch ist [Lörcher 1976].

Bei den Spektralverfahren existieren bis heute lediglich Simulationen von Scherströmungen niedriger Reynolds-Zahlen [Orszag, Pao 1974]. Es ist bis heute aber noch nicht gelungen, dreidimensionale Kanalströmungen zu simulieren, weder im Bereich um die kritische Reynolds-Zahl noch im turbulenten Bereich. Um so mehr gibt es noch keine erfolgreichen dreidimensionalen Simulationen von turbulenten Kanalströmungen mit Spektralverfahren und Feinstrukturmodellen.

Die direkte numerische Simulation turbulenter Strömungen über Differenzenverfahren und Feinstrukturmodelle wird heute dagegen vielfach zur Untersuchung grundlegender Turbulenzphänomene z.B. bei homogener Turbulenz oder aber in der Meteorologie zur Unterstützung der Entwicklung statistischer Turbulenzmodelle benutzt. Modelle mit linearer Volumenmittelwertbildung über die Maschen und mit einfachen algebraischen Ansätzen für die unbekanntenen Oberflächenspannungen wurden [z.B. von Smagorinsky 1963, Lilly 1967, Fox, Deardorff 1972, Deardorff 1972a, Drake 1974 und Spaggs, Street 1975] abgeleitet bzw. benutzt. Modelle mit zusätzlichen Transportgleichungen für die unbekanntenen Flächenmittelwerte wurden von Deardorff [1973a, 1973b, 1974a, 1974b], von Deardorff und Willis [1974] und von Schemm [1974] abgeleitet und benutzt. Nichtlineare Filterfunktionen für die Berechnung charakteristischer Maschenmittelwerte wurden von Leonard [1973, 1974] vorgeschlagen und von Shaanan u.a. [1975] und Reynolds [1976] benutzt bzw. ausgewertet.

Auf Kanalströmungen wurden bisher nur Modelle mit linearer Filterfunktion angewandt. Dabei wurden von Deardorff [1970], Deardorff, Peskin [1970], Kau, Peskin [1972], Peskin [1974] ein algebraisches Modell benutzt und von Schumann [1973a, 1973b, 1975a, 1975b] ein Modell mit einer zusätzlichen Transportgleichung, bzw. ohne Feinstrukturmodell bei kleinen Reynoldszahlen von Grötzbach, Schumann [1974] und Grötzbach, Lörcher, Schumann [1975].

Turbulente Temperaturfelder wurden bisher nur für die fluide Luft und Wasser für die atmosphärische Grenzschicht bzw. Seen simuliert. Den Rechnungen von Deardorff [1971, 1972a, 1972b], Drake u.a. [1974] und Spaggs, Street [1975] lagen algebraische Modellansätze für die unbekanntenen turbulenten Wärmeströme zugrunde, wobei die Modellkonstanten nicht analytisch, sondern durch numerische Experimente bestimmt wurden. Den Rechnungen von Deardorff [1973a, 1973b, 1974a, 1974b] und Schemm [1974] lagen Modelle mit zusätzlichen Transportgleichungen zugrunde. Ohne Feinstrukturmodelle wurden die Rechnungen von Grötzbach u.a. [1974, 1975] für niedrige Reynoldszahlen für einen Plattenkanal durchgeführt.

1.3 Ziel dieser Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die wesentlichen, in der obigen Übersicht augenscheinlichen Einschränkungen auf sehr große Reynolds-Zahlen, auf Prandtl-Zahlen um eins und auf fein auflösende Maschennetze zu beseitigen, d.h., es soll ausgehend von dem direkten numerischen Simulationsverfahren mittels Differenzenverfahren und 1-Transportgleichungs-Feinstrukturmodell von Schumann [1973a, 1975a] ein Verfahren zur Verfügung gestellt werden, mit dem

1. turbulente Temperaturfelder in Kanalströmungen simuliert werden können,
2. turbulente Temperaturfelder für Fluide mit unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen simuliert werden können, wobei hier ein besonderes Interesse auf Flüssigmetallen mit sehr kleinen Prandtl-Zahlen liegt,
3. die Konstanten des Temperaturfeinstrukturmodells (analog zu denen im Impuls-Modell) unter Verwendung universeller Gesetzmäßigkeiten und nur einer zusätzlichen universellen, empirisch zu ermittelnden Konstanten theoretisch zu bestimmen sind,
4. Kanalströmungen mäßiger Reynolds-Zahlen berechenbar sind,
5. bei Verwendung nur grob auflösender Maschennetze dennoch qualitativ gute Ergebnisse zu erzielen sind, und mit dem
6. durch Einführen eines verbesserten inhomogenen Impulsfeinstrukturmodells und ortsabhängigen Wandbedingungen, wie Wandrauigkeit, Wandtemperatur und Wandwärmestrom Asymmetrieeffekte, wie Einfluß von Sekundärströmung und anisotropen turbulenten Austauschgrößen untersuchbar sind.

Die Zielsetzungen 1 bis 3 beziehen sich auf die erstmalige Herleitung eines Temperaturfeinstrukturmodells für variable molekulare Prandtl-Zahlen und stark inhomogene Strömungen. Die Zielsetzungen 4 bis 6 beziehen sich auf wesentliche Verbesserungen und Erweiterungen des Impulsfeinstrukturmodells von Schumann [1973a], die es erstmals ermöglichen, Kanalströmungen mit Reynolds-Zahlen zu simulieren, bei denen die universellen Gesetzmäßigkeiten für die Vorgänge bei kleinen Wirbeln nicht mehr streng gelten [Lörcher 1976].

2. GRUNDGLEICHUNGEN DES SIMULATIONSVERFAHRENS

Diese Arbeit baut soweit als möglich auf dem von Schumann [1973a] entwickelten Simulationsverfahren zur Beschreibung des turbulenten Impulsaustausches in Kanalströmungen auf. D.h. es werden die Grundgleichungen für den Impulstransport und die entsprechenden Modelle möglichst unverändert übernommen und hier nicht erneut im Detail abgeleitet. Den Schwerpunkt dieser Arbeit bilden die Neuentwicklungen zur Simulation turbulenter Temperaturfelder. Auf den Impulsteil wird nur ausführlicher eingegangen, wo dies zum Verständnis der eingeführten Verbesserungen, Korrekturen und Erweiterungen notwendig ist.

In diesem Kapitel werden die ausgewählten Kanalgeometrien, die Grundgleichungen mit den zugehörigen Vereinbarungen und die Normierung beschrieben. Anschließend werden die über Maschenvolumina integrierten Grundgleichungen des Simulationsverfahrens abgeleitet und die Bedeutung der durch das Schließungsproblem auftretenden Ausdrücke beschrieben.

2.1 Geometrie

Für die Geometrie wird in konsistenter Weise mit der früheren Arbeit ein in zwei Richtungen unendlich ausgedehnter Plattenkanal und ein unendlich ausgedehnter Ringspalt gewählt (Abb. 1). Die Plattenkanalströmung kann problemlos in den kartesischen Koordinaten

$$\underline{\hat{x}} = \{ \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 \} = \{ \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \}$$

beschrieben werden, die Ringspaltströmung in den zylindrischen Koordinaten

$$\underline{\hat{x}} = \{ \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 \} = \{ \hat{z}, \hat{\varphi}, \hat{r} \}.$$

Die Größe \hat{D} stellt in beiden Fällen den Wandabstand dar, so z.B. ist im Ringspalt

$$\hat{D} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1. \quad (2-1)$$

Die Hauptströmungsrichtung ist die \hat{x}_1 -Richtung; da für diese Richtung ein aufgeprägter Druckgradient angenommen wird:

$$\hat{P}_x = - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \langle \hat{p} \rangle \quad (2-2)$$

Das Zeichen $\hat{}$ kennzeichnet dimensionsbehaftete Größen, die Zeichen $\langle \dots \rangle$ Mittelwerte über der Zeit oder Ensemble.

2.2 Grundgleichungen

Die Ableitung der Grundgleichungen des Simulationsverfahrens wird im folgenden wegen der kürzeren Schreibweise nur für kartesische Koordinaten erfolgen. Die Grundgleichungen in zylindrischen Koordinaten können bezüglich des Impulsteiles bei Schumann [1973a] entnommen werden und bezüglich des Temperaturteiles dem Anhang 1.

Die wesentlichen Annahmen, die den Grundgleichungen zugrunde liegen, sind:

1. Das Fluid soll als Kontinuum beschreibbar sein.
2. Es soll sich um Newton'sche Fluide handeln.
3. Die Stoffwerte sollen konstant sein.

Weiter ergibt sich aus den Annahmen des Schließungsmodells und dem Rechenprogramm die Forderung nach weitgehender Stationarität im statistischen Sinne.

Die Grundgleichungen für turbulente Geschwindigkeitsfelder können nach Navier [1822] und Stokes [1845] aus den Erhaltungssätzen für Masse (Kontinuität) und Impuls abgeleitet [Wieghardt 1969] und mit den Annahmen 2 und 3 stark vereinfacht werden [Rotta 1972]. Die Gleichung für das Temperaturfeld kann man zusammen mit denselben Annahmen entweder durch ein thermodynamisches Vorgehen aus der Erhaltungsgleichung für die Gesamtenergie (Enthalpie) und der Entropiegleichung herleiten [Rotta 1972], oder aus einer Wärmebilanz an einem Volumenelement. Man erhält damit die folgenden 5 Gleichungen (es wird bei doppelt vorkommenden, rechts unten stehenden Indizes, die nicht in eckigen Klammern stehen, die Einstein'sche Summationskonvention angewandt):

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} = 0, \quad (2-3)$$

die drei Komponenten der Navier-Stokes'schen Gleichungen ($i = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\hat{u}_i \hat{u}_j) = - \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left(\hat{\nu} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \right) + \hat{f}_i \frac{1}{\hat{\rho}} \quad (2-4)$$

und die Temperaturgleichung mit der homogen verteilten Volumenwärmequelle \hat{Q} :

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\hat{T} \hat{u}_j) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left(\hat{a} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}_j} \right) + \hat{Q} \frac{1}{\hat{\rho} \hat{c}_p} \quad (2-5)$$

Diese fünf Grundgleichungen stellen ein geschlossenes Gleichungssystem für die fünf Unbekannten \hat{u}_i , \hat{p} und \hat{T} dar, dessen Gültigkeit sowohl für laminaire, wie auch für turbulente Strömungen unterstellt werden kann.

2.3 Normierung der Grundgleichungen

Bei der Normierung des Gleichungssystems werden alle Längen mit dem Wandabstand \hat{D} normiert. Die Geschwindigkeiten werden mit der über beide Wände gemittelten Schubspannungsgeschwindigkeit [Schlichting 1965_7]

$$\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \hat{u}_{\tau 1} \rangle + \langle \hat{u}_{\tau 2} \rangle) = \sqrt{\frac{\langle \hat{\tau}_{w0} \rangle}{\hat{\rho}}} \quad (2-6)$$

normiert, die sich aus einer Kräftebilanz über den ganzen Kanal wegen

$$\langle \hat{\tau}_{w0} \rangle = \frac{1}{2} \hat{P}_x \hat{D} \quad (2-7)$$

ableiten läßt als

$$\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle = \sqrt{\frac{\hat{P}_x \hat{D}}{2 \hat{\rho}}} \quad (2-8)$$

Als charakteristische Zeit wird

$$\hat{t}_0 = \frac{\hat{D}}{\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle} \quad (2-9)$$

benutzt. Durch entsprechendes Erweitern kommt man zu den folgenden dimensionslosen Gleichungen:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_i \mu_j) = -\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} \right) \right) + \delta_{ij} P_x \quad (2-11)$$

Die Normierung ergibt dabei folgende Zuordnungen:

$$x_i = \hat{x}_i / \hat{D}$$

$$t = \hat{t} / \hat{t}_0$$

$$\mu_i = \hat{\mu}_i / \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \quad (\equiv \mu^* \text{ bei } \langle \hat{u}_{\tau 1} \rangle = \langle \hat{u}_{\tau 2} \rangle = \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle) \quad (2-12)$$

$$\pi = \hat{\pi} / (\hat{\rho} \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle^2) = \hat{\pi} \cdot 2 / (\hat{P}_x \hat{D})$$

$$P_x = \hat{P}_x \hat{D} / (\hat{\rho} \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle^2) = \hat{P}_x \hat{D} 2 / (\hat{P}_x \hat{D}) = 2$$

$$\nu = \hat{\nu} / (\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \hat{D}) \equiv 1 / Re_\tau$$

Weiter ist besonders für Auswertezwecke noch von Interesse, daß Re_τ entsprechend dieser gewählten Normierung mit der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\langle \hat{u}_1 \rangle \hat{D}}{\hat{\nu}} \quad (2-13)$$

wie folgt verknüpft ist ($\langle \dots \rangle$ bedeutet Mittelwert über das Kanalvolumen):

$$Re_\tau = Re \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle / \langle \hat{u}_1 \rangle = Re / \langle \hat{u}_1 \rangle \quad (2-14)$$

Aus dem bekannten Rohrreibungsgesetz

$$\hat{P}_x = c_f \frac{\hat{\rho}}{2} \frac{\langle \hat{u}_1 \rangle^2}{\hat{D}_h} \quad (2-15)$$

folgt andererseits, daß wegen $\hat{D}_h = 2 \cdot \hat{D}$ gilt:

$$Re_\tau = Re \sqrt{c_f / 8} \quad (2-16)$$

d.h. Re_τ ist über (2-16) mit dem Geschwindigkeitsfeld selbst und den Wandbedingungen (z.B. bei Rauigkeiten) verknüpft.

Die Temperaturgleichung wird normiert auf:

$$T = (\hat{T} - \langle \hat{T}_{w1} \rangle) / \langle \hat{T}_c^* \rangle \quad (2-17)$$

$\langle \hat{T}_{w1} \rangle$ ist die Wandtemperatur an der Wand 1 bei $x_3 = 0$ bzw. $r = R_1$ (Abb. 1) zum Zeitpunkt $t = 0$ und

$$\langle \hat{T}_c^* \rangle = \frac{\langle \hat{q}_{w0} \rangle}{\hat{\rho} \hat{c}_p \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle} \quad (2-18)$$

Für den Fall, daß der Wandwärmestrom $\langle \hat{q}_{w0} \rangle = \langle \hat{q}_{w1} \rangle$ wird und $\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle = \langle \hat{u}_{\tau 1} \rangle$ wird, geht $\langle \hat{T}_c^* \rangle$ in die von Obukhov [1946], Landau, Lifshitz [1944] und Squire [1951] eingeführte "friction temperature" \hat{T}^* über (die von Kader und Yaglom [1972] treffender als "heat flux temperature" bezeichnet wird) und es gilt:

$$T = -T^* \quad (2-19)$$

Der Wandwärmestrom wird bei Vorhandensein von inneren Wärmequellen aus

$$\langle \hat{q}_{w0} \rangle = \hat{Q} \hat{D} / 2 \quad (2-20)$$

berechnet, andernfalls als Mittelwert der beiden Wandwärmeströme:

$$\langle \hat{q}_{w0} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \hat{q}_{w1} \rangle + \langle \hat{q}_{w2} \rangle) \quad (2-21)$$

Vor der Durchführung der Normierung wird zunächst das Temperaturfeld auf $\hat{T}' = \hat{T} - \hat{T}_{wl}$ transformiert. Dabei geht die Gleichung für \hat{T} ohne Änderungen (mit Ausnahme der Randbedingungen) über in die für \hat{T}' . Als nächstes wird dann wie oben durch Erweitern mit \hat{D} , \hat{t}_0 , $\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle$ und $\langle \hat{T}_0^* \rangle$ und anschließendes Durchdividieren der verbliebenen dimensionsbehafteten Größen die Gleichung auf ihre dimensionslose Form gebracht:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j'} (T u_j') = \frac{\partial}{\partial x_j'} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_j'} \right) + \dot{Q} \quad (2-22)$$

An zusätzlichen Zuordnungen ergeben sich dabei:

$$\begin{aligned} T &= (\hat{T} - \langle \hat{T}_{w1} \rangle) / \langle \hat{T}_0^* \rangle \quad (\equiv -T^+ \text{ bei } \langle \hat{T}_0^* \rangle = \langle \hat{T}_1^* \rangle) \\ \dot{Q} &= \hat{Q} \hat{D} / (\hat{S} \hat{c}_p \langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \langle \hat{T}_0^* \rangle) \equiv 2 \\ a &= \hat{\nu} / (\langle \hat{u}_{\tau 0} \rangle \hat{D}) \cdot \hat{\alpha} / \hat{\nu} = 1 / (Re_{\tau} \cdot Pr) = 1 / Pe_{\tau} \end{aligned} \quad (2-23)$$

Auch hier ist a , das die Bedeutung einer Peclet-Zahl hat, keine unabhängige Variable, sondern über Re_{τ} mit dem Geschwindigkeitsfeld und den Wandbedingungen verknüpft und über die molekulare Prandtl-Zahl Pr mit den thermodynamischen Eigenschaften des Fluides. Die für Auswertungen interessante Stanton-Zahl St oder Nusselt-Zahl Nu

$$St = C_H = Nu / (Re Pr) = \frac{\langle \hat{q}_{w1} \rangle}{\hat{S} \hat{c}_p \langle \hat{u}_{\tau 1} \rangle \langle \hat{T}_{w1} - \langle T \rangle \rangle} \quad (2-24)$$

wird mit dieser Normierung berechenbar aus:

$$St = 1 / (\langle T^+ \rangle \langle u^+ \rangle) \quad (2-25)$$

2.4 Abgeleitete Gleichungen

Für die Herleitung der Feinstrukturmodelle werden einige zusätzliche, aus den Grundgleichungen ableitbare Bilanzen für charakteristische Turbulenzeigenschaften benötigt. Es sind dies eine Bilanzgleichung für die Energie der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen E und eine für die "Energie" der turbulenten Temperaturschwankungen E_T (Temperaturschwankungsquadratbilanz). Diese Gleichungen werden im folgenden in normierter Form (wie alle folgenden Gleichungen auch) angegeben.

2.4.1 Energiegleichung der Geschwindigkeitsschwankungen

Die Turbulenzenergie, unter der man die kinetische Energie der Geschwindigkeitsschwankungen zu verstehen hat, ist definiert als

$$E = \frac{1}{2} (\mu_i - \langle \mu_i \rangle)^2 = \frac{1}{2} \mu_i'^2 \quad (2-26)$$

mit

$$\mu_i' = \mu_i - \langle \mu_i \rangle \quad (2-27)$$

Eine Bilanzgleichung für diese Größe läßt sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen herleiten (siehe z.B. Hinze [1959]). Die allgemeinere Form der Energiegleichung ist die Bilanzgleichung (oder auch Transportgleichung) für die Reynoldsspannungen $\langle u_i' u_j' \rangle$ [Rodi 1970, Rotta 1972]:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \langle \mu_i' \mu_j' \rangle}_{\text{zeitl. Änderung}} = \underbrace{-\langle \mu_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \mu_i' \mu_j' \rangle}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \langle \mu_i' u_j' \mu_k' \rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \mu_j' \pi' \rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \mu_i' \pi' \rangle}_{\text{turbulente Diffusion}}$$

$$\underbrace{-\langle \mu_i' \mu_k' \rangle \frac{\partial \langle \mu_j' \rangle}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} \quad \underbrace{-\langle \mu_j' \mu_k' \rangle \frac{\partial \langle \mu_i' \rangle}{\partial x_k} + \left\langle \pi' \left(\frac{\partial \mu_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu_j'}{\partial x_i} \right) \right\rangle}_{\text{Pressure Strain}}$$

$$\underbrace{+ \nu \frac{\partial^2 \langle \mu_i' \mu_j' \rangle}{\partial x_k \partial x_k}}_{\text{viskose Diffusion}} \quad \underbrace{- 2 \nu \left\langle \frac{\partial \mu_i'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \mu_j'}{\partial x_k} \right\rangle}_{\text{viskose Dissipation}} \quad (2-28)$$

Die gesuchte Energiegleichung der Turbulenz erhält man unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung nach Durchmultiplizieren mit 1/2 und Aufsummieren für $i = j$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \mu_i'^2 \rangle}{\partial t} = \underbrace{-\langle \mu_k \rangle \frac{\partial E}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \langle E \mu_k' \rangle - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \mu_k' \pi' \rangle}_{\text{turbulente Diffusion}}$$

$$\underbrace{-\langle \mu_i' \mu_k' \rangle \frac{\partial \langle \mu_i' \rangle}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} \quad \underbrace{+ \nu \frac{\partial^2 E}{\partial x_k \partial x_k}}_{\text{viskose Diffusion}} \quad \underbrace{- \nu \left\langle \frac{\partial \mu_i'}{\partial x_k} \frac{\partial \mu_i'}{\partial x_k} \right\rangle}_{\text{viskose Dissipation}} \quad (2-29)$$

2.4.2 Bilanz für Temperaturschwankungsquadrate

Die Erhaltungsgleichung für die Temperaturschwankungsquadrate oder "Temperaturschwankungsenergie"

$$E_T = \langle T'^2 \rangle = (T - \langle T \rangle)^2 \quad (2-30)$$

bzw.

$$E_{T/2} = E_T / 2 = \langle T'^2 \rangle / 2$$

wurde erstmals von Corrsin [1952] hergeleitet. Ausgehend von der Temperaturgleichung erhält man durch formale Operationen folgende Bilanz [Corrsin 1952, Harlow, Hirt 1969, Monin, Yaglom 1971, Kolovandin, Vatutin 1972, Tennekes, Lumley 1973, Donaldson 1973, Sviridov et al. 1975]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{T/2}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle T'^2 \rangle}{\partial t} = & \underbrace{- \langle u_k \rangle \frac{\partial E_{T/2}}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\langle u'_k T' \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_k}}_{\text{Produktion}} \\ & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \langle E_{T/2} u'_k \rangle}_{\text{turbulente Diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(a \frac{\partial E_{T/2}}{\partial x_k} \right)}_{\text{viskose Diffusion}} \\ & - a \underbrace{\left\langle \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right\rangle}_{\text{Dissipation}} \end{aligned} \quad (2-31)$$

Der hier mit "Dissipation" bezeichnete Ausdruck

$$E_{T/2} = a \left\langle \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right\rangle \quad (2-32)$$

hat nichts mit der Energiedissipation in Gleichung (2-29) gemeinsam. Er wird lediglich wegen seiner Eigenschaft als stets positiver Senkenterm in Analogie zur Energiegleichung als Dissipationsterm bezeichnet.

2.5 Über Maschenvolumina gemittelte Gleichungen

Zur Anwendung eines Differenzenverfahrens zur numerischen Lösung der Grundgleichungen können diese sowohl in Taylor-Reihen entwickelt werden, die dann nach wenigen Gliedern abgebrochen werden, als auch direkt formal über Maschenvolumina integriert werden. Hier wird in Fortführung der Schumann'schen Arbeit [Schumann 1973a] die formale Integration gewählt. D.h. es wird auf alle Grundgleichungen folgender Operator angewandt:

$$\bar{Y} \equiv \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} Y(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_3 dx'_2 dx'_1 \quad (2-33)$$

Die Größen Δx_i kennzeichnen hier die Maschenweiten in den Richtungen x_i (Abb. 2) und $\{x_1, x_2, x_3\}$ die Koordinaten des Maschenmittelpunktes. Wendet man diesen Operator auf die partiellen Ableitungen der Grundgleichungen an und berücksichtigt dabei, daß jeweils eine Integration formal ausgeführt werden kann, z.B.

$$\begin{aligned} \bar{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)} &= \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{\Delta x_1} \int_{\Delta x_2} \int_{\Delta x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x'_1} dx'_3 dx'_2 dx'_1 \quad (2-34) \\ &= \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{\Delta x_2} \int_{\Delta x_3} \left(u_1 \left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x'_2, x'_3 \right) - u_1 \left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x'_2, x'_3 \right) \right) dx'_3 dx'_2 \\ &= \frac{1}{\Delta x_1} \left(\bar{u}_1 \left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3 \right) - \bar{u}_1 \left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3 \right) \right) = \delta_{x_1} \bar{u}_1 \end{aligned}$$

dann kommt man zu dem Ergebnis, daß die Volumenmittelung fast bei allen Termen der Grundgleichungen zu Flächenmittelwerten \bar{u}_i führt. (Alle Flächenmittelwerte \bar{u}_i werden durch den Index der Richtung der Flächennormalen gekennzeichnet.) Dies ermöglicht es, in den meisten Fällen ohne zusätzliche Annahmen ein versetztes Maschennetz (staggered grid) anzuwenden (Abb. 3), bei dem die Geschwindigkeiten \bar{u}_i den Orten $x_i + \frac{\Delta x_i}{2}$ zugeordnet werden. Außerdem wird man durch die eindeutige, wenn auch aufwendige Notation in die Möglichkeit versetzt, auch stark ungleichseitige (anisotrope) Maschennetze zu benutzen, wie sie besonders bei Ringspalten mit kleinen Radienverhältnissen R_1/R_2 auftreten.

Wendet man den Operator \bar{Y} auf die Grundgleichungen (2-10, 11, 22) an und berücksichtigt (2-34), dann erhält man:

$$\bar{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)} = \delta_i \bar{u}_i = 0 \quad (2-35)$$

$$\bar{\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} = -\delta_j^i \bar{(u_i u_j)} - \delta_i^i \bar{p} + \delta_j^i \bar{\left(\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)} + \delta_i^i \bar{P}_x \quad (2-36)$$

$$\bar{\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)} = -\delta_j^i \bar{(T u_j)} + \delta_j^i \bar{\left(a \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)} + \bar{Q} \quad (2-37)$$

Die Kontinuitätsgleichung ist exakt und bedarf bei Anwendung eines "staggered grid" keiner weiteren Näherungen. Bei der Impuls- und Temperaturgleichung können dagegen durch Anwendung der Volumenmittelung nicht alle Differentiale in Differenzenoperatoren überführt werden. Für die verbleibenden Differentiale müssen bei der Anwendung auf das Differenzenverfahren Approximationen eingeführt werden (siehe Kap. 4.1). Dies ist aber ohne große Bedeutung, da im wesentlichen nur die diffusiven Terme davon betroffen sind, die bei hohen Reynolds-Zahlen ohnehin von untergeordneter Bedeutung sind.

Dagegen ergeben sich durch die Mittelung der konvektiven Terme gravierende Konsequenzen, denn die 12 Größen $\overline{j_{i,j}^{u_i u_j}}$ und $\overline{j_{j,T}^{u_j T}}$ können nicht aus den vorhandenen Geschwindigkeiten $\overline{u_i}$ und Temperaturen \overline{T} berechnet werden. Das durch die Mittelung entstandene Gleichungssystem ist also nicht mehr geschlossen.

Spaltet man $y = u, T$ jeweils in einen Flächenmittelwert $\overline{j_y}$ und die Schwankung um diesen Flächenmittelwert y' auf und berücksichtigt, daß wegen

$$y = \overline{j_y} + y' \quad (2-38)$$

bei dieser linearen Volumenmittelung, im Gegensatz zu den nichtlinearen Mittelungen von Leonard [1973, 1974], stets gilt:

$$\overline{j(y)} = \overline{j(\overline{j_y} + y')} = \overline{j_y} \quad (2-39)$$

dann können die unbekanntenen Terme wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \overline{j_{u_i u_j}} &= \overline{j(\overline{j_{u_i}} + u_i')(\overline{j_{u_j}} + u_j')} \equiv \overline{j_{u_i}} \overline{j_{u_j}} + \overline{j_{u_i' u_j'}} \\ \overline{j_{u_j T}} &= \overline{j(\overline{j_{u_j}} + u_j')(\overline{j_T} + T')} \equiv \overline{j_{u_j}} \overline{j_T} + \overline{j_{u_j' T'}} \end{aligned} \quad (2-40)$$

Diese formale Umformung erlaubt es, die unbekanntenen Terme in jeweils einen berechenbaren Teil und einen durch die Schwankungen innerhalb der Mittelungsflächen bestimmten, nicht berechenbaren Anteil, den sogenannten Feinstrukturanteil, aufzuspalten, für den Modellannahmen gemacht werden müssen. Die Einführung in die über Volumina gemittelten Gleichungen führt zu dem bis jetzt immer noch exakten, jedoch nicht geschlossenen Gleichungssystem:

$$\delta_i \overline{u_i} = 0 \tag{2-41}$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} &= -\delta_j \overline{(u_i u_j)} - \delta_i \overline{p} + \delta_j \overline{\left(\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - u_i u_j \right)} + \delta_{ij} \overline{P_x} \\ \overline{\frac{\partial T}{\partial t}} &= -\delta_j \overline{(u_j T)} + \delta_j \overline{\left(a \frac{\partial T}{\partial x_j} - u_j T \right)} + \overline{Q} \end{aligned}$$

2.6 Bedeutung der Feinstrukturterme

In den früheren Arbeiten von Lilly [1967], Deardorff [1970 ff] und Leonard [1973, 1974] wurden die Feinstrukturterme $\overline{j_{u_i u_j}^j}$ und $\overline{j_{u_j T}^j}$ stets als Volumenmittelwerte mit linearer oder nichtlinearer Wichtungsfunktion abgeleitet und interpretiert, da nicht berücksichtigt wurde, daß nach (2-34) partielle Ableitungen formal integriert werden können. Das hat zur Folge, daß bei Anwendung von stark anisotropen Maschennetzen zusätzliche Annahmen erforderlich sind, wie die Anisotropieeinflüsse berücksichtigt bzw. korrigiert werden sollen. Hier, bei dem Vorgehen nach Schumann [1973a, 1975a], ergeben sich die Feinstrukturterme aber als Mittelwerte über Maschenoberflächen. D.h., daß der Energie- bzw. Impulsfluß in den verschiedenen Richtungen eines anisotropen Maschennetzes durch die Flächenmittelung automatisch die Anisotropie beinhaltet. Das setzt allerdings auch voraus, daß die Modelle, die für die Feinstrukturterme eingeführt werden, die Maschennetzabhängigkeit korrekt wiedergeben müssen (siehe Kap. 3.2.1.2 und 3.3.1, Faktoren $\overline{j_C^{ij}}$ und $\overline{j_{C_T}^j}$).

Durch die Umformung (2-40) können die Feinstrukturterme $\overline{j_{u_i u_j}^j}$ und $\overline{j_{u_j T}^j}$ wie folgt interpretiert werden: Am Impuls- und Wärmeaustausch nehmen alle Turbulenzelemente (Wirbel) teil, von den größten Abmessungen bis hin zu den kleinsten. Wobei sich die größten Wirbel im Durchmesser etwa um den Faktor 10^3 (bei hohen Reynolds-Zahlen auch mehr, siehe Tab. 1) von den kleinsten unterscheiden [Corrsin 1961, Hirt 1968, Emmons 1970, Schumann 1973a]. Das bedeutet, daß bei einer numerischen Simulation dann alle Wirbel auflösbar wären, wenn man $(10^3)^3$ Maschen auf heutigen Rechnern realisieren könnte. Realisiert werden können derzeit aber nur Netze mit einigen 10^4 Maschen, wobei dann die Rechenzeiten, je nach Ziel der Rechnung, schon in kaum vertretbare Dimensionen anwachsen. So benötigte Schumann [1975a] zum Erreichen

stationärer, ausgebildeter Turbulenz in Kanalströmungen bei 32 768 Maschen ca. 25 Stunden auf einer IBM 370/165 und Deardorff [1974a] zur Nachrechnung des Wetters eines Tages auf einem 10-Quadratkilometerstück in Australien mit 64 000 Maschen und mit einem Modell mit 15 zusätzlichen Transportgleichungen zu den Gleichungen für die Geschwindigkeiten, Temperatur und Luftfeuchtigkeit ca. 350 Stunden auf einer Control Data CDC 7600 (die etwa 2 bis 3mal schneller ist als die IBM 370/168).

Daß heute nur 10^4 bis 10^5 Maschen realisierbar sind bedeutet, daß der Impulsaustausch der kleinen, nicht aufgelösten Wirbel in den Oberflächenspannungen $\overline{j_{u_i} u_j}$ enthalten ist. Für diese 9 Unbekannten müssen demnach Modelle eingeführt werden. Das Besondere an diesen Unbekannten ist, daß sie wegen der Definition als Oberflächenspannungen mit zunehmender Maschennetzverfeinerung an Bedeutung verlieren. Die einzuführenden Modelle verlieren entsprechend mit zunehmender Verfeinerung ihren Einfluß.

Für die Beschreibung der turbulenten Temperaturschwankungen gilt im Prinzip dasselbe. Die drei Unbekannten $\overline{j_{u_j} T}$ beschreiben den Wärmeaustausch, der durch die kleinen, nicht aufgelösten Wirbel bewirkt wird. Diese Art Interpretation gilt allerdings nur bei molekularen Prandtl-Zahlen $Pr = \hat{\nu}/\hat{\alpha} \geq 1$, denn bei Fluiden, bei denen $Pr \ll 1$ ist, d.h. bei denen die Wärmeleitfähigkeit außergewöhnlich hoch ist, führt diese hohe Leitfähigkeit dazu, daß nicht jeder einzelne Wirbel seine eigene Temperaturidentität besitzt, sondern daß mehrere benachbarte Wirbel die gleiche Identität haben. D.h. die räumliche Ausdehnung von Temperaturschwankungen ist größer. Damit verschiebt sich die Anforderung für die Auflösung aller Temperaturschwankungen, bzw. die Grenze für die Notwendigkeit eines Modells für $\overline{j_{u_j} T}$ gegenüber der für Geschwindigkeitsschwankungen in Abhängigkeit von der molekularen Prandtl-Zahl.

Eine Abschätzung dieser Grenze kann z.B. über die Kolmogorov-Länge $\hat{\eta}$ [Kolmogorov 1941, Rotta 1972] erfolgen, die ein Maß für diejenige Wirbelgröße ist, bei der die Trägheitskräfte und die Zähigkeitskräfte in gleichem Maße zur Dissipation führen:

$$\hat{\eta} = \left(\hat{\nu}^3 / \langle \hat{\epsilon} \rangle \right)^{1/4} \quad (2-42)$$

Das Analogon dazu ist bei $Pr < 1$ für die "Temperaturdissipation" nach Corrsin [1951a] und Batchelor, Howell, Townsend [1959] die Länge $\hat{\eta}_T$:

$$\hat{\eta}_T = \left(\hat{a}^3 / \langle \hat{\epsilon} \rangle \right)^{1/4} \quad (2-43)$$

Aus der Auswertung des sich daraus ergebenden Verhältnisses

$$\hat{\eta}_T / \hat{\eta} = Pr^{-3/4} \quad (2-44)$$

folgt, daß z.B. bei flüssigem Natrium mit $Pr = 0,007$ die Dissipation bei Gebieten gleicher Temperaturidentität erfolgt, die um den Faktor 41,3 größere Durchmesser besitzen als die kleinsten Wirbel. Ein Temperaturfeinstrukturmodell ist damit schon ab $(10^3)^{3/41,3^3} \approx 10^4$ Maschen nicht mehr notwendig. Den Einfluß der Reynolds- und Prandtl-Zahlen zeigt die Tab. 1.

(Zu nur unwesentlich anderen Zahlen gelangt man, wenn man anstelle von η und η_T die Taylor'schen Mikromaßstäbe λ bzw. λ_T einführt. Corrsin [1951b] findet damit eine Abhängigkeit gemäß Pr^{-1} . Ogura [1958] kommt mit einem korrigierten η'_T über eine Dimensionsanalyse zu $Pr^{-3/8}$.) Da eben gerade diese Maschennetzgröße heute mit vertretbarem Aufwand zu verwirklichen ist, muß zum einen dieses Ergebnis überprüfbar sein und zum anderen das einzuführende Temperaturfeinstrukturmodell diesen Übergang zu Null beinhalten.

3. SCHLIESSUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS MITTELS FEINSTRUKTURMODELLEN

3.1 Gedankengang der Modellerstellung

In diesem Abschnitt wird kurz ein Überblick gegeben, wie das Gleichungssystem (2-41) über Ansätze für die Unbekannten $\overline{j u_i' u_j'}$ und $\overline{j u_j' T'}$ unter Zuhilfenahme der Theorie isotroper Turbulenz bei der Bestimmung der Modellkonstanten in ein geschlossenes Gleichungssystem überführt werden kann. Dabei wird der Gedanken- und Rechengang am Beispiel des hier neu abgeleiteten Temperaturfeinstrukturmodells erläutert.

Vor dem Beginn der Modellerklärung müssen drei Begriffe erläutert werden: Homogenität, Isotropie und Lokalisotropie. Ein homogenes Turbulenzfeld hat die Eigenschaft, daß seine statistischen Größen und Verteilungen unabhängig vom Ort sind; d.h. sie sind invariant gegenüber Translation. Ein isotropes Turbulenzfeld hat die zusätzliche Eigenschaft, daß seine statistischen Größen und Verteilungen auch unabhängig von der Richtung sind; d.h. sie sind invariant gegenüber Translation und Rotation [Rotta 1972]. Von Lokalisotropie spricht man, wenn ein Turbulenzfeld im Wellenzahlenraum (oder Frequenzbereich) Gebiete hat, die isotrop sind [Monin, Yaglom 1975]. Diese Eigenschaft haben alle Wirbel unterhalb einer bestimmten Grenzgröße, ab der kein Einfluß der Randbedingungen, der Kanalgeometrie usw. mehr festzustellen ist. Diese Grenzgröße wiederum ist eine Funktion der Reynolds-Zahl [Lörcher 1976].

Da die hier betrachteten Kanalströmungen stets inhomogen sind, werden die unbekanntenen turbulenten Feinstrukturwärmeströme $\overline{j u_j' T'}$ aufgeteilt in einen instationären lokal-isotropen (I) und in einen stationären inhomogenen Anteil (II). Für beide Teile werden getrennte Ansätze eingeführt. Diese entsprechen formal zwar den Ansätzen statistischer Turbulenzmodelle, sie berücksichtigen dagegen aber nur die in der Feinstruktur auftretenden Effekte. So werden für beide Teile Gradienten-Ansätze [Boussinesq 1877] eingeführt:

$$\overline{j u_j' T'} = \underbrace{-\delta_{a_t} \delta_j (\overline{j T'} - \langle \overline{j T'} \rangle)}_I - \underbrace{\delta_{a_t}^* \delta_j \langle \overline{j T'} \rangle}_{II} \quad (3-1)$$

Für die lokalisotrope turbulente Temperaturleitfähigkeit δ_{a_t} wird in Analogie zum Energie-Modell von Prandtl (für den Impulsaustausch) [Prandtl 1945] folgender Ansatz gemacht:

$$\delta_{a_t} = C_{T2} \delta_{C_T} \left(\delta_F \delta_{E'} \right)^{1/2} \quad (3-2)$$

Darin ist j_{C_T} ein Geometriefaktor, der nur bei ungleichseitigen Maschen von eins verschieden ist; j_F ist der Maschenquerschnitt in x_j -Richtung und j_{E^T} die in j_F enthaltene, nicht aufgelöste Turbulenzenergie (= Feinstrukturenergie). Berechnet wird j_{E^T} aus einer zusätzlichen Transportgleichung (Kapitel 3.4). C_{T2} ist die bestimmende Konstante des Modells. Sie wird über die Theorie isotroper Turbulenz bestimmt. Über die Erhaltungsgleichung für die nichtaufgelösten Temperaturschwankungsquadrate $\overline{v_{E^T}^T}_{T1/2}$ (ähnlich zu (2-31)) und den lokalisotropen Teil des Ansatzes (3-1,2) erhält man folgende Bestimmungsgleichung für C_{T2} (Kap. 3.2.2.1):

$$C_{T2} = \frac{\langle \overline{v_{E^T}^T} \rangle - \langle a (\overline{\delta_j^j T^j}) \delta_j^j T^j \rangle}{\langle \delta_{C_T}^j (\delta_F^j E^j)^{1/2} (\overline{\delta_j^j T^j})^j \delta_j^j T^j \rangle} \quad (3-3)$$

Der Operator $\overline{y^j}$ bedeutet arithmetische Mittelung über zwei in x_j -Richtung benachbarte Maschen

$$\overline{y^j} = (y_{j+1/2} + y_{j-1/2}) / 2. \quad (3-4)$$

Führt man hier den Differenzenoperator (2-34) ein und multipliziert aus, dann kommt man zu Produkten von jeweils zwei räumlich gemittelten Temperaturen, $\langle \overline{T(x_1)} \cdot \overline{T(x_2)} \rangle$. Diese Zweipunktekorrelationen sind bei isotroper Turbulenz berechenbar aus den Energiespektren der Temperaturschwankungen [Hinze 1959]. Und diese wiederum können in dem für Lokalisotropie wichtigen Bereich durch nur eine einzige, wahrscheinlich universell gültige, empirische Konstante beschrieben werden. Damit hängt C_{T2} nur von dieser einen Konstanten ab.

Bei dem Ansatz für die inhomogene Temperaturleitfähigkeit $j_{a^*}^t$ wird berücksichtigt, daß in den betrachteten Kanälen nur in x_3 -Richtung nennenswerte Inhomogenitäten auftreten. Es wird ein Ansatz von der Art eines Prandtl'schen Mischungsweges gemacht, wie er für den Temperaturaustausch von Cebeci [1973] und Na und Habib [1973] angegeben wird, allerdings erweitert um eine Schwächungsfunktion $f_H(h^n)$, die mit abnehmender Maschenweite

$$h = \sqrt[3]{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \quad (3-5)$$

gegen Null geht. Der Ansatz lautet:

$$j_{a^*}^t = \delta_{3j}^t \ell \ell_H / \delta_3 \langle \overline{u_1} \rangle / f_H(h^n) \quad (3-6)$$

l und l_h sind die Mischungswege. Die Schwächungsfunktion $f_H(h^n)$ wird so bestimmt, daß bei sehr großen Maschen entsprechend dem Grenzübergang vom Feinstrukturmodell in ein statistisches Turbulenzmodell f_H den Wert eins annimmt (nach dem Ergodentheorem [Lumley 1970, Rotta 1972] sind Mittelwerte über große Flächen oder Volumina identisch mit Zeitmittelwerten) und daß bei kleinen Maschen f_H entsprechend den Mittelungsvorschriften, die in $\overline{j_{u_j}^i T^i}$ enthalten sind, gegen Null geht (Kap. 3.2.3).

3.2 Temperaturfeinstrukturmodell

Der oben skizzierte Gedankengang zur Erstellung eines bezüglich Temperatur-austausches geschlossenen Gleichungssystems wird in diesem Kapitel ausführlich dargelegt. Ausgehend von den Schließungsansätzen wird gezeigt, wie mit den Hilfsmitteln der Theorie isotroper Turbulenz die Konstante C_{T2} des isotropen Modells theoretisch berechnet wird, wie diese mit den Deardorff'schen Erfahrungen übereinstimmt und wie man eine geeignete Schwächungsfunktion $f_H(h^n)$ für das inhomogene Modell ableiten kann.

3.2.1 Ansätze für das Temperaturfeinstrukturmodell

Die hier betrachteten Kanalströmungen haben die Eigenschaft, daß sie stark inhomogen sind. Es ist zu erwarten, daß sich die Inhomogenität beim Zerfall der großen Wirbel in kleinere fortpflanzt und sich auch noch bei den kleinen Wirbeln zeigt, die durch das Maschennetz gerade nicht mehr aufgelöst werden. Es erscheint daher ratsam, die turbulenten Feinstrukturwärmeströme $\overline{j_{u_j}^i T^i}$ in einen isotropen Anteil (I) und in einen inhomogenen Anteil (II) aufzuteilen:

$$\overline{j_{u_j}^i T^i} = \underbrace{\left(\overline{j_{u_j}^i T^i} - \langle \overline{j_{u_j}^i T^i} \rangle \right)}_I + \underbrace{\langle \overline{j_{u_j}^i T^i} \rangle}_{II} \quad (3-7)$$

Der isotrope Anteil ergibt sich hiernach als instationärer Wärmefluß. Sein zeitlicher Mittelwert ist in Übereinstimmung mit den Forderungen isotroper Turbulenz gleich Null. Der inhomogene Anteil ergibt sich als stationärer Wärmefluß (stationär in bezug auf die Zeitmaßstäbe turbulenter Schwankungen) und ist damit über weite Bereiche des Kanals von Null verschieden.

3.2.1.1 Gradienten-Ansatz

Während bisher nur rein formale Änderungen an den Grundgleichungen vorgenommen wurden, müssen nun Annahmen über die Abhängigkeiten der Terme I und II in (3-7) eingeführt werden. Dabei wird vom Prinzip der "Wirbelviskosität" [Launder, Spalding 1972] ausgegangen und entsprechend dem molekularen Wärmeaustausch ein turbulenter Austausch mit einer effektiven Temperaturleitfähigkeit $\dot{j}a_t$ angenommen. Der sich daraus ergebende Gradienten-Ansatz erfüllt alle oben aufgeführten Eigenschaften von (3-7).

$$\dot{j} \overline{u_j' T'} = - \dot{j} a_t \underbrace{\delta_j}_{I} (\overline{T'} - \langle \overline{T'} \rangle) - \dot{j} a_t^* \underbrace{\delta_j}_{II} \langle \overline{T'} \rangle \quad (3-8)$$

Damit ist das Schließungsproblem verlagert auf die Bestimmung der turbulenten Leitfähigkeiten $\dot{j}a_t$ und $\dot{j}a_t^*$.

3.2.1.2 Isotropes Feinstrukturmodell

Für die isotrope Temperaturleitfähigkeit $\dot{j}a_t$ wird ein Ansatz in Analogie zur isotropen Zähigkeit von Schumann [1973a, 1975a] gemacht:

$$\dot{j}a_t = C_{T2} \dot{j}C_T (\dot{j}F \overline{\dot{j}E'})^{1/2} \quad (3-9)$$

Dieser Ansatz entspricht formal dem Energie-Modell von Prandtl [1945]. Er berücksichtigt die physikalische Abhängigkeit der "passiven" turbulenten Temperaturschwankungen innerhalb der Feinstruktur von den "aktiven" turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen innerhalb der Feinstruktur, repräsentiert durch die Feinstrukturenergie $\overline{\dot{j}E'}$. Die Abhängigkeit des Modells von der Maschennetauflösung ist durch die Fläche $\dot{j}F$ gegeben, wobei die Abhängigkeit gemäß $\dot{j}F^{1/2}$ gewählt wird, weil nur so die Konstante C_{T2} dimensionslos ist.

C_{T2} ist die bestimmende Modellkonstante. Für sie wird im Kapitel 3.2.2 mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz eine Bestimmungsgleichung abgeleitet. $\dot{j}F$ ist die Maschenoberfläche (siehe Abb. 2). Über sie wird die Maschennetaanisotropie berücksichtigt. $\overline{\dot{j}E'}$ ist die Energie der durch das Maschennetz nicht aufgelösten Geschwindigkeitsschwankungen. Berechnet wird diese Energie aus einer zusätzlichen Transportgleichung (siehe Kap. 3.4) für $\overline{vE'}$ mit Hilfe des Faktors $\dot{j}C_5$, der von Schumann [1973a, 1975a] über die Theorie isotroper Turbulenz berechnet wurde:

$$\overset{j}{E}' = \overset{j}{C}_S \overset{j}{E}' \quad (3-10)$$

$\overset{j}{C}_T$ ist ein reiner Geometriefaktor von der Größenordnung eins. Er wird in Analogie zu dem Faktor $\overset{ij}{C}$ des Impulsfeinstrukturmodells [Schumann 1975a] eingeführt. Durch den Faktor $\overset{j}{C}_T$ soll berücksichtigt werden, daß der turbulente Wärmestrom $\overset{j}{u}'_{jT}$ wegen (3-8) über $\delta_j(\overline{j_T} - \langle \overline{j_T} \rangle)$ von Δx_j abhängig ist und diese Abhängigkeit wegen der Definition als Flächenmittelwert $\overline{j_y}$ nicht haben dürfte. Eine Möglichkeit, dies zu korrigieren, wird in dem zu $\overset{ij}{C}$ analogen Faktor $\overset{j}{C}_T$ gesehen:

$$\overset{j}{C}_T = \frac{\langle (\delta_j \overline{j_T})^2 \rangle}{\langle (\delta_{[j]} \overline{j_T})^2 \rangle} \cdot \frac{\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_{[j]}} \right)^2 \rangle}{\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 \rangle} \quad (3-11)$$

(Korrekterweise sollte hier wegen (3-8, 9) aus dem rechtsstehenden Teil von $\overset{j}{C}_T$ (ebenso bei $\overset{ij}{C}$) die Quadratwurzel gezogen werden. Da dies aber ohnehin nur eine Näherung ist und numerische Tests keinen nennenswerten Einfluß zeigten, wird in Konsistenz mit den früheren Arbeiten die Form (3-11) beibehalten.)

Der Faktor $\overset{j}{C}_T$ ist mit den mathematischen Hilfsmitteln der Theorie isotroper Turbulenz ohne empirische Unterstützung zu berechnen.

Das Schließungsproblem bezüglich der drei isotropen Temperaturleitzahlen $\overset{j}{a}_t$ hat sich damit reduziert auf die Bestimmung nur einer Konstanten C_{T2} , die empirische Informationen beinhaltet. Die Schließung der Transportgleichung für $\overset{j}{E}'$ erfolgt ebenfalls theoretisch über die Theorie isotroper Turbulenz, mit Unterstützung durch empirisch gewonnene Informationen.

3.2.1.3 Inhomogenes Feinstrukturmodell

Bedeutende Inhomogenitäten, die sich bis in die Feinstruktur auswirken können, treten bei den betrachteten Kanalströmungen nur in der x_3 -Richtung auf, da nur in dieser Richtung die Gradienten $\delta_j \langle \overline{j_T} \rangle$ wesentlich von Null verschieden sind. Das bedeutet, daß gilt:

$$\overset{j}{a}_t^* = 0 \quad \text{für } j = 1, 2. \quad (3-12)$$

Der Einfachheit halber soll hier kein höheres Turbulenzmodell mit zusätzlichen Transportgleichungen gewählt werden, sondern ein einfaches "Null-Gleichungsmodell" [Launder, Spalding 1972], das sich in Kanalströmungen bewährt hat

und zudem auch die Abhängigkeit von der molekularen Prandtl-Zahl beinhaltet. Es wird unter Zugrundelegung des Mischungswegmodells von Cebeci [1973] mit der Prandtl-Zahl-Abhängigkeit nach Na und Habib [1973] folgender Ansatz für die inhomogene Temperaturleitfähigkeit $j_{a_t}^*$ gewählt:

$$j_{a_t}^* = \delta_{3j} \ell \ell_H |\delta_3 \langle \overline{u_1} \rangle| f_H(h^n) \quad (3-13)$$

Darin ist δ_{3j} das Kronecker-Delta, ℓ der Mischungsweg für Impuls und ℓ_H der Mischungsweg für Temperatur. $f_H(h^n)$ ist eine Dämpfungsfunktion. Sie muß die Abhängigkeit von $j_{a_t}^*$ von der Maschennetauflösung beinhalten. Eine solche Dämpfungsfunktion wird im Abschnitt 3.2.3 bestimmt.

Für den Impulsmischungsweg ℓ wird die parabelförmige Verteilung von Nikuradse angesetzt, die sowohl für glatte, als auch raue Wände gültig ist [Nikuradse 1932, 1933].

$$\ell' = \hat{y} \left(0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{\hat{y}}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{\hat{y}}\right)^4 \right) \quad (3-14)$$

Darin ist \hat{y} die Profillänge (Abstand Wand-Geschwindigkeitsmaximum) und y der Wandabstand. Dieser Ansatz entspricht bei y gegen Null dem Prandtl'schen Mischungsweg $\ell' = \kappa \cdot y$ mit der Kármán-Konstanten

$$\kappa = 0,4 \quad (3-15)$$

Die in unmittelbarer Wandnähe zu großen ℓ' -Werte werden nach van Driest [1956] korrigiert, wobei hier die wirkliche Schubspannungsverteilung berücksichtigt wird [Lauder, Priddin 1973].

$$\ell = \ell' \left(1 + f(E) \exp \left\{ -Y^+ \tau^{1/2} / A_w(E) \right\} \right) \quad (3-16)$$

Die Faktoren $f(E)$ und $A_w(E)$ wurden für allgemeine Rauigkeiten durch Vergleich mit dem logarithmischen Geschwindigkeitsprofil [Jayatilke 1969]

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Y^+ E(h^+)) \quad (3-17)$$

abgeleitet [Grötzbach 1974] ($Y^+ = \hat{y} \cdot \hat{u}_\tau / \hat{\nu} = y \cdot \text{Re}_\tau$ ist der dimensionslose Wandabstand und $h^+ = \hat{h} \cdot \hat{u}_\tau / \hat{\nu} = h \cdot \text{Re}_\tau$ die charakteristische dimensionslose Rauigkeitshöhe):

$$f(E) = \begin{cases} -1 & \text{für } E > 0,59 \\ +1 & \text{für } E < 0,59 \end{cases} \quad (3-18)$$

$A_w(E)$ siehe Abb. 4.

Der Vorzeichenwechsel in (3-18) erfolgt genau bei der Rauigkeit, bei der der Mischungsweg nach van Driest in Wandnähe so weit vergrößert wurde, daß er mit dem Prandtl'schen Mischungsweg übereinstimmt. Die Funktion $E(h^+)$ ist abhängig von der Rauigkeitsgeometrie. Für Sandrauigkeiten kann sie aus den Messungen von Nikuradse [1933] berechnet bzw. approximiert werden durch [Grötzbach 1974]:

$$E(h^+) = \begin{cases} 9,025 & 0 \leq h^+ \leq 5 \\ 41,35/h^{+0,945} & 5 < h^+ \leq 16 \\ 115,8 / h^{+1,318} & 16 < h^+ \leq 70 \\ 30,03/h^+ & 70 < h^+ \end{cases} \quad (3-19)$$

Für den Temperaturmischungsweg l_H wird hier ebenfalls die Verteilung von Nikuradse nach (3-14) benutzt und entsprechend der für Temperaturprofile gültigen "Kármán"-Konstanten κ_H korrigiert:

$$l'_H = l'(\hat{y}_T) \kappa_H / \kappa \quad (3-20)$$

\hat{y}_T ist die Profillänge des Temperaturprofiles. Für κ_H wird der aus der Literaturübersicht der logarithmischen Temperaturprofile im Anhang 2 gewonnene Wert benutzt:

$$\kappa_H = 0,465 \quad (3-21)$$

Die der van Driest'schen Dämpfungsfunktion äquivalente Beziehung lautet nach Cebeci [1973]:

$$l_H = l'_H \left(1 - \exp \left\{ - Y^+ z^{1/2} Pr^{1/2} / B_w(Pr) \right\} \right) \quad (3-22)$$

Für die von der Prandtl-Zahl abhängige Größe $B_w(Pr)$ geben Na und Habib [1973] die folgende empirisch gewonnene Beziehung an:

$$B_w(Pr) = \sum_{i=1}^5 C_i (\log_{10} Pr)^{i-1} \quad (3-23)$$

mit den Konstanten $C_1 = 34,96$, $C_2 = 28,79$, $C_3 = 33,95$, $C_4 = 6,33$ und $C_5 = -1,186$. Eine Abhängigkeit von l_H von der Rauigkeit h^+ wurde nicht eingeführt, da zum einen selbst bei Sandrauigkeiten deren Einfluß auf die Temperaturprofile nicht eindeutig geklärt ist (siehe Anhang 2, Abb. 6) und zum anderen die Berücksichtigung von h^+ über 1 alleine beim derzeitigen Stand des Wissens durchaus ausreichend erscheint. Der Fehler, der hierdurch eventuell gemacht wird, ist von untergeordneter Bedeutung, da es sich ja

lediglich um ein Feinstrukturmodell handelt und, je nach Maschennetauflösungsvermögen, ohnehin der überwiegende Wärmeaustausch in der aufgelösten Grobstruktur stattfindet.

Das Schließungsproblem bezüglich der inhomogenen Feinstrukturwärmeströme hat sich nach dem Einführen aller Ansätze reduziert auf die Bestimmung von nur einer empirisch abzusichernden Funktion $f_H(h^H)$, die die Maschennetzabhängigkeit berücksichtigt. Von den Ansätzen zum isotropen Anteil verbleiben die Probleme, theoretisch eine Bestimmungsgleichung für C_{T2} und eine Transportgleichung für die Feinstrukturenergie abzuleiten und Schließungsannahmen für diese einzuführen.

3.2.2 Berechnung der Konstanten im isotropen Modell

Im Kapitel 3.2.1 wurden alle wesentlichen Annahmen zur Schließung der Temperaturgleichung zusammengestellt. In diesem Kapitel werden unter Zuhilfenahme der Theorie isotroper Turbulenz die Modellkonstanten des isotropen Modells bestimmt. Dazu wird zunächst aus der Erhaltungsgleichung für Temperaturschwankungsquadrate in der Feinstruktur eine Bestimmungsgleichung für C_{T2} hergeleitet. Die darin vorkommenden Zweipunktekorrelationen werden anschließend mit den mathematischen Hilfsmitteln der Theorie isotroper Turbulenz aus den Energiespektren der Temperaturschwankungen berechnet. Empirische Angaben fließen hier nur insofern ein, als Angaben über den Verlauf der Energiespektren im für Lokal isotropie maßgeblichen Bereich erforderlich sind.

3.2.2.1 Bestimmungsgleichung für die isotrope Modellkonstante

Zu einer Bestimmungsgleichung für die Konstante C_{T2} des isotropen Feinstrukturmodells kommt man, wenn man den isotropen Anteil des Ansatzes (3-8) zusammen mit dem Ansatz (3-9) des Temperaturfeinstrukturmodells in die Erhaltungsgleichung für den isotropen Anteil der Temperaturschwankungsquadrate innerhalb der Feinstruktur einsetzt. Im Anhang 3 wird die Transportgleichung für die Temperaturschwankungsquadrate in der Feinstruktur hergeleitet. Das Ergebnis lautet (A3-9):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{v_{T1/2}'} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{v_{T1/2}'} \\
 &= - \overline{\delta_j' (\delta_j' \mu_j' \delta_j' E_{T1/2}')} \\
 &\quad - \overline{\delta_j' \mu_j' T'} \delta_j' \delta_j' T' \\
 &\quad + \delta_j' \left\{ \overline{\delta_j' \frac{\partial E_{T1/2}'}{\partial x_j'}} - \overline{\mu_j' E_{T1/2}'} \right\} \\
 &\quad + \overline{v_a} \overline{\delta_j' T'} \delta_j' \delta_j' T' - \overline{v_{T1/2}'}
 \end{aligned} \tag{3-24}$$

Diese Gleichung ist allgemein gültig, also auch für den isotropen Anteil der Temperaturfluktuationen. (Ein entsprechender Beweis wurde von Schumann [1973a] am Beispiel der Impulstransportgleichungen geführt.) In diesem Falle ist der Produktionsterm dieser Gleichung aus dem isotropen Anteil des Feinstrukturmodells (3-8, 9) berechenbar:

$$- \overline{\delta_j' \mu_j' T'} \delta_j' \delta_j' T' = \overline{C_{T2} \delta_j' C_T (\delta_j' \delta_j' E')^{1/2} \delta_j' T' \delta_j' T'} \tag{3-25}$$

Mittelt man (3-24) zusammen mit (3-25) über der Zeit oder über Ensemble und über das gesamte Kanalvolumen, dann verschwinden die diffusiven und konvektiven Terme und man erhält

$$\left\langle \overline{C_{T2} \delta_j' C_T (\delta_j' \delta_j' E')^{1/2} \delta_j' T' \delta_j' T'} \right\rangle = \left\langle \overline{v_{T1/2}'} \right\rangle - \left\langle \overline{v_a \delta_j' T' \delta_j' T'} \right\rangle \tag{3-26}$$

Die Konstante C_{T2} ist in dem betrachteten isotropen Feld zeitunabhängig. Daher kann (3-26) nach C_{T2} aufgelöst werden. Die Bestimmungsgleichung für C_{T2} ist dann:

$$C_{T2} = \frac{\left\langle \overline{v_{T1/2}'} \right\rangle - \left\langle \overline{v_a \delta_j' T' \delta_j' T'} \right\rangle}{\left\langle \overline{\delta_j' C_T (\delta_j' \delta_j' E')^{1/2} \delta_j' T' \delta_j' T'} \right\rangle} \tag{3-27}$$

Die Mehrfachkorrelationen zwischen $\delta_j' E'$ und $\delta_j' T'$ im Nenner von C_{T2} sind mit der Theorie isotroper Turbulenz nur mit erheblichem Aufwand und zusätzlicher empirischer Information berechenbar. Um dies zu umgehen, wird der Nenner in zwei Teile aufgespalten und zur Berücksichtigung des eventuell hierdurch eingeführten Fehlers der Korrekturfaktor γ_T eingeführt.

$$C_{T2} = \frac{\langle \varepsilon_{T1/2} \rangle - \langle \sqrt{a} \delta_j^{jT} \delta_j^{jT} \rangle}{\sigma_T \langle \delta C_T^2 \delta F \delta E^1 \rangle^{1/2} \langle \delta_j^{jT} \delta_j^{jT} \rangle} \quad (3-28)$$

Wegen $\langle j_{E^1}^{1/2} \rangle \geq \langle j_{E^1} \rangle^{1/2}$ wird angenommen, daß der Faktor γ_T nur geringfügig größer als eins ist.

3.2.2.2 Berechnung der Korrelationen räumlich gemittelter Feldgrößen bei Lokalisotropie

Bevor die in C_{T2} und j_{C_T} vorkommenden Auto- bzw. Zweipunktekorrelationen mit den Hilfsmitteln der Theorie isotroper Turbulenz berechnet werden, wird eine verkürzte Schreibweise für die "Deformationstemperaturquadrate" ${}_i D_T^2$ eingeführt. Aus j_{C_T} nach (3-11) wird:

$$j_{C_T} = \frac{\langle {}_1 D_{Tj}^2 \rangle}{\langle {}_1 D_{Tj}^2 \rangle} \cdot \frac{\langle \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)^2 \rangle}{\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 \rangle} \quad (3-29)$$

mit

$$\langle {}_1 D_{Tj}^2 \rangle = \langle \left(\delta_j^{jT} \right)^2 \rangle \quad (3-30)$$

und aus C_{T2} nach (3-28) wird unter zusätzlicher Berücksichtigung der zeitlichen Konstanz von j_{C_T} und j_F

$$C_{T2} = \frac{\langle \varepsilon_{T1/2} \rangle - a \langle {}_2 D_{Tj}^2 \rangle}{\sigma_T j_{C_T} j_F^{1/2} \langle j_{E^1} \rangle^{1/2} \langle {}_2 D_{Tj}^2 \rangle} \quad (3-31)$$

mit

$$\langle {}_2 D_{Tj}^2 \rangle = \langle \overline{\delta_j^{jT} \delta_j^{jT}} \rangle \quad (3-32)$$

Die Aufgabe dieses Abschnittes ist es, Gleichungen für die beiden $\langle {}_i D_{Tj}^2 \rangle$ bereitzustellen. Dies soll ausführlich am Beispiel von $\langle {}_2 D_{Tj}^2 \rangle$ nach (3-32) gezeigt werden.

$$\underline{\langle {}_2 D_{Tj}^2 \rangle} :$$

Dieser Zeitmittelwert ist zunächst unbekannt, er kann jedoch durch Ausschreiben der Differenzenformeln auf 2-Punkte-Korrelationen zurückgeführt werden. Die für ein isotropes Maschennetz ausgeschriebene Differenzenform heißt mit (2-34) und (3-4) für $j = 1$:

$$\begin{aligned} \langle {}_2 D_{T_1}^2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{2(\Delta x_1)^2} \left\{ \overline{T}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \overline{T}(x_1, x_2, x_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \overline{T}(x_1, x_2, x_3) - \overline{T}(x_1 - \Delta x_1, x_2, x_3) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \overline{T}(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) - \overline{T}(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) \right\} \right. \end{aligned} \quad (3-33)$$

Bei isotroper Turbulenz sind alle statistischen Mittelwerte unabhängig von den betrachteten Orten \underline{x} . Sie hängen nur von den Abstandsvektoren $\underline{\Delta x}$ ab und sind richtungsunabhängig (A4-33, Anhang 4). Damit wird ${}_2 D_{T_1}^2$ nach dem Ausmultiplizieren:

$$\langle {}_2 D_{T_1}^2 \rangle = \frac{-1}{(\Delta x_1)^2} \left\{ \left\langle \overline{T} \overline{T} \left(\frac{3}{2} \Delta x_1, 0, 0 \right) \right\rangle - \left\langle \overline{T} \overline{T} \left(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \right\rangle \right\} \quad (3-34)$$

Die hier auftretenden zeitlichen Mittelwerte von Zweipunktkorrelationen von Flächenmittelwerten zweier Temperaturen an verschiedenen Orten

$$R(T, T, \overset{i}{F}, \overset{j}{F}, \underline{\Delta x}) = \left\langle \overline{T}(\underline{x}) \cdot \overline{T}(\underline{x} + \underline{\Delta x}) \right\rangle \quad (3-35)$$

können mit der von Uberoi und Kovaszny [1952] abgeleiteten Volumenkorrelationsmethode berechnet werden, wobei die hier notwendigen Vierfachintegrale durch Einführen formal integrierbarer Gewichtsfunktionen auf Zweifachintegrale reduziert werden:

$$\begin{aligned} R(T, T, \overset{i}{F}, \overset{j}{F}, \underline{\Delta x}) &= \frac{1}{\overset{i}{F} \overset{j}{F}} \iint_{\overset{i}{F}} \iint_{\overset{j}{F}} R_{TT}(\underline{y} - \underline{z} - \underline{\Delta x}) dF(\underline{y}) dF(\underline{z}) \\ &= \iint_{\infty} \mathcal{G}_{ij}(\underline{z}) R_{TT}(\underline{z} - \underline{\Delta x}) dF(\underline{z}) \end{aligned} \quad (3-36)$$

$\mathcal{G}_{ij}(\underline{z})$ ist das Flächenintegral der Gewichtsfunktionen K_i und K_j der beiden Flächen:

$$\mathcal{G}_{ij}(\underline{z}) = \iint_{\infty} K_i(\underline{y}) K_j(\underline{y} + \underline{z}) dF(\underline{y}) \quad (3-37)$$

Dieses Integral kann bei geradlinigen orthogonalen Maschennetzen mit den Maschenweiten h_i analytisch berechnet werden. Nach Schumann [1973a, 1975a] ist es bei gleich orientierten Flächen ($i=j=1$):

$$\Psi_{11}(\underline{r}) = \prod_{i=1}^2 \frac{1}{h_{Ei}^2} \text{Max.}(0, h_i - |\tau_i|) \quad (3-38)$$

Bei lokal isotroper Turbulenz, nur für diese wird wegen (3-7) das isotrope Feinstrukturmodell benutzt, ist R_{TT} in (3-36) aus dem Energiespektrum $E_T(k)$ der Temperaturschwankungen durch inverse Fourier-Transformation berechenbar (siehe Anhang 4). Diese Spektren gehorchen bei hohen Reynolds-Zahlen über einen weiten Wellenzahlenbereich einem dem bekannten Kolmogorov-Spektrum (siehe Anhang 4) analogen Gesetz, das von Obukhov [1949] und Corrsin [1951a] angegeben wurde:

$$E_T(k) = \beta \langle \epsilon_T \rangle \langle \epsilon \rangle^{-1/3} k^{-5/3} \quad (3-39)$$

k ist die Wellenzahl. Sie kann nach der Taylor'schen Hypothese [Taylor 1935] aus der Frequenz \hat{n} berechnet werden:

$$k = \hat{k} \hat{D} = 2\pi \hat{n} \hat{D} / \langle \hat{u}_1 \rangle \quad (3-40)$$

β ist eine empirisch zu bestimmende Konstante. Nach der Literaturübersicht in Tab. 4 wird der Wert

$$\beta = 1,3 \quad (3-41)$$

gewählt. ϵ ist die Dissipation für die Schwankungsenergie $u_i^2/2$ und ϵ_T ist die "Dissipation" für die Temperaturschwankungsquadrate T^2 .

Die Einschränkung der Gültigkeit von (3-39) auf hohe Reynolds-Zahlen ist, wie die Erfahrung zeigt, bei der Berechnung der Feinstrukturkonstanten C_{T2} nicht von praktischer Bedeutung, da bei abnehmender Reynolds-Zahl die Verarmung der Spektren an hohen Wellenzahlen zu einer Verringerung des zu simulierenden Feinstrukturanteiles führt und eine solche Verringerung aber schon durch die Benutzung der Gleichung (3-24) über $a = (Re_T \cdot Pr)^{-1}$ in C_{T2} eingeflossen ist. Ein ähnliches Verhalten des Impulsfeinstrukturmodells wird im Anhang 5 diskutiert.

Mit dem Kolmogorov-Spektrum für Temperaturschwankungen nach (3-39) kann nun die Zweipunktekorelation R_{TT} nach Anhang 4 berechnet werden. Als Ergebnis erhält man (A4-32):

$$R_{TT}(\tau) - R_{TT}(0) = -\frac{9}{20} \Gamma(1/3) \beta \langle \epsilon_T \rangle \langle \epsilon \rangle^{-1/3} \tau^{2/3} \quad (3-42)$$

Setzt man diese Beziehung zusammen mit dem Flächenintegral (3-38) in (3-36) ein und normiert alle vorkommenden Längen auf die charakteristische Maschenweite h nach (3-5), dann kann die Flächenkorrelation

$$\langle \overline{\overline{T}}^{\overline{\overline{T}}}(\Delta x_1, 0, 0) \rangle = R_{TT}(0) - \frac{9}{20} T(1/3) \beta \langle \epsilon_T \rangle \langle \epsilon \rangle^{-1/3} h^{2/3} DT^*(\Delta x_1, h_2, h_3) \quad (3-43)$$

berechnet werden durch numerische Auswertung des Zweifachintegrals:

$$DT^*(\Delta x_1, h_2, h_3) = \frac{4}{h_2^2 h_3^2} \int_0^{h_2} \int_0^{h_3} (h_2 - |\tilde{r}_2|)(h_3 - |\tilde{r}_3|) (\Delta x_1^2 + \tilde{r}_2^2 + \tilde{r}_3^2)^{1/3} d\tilde{r}_3 d\tilde{r}_2 \quad (3-44)$$

Für $\langle {}_2D_{T1}^2 \rangle$ erhält man letztlich wegen (3-34):

$$\langle {}_2D_{T1}^2 \rangle = \frac{9}{20} T(1/3) \beta \langle \epsilon_T \rangle \langle \epsilon \rangle^{-1/3} h^{2/3} DT2_1 \quad (3-45)$$

mit

$$DT2_1 = \frac{1}{(\Delta x_1)^2} \left\{ DT^*\left(\frac{3}{2} \Delta x_1, h_2, h_3\right) - DT^*\left(\frac{\Delta x_1}{2}, h_2, h_3\right) \right\} \quad (3-46)$$

Die beiden übrigen Summanden von $\langle {}_2D_{Tj}^2 \rangle$ können hieraus durch Rotation des Koordinatensystems, d.h. durch entsprechendes Vertauschen der Indizes berechnet werden.

$\langle {}_1D_{Tj}^2 \rangle$:

Mit derselben Methode werden auch die $\langle {}_1D_{Tj}^2 \rangle$ aus den Maschennetzanisotropiekorrekturfaktoren $j c_T$ berechnet. Für die hierbei benötigte Formulierung von $\langle D_T^2 \rangle$ erhält man mit (3-43,44):

$$\begin{aligned} \langle {}_1D_{Tj}^2 \rangle &= \langle (\sigma_j^j \overline{\overline{T}})^2 \rangle = \frac{2}{(\Delta x_j)^2} \left\{ \langle \overline{\overline{T}}^{\overline{\overline{T}}}(\underline{0}) \rangle - \langle \overline{\overline{T}}^{\overline{\overline{T}}}(\Delta x_j^j) \rangle \right\} \\ &= \frac{9}{20} T(1/3) \beta \langle \epsilon_T \rangle \langle \epsilon \rangle^{-1/3} h^{2/3} \sum_{j=1}^3 DT1_j \end{aligned} \quad (3-47)$$

mit

$$DT1_1 = \frac{2}{(\Delta x_1)^2} \left\{ DT^*(\Delta x_1, h_2, h_3) - DT^*(0, h_2, h_3) \right\} \quad (3-48)$$

Beide Formulierungen für $\langle D_{Tj}^2 \rangle$ zeigen wegen

$$\langle {}_iD_{Tj}^2 \rangle \sim \frac{h^{2/3}}{(\Delta x_j)^2} \approx \frac{h^{4/3}}{h^2} = h^{-4/3} \quad (3-49)$$

eine Zunahme des Grobstrukturanteils bei abnehmender Maschenweite h gemäß $h^{-4/3}$.

In Tabelle 5 sind für ein isotropes Netz und für einen Ringspalt numerische Ergebnisse für

$$DT 1 = \sum_{j=1}^3 DT 1_j$$

und

$$DT 2 = \sum_{j=1}^3 DT 2_j \tag{3-50}$$

angegeben. Die Formulierung DT2 ist wegen der zusätzlichen Mittelung über Nachbarmaschen weniger stark an die Vorgänge am betrachteten Ort gebunden und hat daher einen geringeren Wert als DT1. Wegen der Mittelung zeigt sie eine relativ geringere Empfindlichkeit gegenüber Deformationen der betrachteten Maschen. Der Abfall der Werte beider Formulierungen mit zunehmendem Radius ist physikalisch verifizierbar, denn mit zunehmendem Radius werden die Flächen $\overset{j}{F}$, über die die Temperaturschwankungen gemittelt werden, und die Abstandsvektoren $\underline{\Delta x}_j$ der Zweipunktkorrelationen größer. Beides bewirkt, daß die Gradienten der über $\overset{j}{F}$ gemittelten Schwankungsfelder kleiner werden. Für sehr große $\overset{j}{F}$ und $\underline{\Delta x}_j$ verschwinden die Schwankungen gänzlich und die Gradienten werden zu Null.

$\langle \overset{j}{E^T} \rangle :$

Nachdem $\langle {}_2D_{Tj}^2 \rangle$ berechnet werden kann, fehlt zur Berechnung von C_{T2} lediglich die Beschreibung von $\langle \overset{j}{E^T} \rangle$. Die Lösung hierfür wird von Schumann [1973a, 1975a] übernommen:

$$\langle \overset{j}{E^T} \rangle = \alpha T^{1/3} \cdot \frac{g}{20} \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{2/3} \cdot \text{ENERG2}(j) \tag{3-51}$$

$$\text{ENERG2}(j=1) = 4 \int_0^{h_2} \int_0^{h_3} (h_2 - \tilde{t}_2)(h_3 - \tilde{t}_3)(\tilde{t}_2^2 + \tilde{t}_3^2)^{1/3} d\tilde{t}_3 d\tilde{t}_2$$

Hierin ist α die Kolmogorov-Konstante aus dem Energiespektrum der Geschwindigkeitsschwankungen (siehe Anhang 4):

$$E(k) = \alpha \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \tag{3-52}$$

Für α wird gemäß der Literaturübersicht in Tab. 4 der Wert

$$\alpha = 1,5 \tag{3-53}$$

benutzt.

3.2.2.3 Berechnung der Feinstrukturkonstanten

Die im letzten Abschnitt für Lokalisotropie berechneten Deformationstemperaturquadrate $\langle {}_i D_{Tj}^2 \rangle$ ermöglichen es, die Feinstrukturkonstanten ${}^j C_T$ und C_{T2} aus den Bestimmungsgleichungen (3-29) und (3-31) zu berechnen.

Einsetzen von $\langle {}_i D_{Tj}^2 \rangle$ nach (3-47,48) in die ${}^j C_T$ -Definitionsgleichung (3-29) und Berücksichtigung der Isotropie des Temperaturschwankungsfeldes nach Anhang 4, Gleichung (A4-13) liefert das Ergebnis:

$${}^j C_T = \left(\sum_{i=1}^3 DT1_i / DT1_j \right) \cdot (1/3) \quad (3-54)$$

Die von der Physik abhängigen Größen α , β , ϵ und ϵ_T kürzen sich heraus. Die ${}^j C_T$ sind einzig von der Geometrie des Maschennetzes abhängig.

Berücksichtigt man beim Einsetzen von $\langle {}_2 D_{Tj}^2 \rangle$ nach (3-45,46) und $\langle {}^j \overline{E} \rangle$ nach (3-51) in C_{T2} nach (3-31) die Normierung aller Längen, also auch bei ${}^j F$, auf die Maschenweite h und die unterschiedlichen Definitionen der Dissipation der Temperaturschwankungen (A4-24), dann erhält man für C_{T2} :

$$C_{T2} = \frac{\frac{1}{2} - \beta \frac{9}{20} T(1/3) h^{-4/3} \langle \epsilon \rangle^{-1/3} \frac{1}{a} \sum_{j=1}^3 DT2_j}{\epsilon_T \beta \alpha^{1/2} \left(\frac{9}{20} T(1/3) \right)^{3/2} \sum_{j=1}^3 \left[{}^j C_T \cdot DT2_j \cdot ({}^j F \cdot \text{ENERG2}(j))^{1/2} \right]} \quad (3-55)$$

Die Dissipationen ϵ und ϵ_T kürzen sich, bis im Subtrahenden im Zähler, heraus. Dort tritt noch $\langle \epsilon \rangle^{-1/3}$ als einzige Unbekannte in dieser Gleichung auf. Um abzuschätzen, mit welcher Sorgfalt (= Aufwand) die Dissipation "modelliert" werden muß, wird die Größenordnung des Subtrahenden im Zähler bestimmt. Darin sind als einzige Größen nur $h^{-4/3}$, $\langle \epsilon \rangle^{-1/3}$, $\frac{v}{a} = C$ wesentlich von eins verschieden. Bei den in dieser Arbeit verwirklichten Maschennetzen mit $h = 1/8 - 1/16$ und Reynolds-Zahlen $Re_T \gtrsim 10^3$ ist C bei $Pr \approx 1$ von der Größenordnung $C = 10^{-2}$, $\langle \epsilon \rangle^{-1/3}$. Für $\frac{v}{a} \langle \epsilon \rangle$ kann man die Größenordnung aus der Gesamtenergiegleichung abschätzen [Schumann 1973a_7]. Man erhält für den Mittelwert über das gesamte Kanalvolumen:

$$\langle \epsilon \rangle \approx 2 \langle u_1 \rangle \quad (3-56)$$

d.h., wegen $\frac{v}{a} \langle u_1 \rangle = 20 - 25$ (siehe Kapitel 6) ist $\langle \epsilon \rangle^{-1/3}$ von der Größenordnung 1 bis 10^{-1} . Damit ist der Subtrahend im Zähler von C_{T2} (3-55) gegenüber $1/2$ zu vernachlässigen, bzw. es kann die grobe Näherung (3-56) benutzt werden. (Benutzt wird 3-58.) Somit enthält C_{T2} in allen Fällen, in denen

das Temperaturfeinstrukturmodell relevant ist, an physikalischen Größen nur die experimentell zu bestimmende Kolmogorov-Konstante α und die Batchelor-Konstante β . Die übrigen Größen hängen nur von der Geometrie ab und sind exakt berechenbar.

Bei kleinen Prandtl-Zahlen und gleichzeitig kleinen Maschen und kleinen Reynolds-Zahlen ist (3-56) nicht mehr verwendbar, denn z.B. bei $Pr = 10^{-2}$ (h, Re_T wie oben) wird $C = 1 \cdot \langle \epsilon \rangle^{-1/3}$ und damit durchaus mit 1/2 vergleichbar. D.h. bei kleinen Prandtl-Zahlen sollte die starke Wandabstandsabhängigkeit der Dissipation berücksichtigt werden. Aber auch hier gilt, daß die Dissipation nicht mit hoher Exaktheit beschrieben werden muß, da in diesem Fall C_{T2} gegen Null geht ($1/2 - \sqrt{10^{-1}} \bar{}$), was durch die Verarmung der Energiespektren $E_T(k)$ an hohen Wellenzahlen (Abb. 7) bewirkt wird. Man ist damit an der Grenze, an der alle Temperaturschwankungen durch das Maschennetz aufgelöst werden und an der das Feinstrukturmodell nichts mehr zu simulieren braucht.

Eine recht gute und dennoch einfache Näherung für $\langle \epsilon \rangle$ erhält man aus der stationären Energiegleichung (2-29) unter Vernachlässigung der konvektiven und diffusiven Terme, d.h. aus der Bilanz: Produktion = Dissipation.

$$\langle \epsilon \rangle = - \langle u_1' u_3' \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} \quad (3-57)$$

Das Einführen des Prandtl'schen Mischungswegmodells und die Berechnung des Gradienten von $\langle u_1 \rangle$ aus dem logarithmischen Geschwindigkeitsprofil (3-17) führt zu der Lösung:

$$\langle \epsilon \rangle = \ell^2 \left| \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} \right|^3 = |\kappa \cdot y|^{-1} \quad (3-58)$$

κ ist die Kármán-Konstante (3-15) und y der Wandabstand.

Die Einführung der wandabstandsabhängigen Dissipation nach (3-58) in C_{T2} nach (3-55) widerspricht nicht der Voraussetzung, daß C_{T2} nur den isotropen Anteil der Temperaturschwankungen berücksichtigen soll, denn eben dieser ist wegen der festen Auflösungsgrenze k_{Netz} nach (A4-17) durch die Abhängigkeit der Größe von $\langle T'^2 \rangle$ vom Wandabstand ebenso vom Wandabstand abhängig. (3-58) führt speziell bei kleinen Peclet-Zahlen überhaupt erst zu dem physikalisch sinnvollen Ergebnis, daß in Wandnähe, wo $\langle \epsilon \rangle$ und $\langle T'^2 \rangle$ groß sind, C_{T2} größer Null wird, und in Kanalmitte durch kleine $\langle \epsilon \rangle$ zu Null

werden kann, weil auch dort die $\langle T'^2 \rangle$ klein sind und entsprechend weniger im Wellenzahlenbereich ausgedehnt sind.

Mit diesem Kapitel ist der theoretische Teil des Schließungsproblems für das isotrope Temperaturfeinstrukturmodell abgeschlossen. Der Faktor ${}^j C_T$ konnte auf theoretischem Wege gefunden werden. Er ist ein reiner Geometriefaktor. Die Konstante C_{T2} konnte nur unter Zuhilfenahme einiger, wenn auch unwesentlicher Annahmen berechnet werden, die sich durch das Auftreten des Korrekturfaktors γ_T äußern. γ_T ist von der Größenordnung eins. Sein exakter Wert muß numero-empirisch ermittelt werden. C_{T2} ist ein gemischter, geometrisch-physikalischer Faktor, gekennzeichnet durch die einzig relevanten empirischen Konstanten α und β (3-53,41).

3.2.2.4 Numerische Ergebnisse für die Temperaturfeinstrukturkonstanten

${}^j C_T$:

Die mit den in Tab. 5 angegebenen DT1-Ergebnissen und den entsprechenden Teilergebnissen DT1_j berechneten Feinstrukturkonstanten ${}^j C_T$ sind in Tabelle 6 angegeben. Bei isotropem Maschennetz sind keine Korrekturen erforderlich; alle ${}^j C_T$ sind = 1. Beim Ringspaltmaschennetz zeigen die ${}^j C_T$ ein unterschiedliches Verhalten: ${}^1 C_T$ ist größer 1 und hat seinen Maximalwert an der Innenwand. Nach außen hin nimmt es ab. ${}^2 C_T$ ist an der Innenwand nur kaum größer als 1 und steigt nach außen hin stark an und ${}^3 C_T$ ist kleiner als 1 und sinkt zur Außenwand hin weiter ab. Daß ${}^2 C_T$ am stärksten vom Radius abhängt ist offensichtlich ein Zeichen dafür, daß die Vergrößerung des Abstandsvektors Δx_j , über den die Gradienten gebildet werden, stärkeren Einfluß hat als die Änderung der Mittelungsfläche ${}^j F$, die die Änderungen in ${}^1 C_T$ und ${}^3 C_T$ bewirkt.

C_{T2} :

Für die Berechnung der Konstanten C_{T2} müssen die experimentell zu ermittelnden Konstanten α und β bekannt sein. Für diese werden nach (A4-21) und (A4-26) die Werte $\alpha = 1,5$ und $\beta = 1,3$ benutzt. Die damit berechneten C_{T2} -Werte sind für $Pr = 1$ und $Re = 240\ 000$ ebenfalls in Tab. 6 eingetragen. Sie zeigen kaum eine Abhängigkeit vom Maschennetz und haben Werte von 0,18 bei isotropem Netz bis 0,17 an der Außenwand des Ringspalt. Die Wandabstandsabhängigkeit von $\langle \epsilon \rangle$ hat praktisch keinen Einfluß auf den Verlauf von C_{T2} .

Anders verhält sich das zweite Beispiel für C_{T2} in Tabelle 6, das für $Re = 70\ 000$ und $Pr = 0,02$ (flüssiges Quecksilber) für denselben, jedoch in Ψ -Richtung (x_2) um den Faktor 3 besser aufgelösten Ringspalt berechnet wurde. Hier wird C_{T2} durch den Subtrahenden im Zähler von (3-55) bestimmt. Die ortsabhängige Dissipation bewirkt den Anstieg von C_{T2} zu den Wänden hin, entsprechend der Zunahme des Feinstrukturanteils der Temperaturschwankungen, und die $h^{-4/3}$ -Abhängigkeit bewirkt entsprechend der schlechteren Auflösung an der Außenwand den gegenüber der Innenwand höheren C_{T2} -Wert an der Außenwand.

Pr_{tSGS} :

Zusammen mit dem im Kapitel 3.3 darzustellenden überarbeiteten Impulsfeinstrukturmodell von Schumann [1973a, 1975a] und der dort vorkommenden, zu C_{T2} analogen Konstanten C_2 (3-80) kann eine turbulente Prandtl-Zahl Pr_{tSGS} für den isotropen Feinstrukturanteil definiert werden (SGS = sub-grid scale):

$$Pr_{tSGS} = \left(\frac{\langle \epsilon_M \rangle}{\langle \epsilon_H \rangle} \right)_{SGS} \approx C_2 / C_{T2} \quad (3-59)$$

$\epsilon_{m,H}$ sind die turbulenten Austauschgrößen für Impuls und Wärme. Pr_{tSGS} ist beim isotropen Netz (siehe Tab. 6) ca. 0,41 und steigt beim Ringspalt mit $Pe_\tau = 10^4$ von innen nach außen auf ca. 0,50 an. Dieser Anstieg verläuft parallel zur Vergrößerung der Maschen und gibt damit die Tendenz wieder, daß bei größer werdenden Maschen wegen des Grenzüberganges der direkten numerischen Simulation zum statistischen Turbulenzmodell sich die turbulente Prandtl-Zahl der Feinstruktur derjenigen der Grobstruktur (bei $Pr = 1$ ist $Pr_t \approx 0,7 - 0,9$ [z.B. Kader, Yaglom 1972]) annähert.

Für den Fall des Flüssigmetalls ist bei $Pe_\tau = 70$ wegen der sehr guten Auflösung und wegen C_{T2} nahe Null die turbulente Prandtl-Zahl der Feinstruktur in Kanalmitte sehr groß. Aus demselben Grund zeigt es an der Außenwand noch nicht den Übergang zum Grobstrukturwert $Pr_t \approx 1$ [Dwyer u.a. 1976].

Zum Vergleich geeignete Werte für Pr_{tSGS} liegen bisher nur für molekulare Prandtl-Zahlen um eins vor. So hat Kraichnan [1966] theoretisch einen Wert von 0,12 abgeleitet. Dieser Wert muß als viel zu klein angesehen werden, da Kraichnan von seinem viel zu klein errechneten Wert $\beta = 0,208$ (Tab. 4) ausgegangen ist. Deardorff [1971] hat für seine Rechnungen den Wert $Pr_{tSGS} = 1/3 = 0,33$ verwendet. Er kam zu dem Ergebnis, daß 1/3 zu

klein ist, aber $1/2$ auch schon zu groß. Diese Aussagen können jedoch entscheidend durch den von Deardorff verwendeten Ansatz beeinflusst worden sein, bei dem zur Berechnung des turbulenten Transportes in der Feinstruktur die Gradienten des gesamten Feldes und nicht die um die Gradienten des zeitlich gemittelten Feldes reduzierten Gradienten des Grobstrukturfeldes benutzt werden. 1972 berichtete er ähnlich [Fox, Deardorff 1972], daß nämlich $Pr_{tSGS} = 1/3$ zwar zu klein sei, daß er aber aus modellspezifischen Gründen keinen wesentlich von $1/3$ verschiedenen Wert verwenden könne. 1973 legte Deardorff [1973b] dann bei Rechnungen mit einem 15-Gleichungen-Modell durch die Wahl der Konstanten indirekt einen Wert $Pr_{tSGS} = 0,4$ zugrunde und erreichte damit bessere Übereinstimmung mit Meßwerten. Wie man für isotrope Turbulenz aus den Spektren der Geschwindigkeits- und Temperaturschwankungen im Trägheitsbereich für die Feinstruktur eine turbulente Prandtl-Zahl ableitet, zeigte Schumann [Schumann 1973c, Grötzbach, Lörcher, Schumann 1974]. Korrigiert man seine Abschätzung unter Beachtung von Gleichung (A4-16) und führt für β den Wert 1,3 ein, dann führt das zu $Pr_{tSGS} = 0,435$.

Insgesamt gesehen bestätigt das hier angegebene und theoretisch abgeleitete Feinstrukturmodell für turbulente Temperaturschwankungen die bisherigen Erfahrungswerte für die turbulente Prandtl-Zahl der Feinstruktur. Es stellt allerdings bei der Anwendung auf Kanalströmungen, auf anisotrope Maschenetze und auf kleine Peclet-Zahlen einen entscheidenden Schritt vorwärts dar.

3.2.3 Dämpfungsfunktion des inhomogenen Modells

Das inhomogene Feinstrukturmodell nach Kapitel 3.2.1.3 enthält als einzige Unbekannte die Dämpfungsfunktion $f_H(h^n)$, (siehe (3-13)). Diese Funktion hat zwei Aufgaben zu erfüllen: Zum einen muß sie die bestimmende Modellkonstante beinhalten, die angibt, welcher Anteil des gesamten turbulenten Wärmestroms $3 \frac{u^v T^v}{3}$ durch diesen Modellanteil simuliert werden muß, und zum anderen muß sie angeben, wie dieser Anteil vom Auflösungsvermögen Δx_j in den drei Maschennetzrichtungen abhängt.

3.2.3.1 Maschennetzabhängigkeit

Zunächst zur prinzipiellen Maschennetzabhängigkeit. Man mag die Hoffnung haben, daß man hierzu einige Angaben dadurch gewinnen kann, daß man die Methoden des Anhangs 4 hier sinngemäß anwendet und aus den Spektren $E_{T3}(k)$ der turbulenten Wärmeströme die Korrelation $R_{T3}(r)$ analog zu (A4-32) berechnet. Dies führt jedoch aus mehreren, teilweise schwerwiegenden Gründen nicht zum Ziel. So müßte man, um überhaupt zu berechenbaren Verhältnissen zu kommen, z.B. annehmen, daß auf dieses "inhomogene" Modell die theoretischen Hilfsmittel "homogener" Turbulenz angewandt werden dürfen [z.B. nach Hinze 1975]. Und weiter müßte man dann den Berechnungen selbst bei Prandtl-Zahlen um ein Wärmestromenergiespektren E_{T3} zugrunde legen, die als sehr unsicher angesehen werden müssen. Man weiß über diese Spektren letztlich nur mit Sicherheit, daß sie steiler als die Energiespektren E_T abfallen, vielleicht $\sim k^{-8/3}$ oder $\sim k^{-3}$ [z.B. nach Bremhorst, Bullock 1970, Freymuth, Uberoi 1971, Phelps, Pond 1971, Lawn, White 1972, Kaimal et al. 1972, Wyngard, Coté 1972, Monin, Yaglom 1975]. Es darf nicht verwundern, daß gerade für diese beiden Steigungen die analog zu (A4-10) auszuführenden Integrale (siehe 3-86) entweder physikalisch nicht verifizierbare oder aber überhaupt keine Ergebnisse liefern, weil die Integrale nicht existent sind. Dieser Weg wird daher nicht näher beschrieben.

Es wird vielmehr der Einfachheit halber angenommen, daß, was durchaus korrekt sein kann, der inhomogene Anteil, ebenso wie der isotrope Modellanteil nach (3-9), mit $j_F^{1/2}$ oder aber mit h variiert:

$$f(h^n) \sim h^n \quad \text{mit } n = 1 \quad (3-60)$$

Die Maschennetzanisotropie wird dann gemäß folgender Plausibilitätsüberlegung berücksichtigt: Der inhomogene turbulente Wärmestrom $\langle \overline{u_3' T'} \rangle$ ist das Ergebnis der Geschwindigkeits- und Temperaturschwankungen innerhalb der Feinstruktur. Für diese wird folgende Proportionalität

$$\begin{aligned} \overline{u_3'} &\sim F^{1/2} \\ \overline{T'} &\sim (F \cdot \Delta x_3)^{1/3} = V^{1/3} \end{aligned} \quad (3-61)$$

angenommen. Faßt man beide Proportionalitäten zusammen und berücksichtigt (3-60), dann kann man z.B. den hier verwendeten Ansatz machen:

$$\langle \overline{\mu_3' T'} \rangle \sim \left({}^3F \Delta x_3 \right)^{1/5} \quad (3-62)$$

Dieser Ansatz ist bei isotropem Netz identisch mit (3-60). Bei anisotropem Netz zeigt der Ansatz entsprechend der Definition des Wärmestromes als Mittelwert über die Fläche 3F eine starke Abhängigkeit von dieser. Er zeigt aber auch eine Abhängigkeit von Δx_3 , was wegen der Abhängigkeit der Feinstrukturschwankungen $T' = T - \overline{T}$ von allen drei Maschenweiten unbedingt erforderlich ist.

3.2.3.2 Bestimmung der Modellkonstanten

Geht man von der Maschennetzabhängigkeit (3-62) der Dämpfungsfunktion $f_H(h^n)$ aus, berücksichtigt daß f_H dimensionslos sein muß und beachtet auch die Abhängigkeit des inhomogenen Temperaturfeinstrukturmodells über den Mischungs-
weg 1 nach (3-13) vom Geschwindigkeitsfeld, dann kann folgender Ansatz für die Dämpfungsfunktion eingeführt werden:

$$f_H(h^n) = \text{Min} \left(1, (C_{10} C_{T10})^{1/2} ({}^3F \Delta x_3)^{1/5} / F_{T0}^{1/2} \right) \quad (3-63)$$

Darin ist C_{10} die Konstante des inhomogenen Impulsfeinstrukturmodells nach Kapitel 3.3.4, also hier keine freie Konstante, und C_{T10} die bestimmende Modellkonstante.

Bei der Formulierung von (3-63) wurde eine Besonderheit des hier gewählten inhomogenen Modells berücksichtigt, die bei geeigneter Wahl der Normierungsfläche F_{T0} eine einfache Abschätzung von $C_{10} \cdot C_{T10}$ erlaubt. Denn das Modell unterscheidet sich nach (3-13) nur durch den Faktor $f_H(h^n)$ von dem ursprünglichen "statistischen Turbulenzmodell" von Gebeci [1973]. D.h. für $f_H(h^n) = 1$ ist der inhomogene turbulente Wärmestrom $\langle \overline{u_3' T'} \rangle$, und damit die turbulente Wärmeleitfähigkeit α_t^* , so groß, daß der gesamte turbulente Wärmestrom durch das inhomogene Modell übernommen wird. Dieser Grenzfall kann nach dem Ergodentheorem nur dann eintreten, wenn gilt:

$$\langle \mu_3' T' \rangle \equiv \langle \overline{\mu_3' T'} \rangle \equiv \overline{\mu_3' T'} \quad (3-64)$$

d.h. wenn die 3F -Fläche so groß geworden ist, daß der Mittelwert über die 3F -Fläche identisch ist mit dem Zeit- oder Ensemblemittelwert an jeder Stelle dieser Fläche. Wählt man jetzt für F_{T_0} diese Grenzfläche 3F nach (3-64), dann ist wegen (3-63,64) $C_{1_0} \cdot C_{T_{1_0}} \approx 1$ und F_{T_0} kann aus der Korrelation

$$R_{3T}(\Delta x_1, \Delta x_2) = \frac{\langle u_3'(x_1, x_2) \cdot T'(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \rangle}{\langle u_3'(x_1, x_2) \cdot T'(x_1, x_2) \rangle} \quad (3-65)$$

abgeleitet werden, wenn man annimmt, daß R_{3T} außerhalb dieser Fläche den Wert Null annimmt, d.h. keine Abhängigkeit zwischen u_3' und T' mehr vorliegt. Leider ist in Kanalströmungen R_{3T} nur als $f(\Delta x_1)$ über einen sehr kurzen Δx_1 -Bereich bekannt [Bremhorst, Bullock 1970], so daß die Grenzfläche F_{T_0} nicht bestimmt werden kann.

Eine andere Möglichkeit F_{T_0} zu approximieren ist z.B., die beiden Flächen zu ermitteln, über die $R_{33}(\Delta x_1, \Delta x_2)$ und $R_{TT}(\Delta x_1, \Delta x_2)$ gerade Null werden, und beide Flächen anschließend in geeigneter Weise zu F_{T_0} zusammenzufassen. Aber auch dieser Ansatz muß beim derzeitigen Stand der Kenntnis über $R_{TT}(\Delta x_1, \Delta x_2)$ in Kanalströmungen scheitern, da nicht genügend verallgemeinerungsfähige oder konsistente Ergebnisse bekannt sind. Als Beispiele sollen hier nur die Ergebnisse für $Pr \geq 1$ von Nishihara, Ohtsubo [1969], Bobkov u.a. [1970] und Shlanchnauskas [1973] genannt werden, und für $Pr \ll 1$ die Ergebnisse von Fuchs [1973], Genin u.a. [1974], Sviridov u.a. [1975a] und Benkert u.a. [1975]. Die Ergebnisse bezüglich R_{33} müssen auch als unvollständig angesehen werden, z.B. die nach Comte-Bellot [1965] und Sabot, Comte-Bellot [1976].

Als Notlösung wird hier F_{T_0} nicht aus Temperaturkorrelationen bestimmt, sondern aus der nicht ganz relevanten, aber dafür besser bekannten Korrelation R_{11} der u_1 -Fluktuationen, z.B. nach Laufer [1951], Comte-Bellot [1965] und Lawn [1970]. Nach Comte-Bellot erhält man:

$$F_{T_0} = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 = 1,6 \cdot 0,8 = 1,28 \quad (3-66)$$

Aus diesem Wert ist zu ersehen, daß der Grenzfall des statistischen Turbulenzmodells erst dann erreicht wird, wenn der ganze Kanal durch nur eine einzige Masche aufgelöst wird. Damit ist die in (3-63) eingeführte, für diesen Fall vorgesehene Minimumfunktion ohne praktische Bedeutung.

Bei der Verwendung der Normierungsfläche nach (3-66) muß man sich vor Augen halten, daß zum einen nach Comte-Bellot [1965] R_{11} über größere Strecken Δx_1 korreliert ist als R_{33} , was auf einen Wert von $C_{10} \cdot C_{T10} \geq 1$ schließen läßt, und zum anderen, daß dadurch, daß keine Temperaturkorrelationen verwendet werden, keine Abhängigkeit von F_{T0} von der Prandtl-Zahl auftritt. Das letztere führt wegen der Zunahme von F_{T0} mit abnehmender Prandtl-Zahl nicht zu einer ausreichenden Reduktion des Einflusses des inhomogenen Modells. Die Reduktion wird in der hier aufgezeigten Formulierung nur durch $B_w(\text{Pr})$ im thermischen Mischungsweg l_H nach (3-22) herbeigeführt. Umgangen werden kann das Problem dadurch, daß dann, wenn C_{T2} über weite Teile des Kanals den Wert Null annimmt, daß dann auch $C_{T10} = 0$ sein muß. In allen anderen Fällen wird C_{T10} (ebenso C_{10}) auf einem festen Wert festgehalten, der durch numerische Experimente ermittelt wird (siehe Kap. 6). Dieses Vorgehen hat sich bei fast allen bisherigen Rechnungen bewährt.

3.3 Impulsfeinstrukturmodell

In diesem Kapitel wird das Schließungsproblem der Impulsgleichungen (2-41) durch Einführen einer überarbeiteten und verbesserten Version des Impulsfeinstrukturmodells von Schumann [1973a] behoben. Es wird dabei ausdrücklich darauf verzichtet, dieses Modell ausführlich herzuleiten und zu begründen, da die Gedankengänge bei der Schließung der Temperaturgleichung und der Impulsgleichungen äquivalent sind. Das Modell wird hier nur insoweit angegeben, als dies der Vollständigkeit halber und zum besseren Verständnis der Korrekturen und Erweiterungen notwendig ist. Die durchgeführten Korrekturen betreffen kleinere formale Änderungen der Definitionsgleichungen einiger Konstanten und die Beseitigung einiger Inkonsistenzen. Besonders letzteres führt zu neuen, physikalisch sinnvolleren numerischen Ergebnissen für die Feinstrukturkonstanten. Für das inhomogene Modell wird ein neuer Ansatz eingeführt, der besonders bei schlecht auflösenden Maschennetzen und rauhen Wänden dem Schumann'schen Modell überlegen ist.

3.3.1 Ansätze für das Impulsfeinstrukturmodell

Die in den Impulsgleichungen (2-41) unbekanntem Oberflächenspannungen $\overline{j u_i^* u_j^*}$ werden zunächst formal aufgespalten in einen isotropen (I) und in einen inhomogenen Anteil (II):

$$\overline{\delta u_i' u_j'} = \underbrace{\left(\overline{\delta u_i' u_j'} - \langle \overline{\delta u_i' u_j'} \rangle \right)}_I + \underbrace{\langle \overline{\delta u_i' u_j'} \rangle}_{II} \quad (3-67)$$

Für beide Anteile wird anschließend der Boussinesq-Ansatz eingeführt:

$$\overline{\delta u_i' u_j'} = -\overset{ij}{\mu} \left(\overline{D_{ij}'} - \langle \overline{D_{ij}'} \rangle \right) - \overset{ij}{\mu}^* \langle \overline{D_{ij}'} \rangle \quad (3-68)$$

mit

$$\overline{D_{ij}'} = \delta_j \overline{u_i'} + \delta_i \overline{u_j'} \quad (3-69)$$

Für die isotrope turbulente Zähigkeit $\overset{ij}{\mu}$ wird folgender Ansatz vom Typ des Prandtl'schen Energiemodells benutzt:

$$\overset{ij}{\mu} = C_2 \overset{ij}{C} \left(\overset{j}{F} \overline{\delta E'} \right)^{1/2} \quad (3-70)$$

C_2 ist die bestimmende Modellkonstante, $\overset{ij}{C}$ ein Maschennetzgeometriefaktor, $\overset{j}{F}$ die Oberfläche einer Masche. $\overline{\delta E'}$ ist die Energie innerhalb der nicht aufgelösten Feinstruktur. Sie wird nach (3-10) aus $\overline{v E'}$ berechnet, für das eine eigene Transportgleichung gelöst wird (siehe Kap. 3.4).

Der neue Ansatz für die inhomogene turbulente Zähigkeit wird in Abschnitt 3.3.4 beschrieben.

3.3.2 Berechnung der Konstanten im isotropen Modell

Die im isotropen Modell (3-70) auftretenden Konstanten C_2 , $\overset{ij}{C}$ und $\overset{j}{C}_5$ (nach (3-10)) werden ebenso wie die Konstanten des Temperaturfeinstrukturmodells mit den mathematischen Hilfsmitteln der Theorie isotroper Turbulenz berechnet.

$\overset{j}{C}_5$:

Der Faktor $\overset{j}{C}_5$ kann aus der Definitionsgleichung nach (3-10) durch zeitliche Mittelwertbildung bestimmt werden:

$$\overset{j}{C}_5 = \langle \overline{\delta E'} \rangle / \langle \overline{v E'} \rangle \quad (3-71)$$

$\langle \overline{\delta E'} \rangle$ und $\langle \overline{v E'} \rangle$ können über die Autokorrelationen $R_{ii}(\tau)$ der Geschwindigkeitsfluktuationen aus dem Kolmogorov-Spektrum (3-52) nach (3-51) (und deren Verallgemeinerung) berechnet werden. $\overset{j}{C}_5$ erweist sich dabei als reine Geometriegröße, die nur von der Maschennetzgeometrie abhängig ist.

ij_C:

Ebenso erweist sich auch der Maschennetzanisotropiefaktor ^{ij}j_C, der aus demselben Grund wie ^jj_{C_T} nach (3-11) eingeführt wurde, als nur vom Maschennetz abhängig, denn wegen der Definition als Verhältnis von [Schumann 1975a]

$$i_j^i = \frac{\langle {}_{13}\bar{D}_{ij}^2 \rangle}{\langle {}_{13}\bar{D}_{[i][j]}^2 \rangle} \cdot \frac{\langle D_{[i][j]}^2 \rangle}{\langle D_{ij}^2 \rangle} \quad (3-72)$$

mit dem Deformationsgeschwindigkeitsquadrat

$$D_{ij}^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 = 2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3-73)$$

und einer der möglichen Differenzendarstellungen

$$\langle {}_{13}\bar{D}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (\delta_{ij}^i u_j^i + \delta_{ij}^i u_i^j)^2 \rangle (1 - \delta_{ij}) + 2 \langle (\delta_{ij}^i u_i^j)^2 \rangle \delta_{ij} \quad (3-74)$$

kürzen sich beim Ausmultiplizieren der Differenzenformeln von ¹³D̄ und beim Einsetzen der Volumenkorrelationen (analog zu (3-36))

$$\begin{aligned} \langle u_i^k(x) \cdot u_j^l(x + \underline{\Delta x}) \rangle &= R(u_i^k, u_j^l, V, V, \underline{\Delta x}) \\ &= \iiint \psi_{kl}(\underline{z}) \cdot R_{ij}(\underline{z} - \underline{\Delta x}) dV(\underline{z}) \end{aligned} \quad (3-75)$$

mit

$$R_{ij}(\underline{r}) = -\frac{18}{55} \alpha T^{1/3} \langle \epsilon \rangle^{2/3} \cdot \begin{cases} r^{4/3} (1 - r_{ij}^2 / (4r^2)) + R_{ij}(0) & i=j \\ r_i r_j / (4 + \sqrt{3}) & i \neq j \end{cases} \quad (3-76)$$

$$\text{und } r = (r_i r_j)^{1/2}$$

die physikalischen Größen α und <ε> heraus. Die zweifache arithmetische Mittelung in (3-74) folgt aus der Anwendung von (3-73) auf ein "staggered grid".

Die ausgeschriebenen Differenzenformeln zu (3-74) und die zugehörigen Volumen- bzw. Flächenintegrale (3-75) sind bei Schumann [1973a] angegeben. Es muß allerdings beachtet werden, daß wegen (3-76) und dem bei Schumann angegebenen (A2-40) die Vorzeichen der dort als d₄(D4) und d₅(D5) bezeichneten Volumenkorrelationen zu ändern sind. (Von der Verwendung der dort in Tab. 7 angegebenen Fortran-Funktionen sollte wegen mehrerer Unstimmigkeiten abgesehen werden!)

Für den differentiellen Teil von ^{ij}C nach (3-72) gilt bei isotroper Turbulenz [Hinze 1959]:

$$\frac{\langle D_{Ei} E_i^2 \rangle}{\langle D_{ij}^2 \rangle} = \begin{cases} 2/15 & i=j \\ 1/10 & i \neq j \end{cases} \quad (3-77)$$

Damit ist es gelungen, die Faktoren jC_5 und ^{ij}C ohne jede empirische Unterstützung zu berechnen.

C₂:

Bei der Herleitung der Bestimmungsgleichung für C₂ wird wie bei der Herleitung von C_{T2} in Kapitel 3.2.2 vorgegangen. D.h. eine Bestimmungsgleichung für C₂ wird durch Einsetzen des isotropen Feinstrukturmodells in die Erhaltungsgleichung für die durch das Maschennetz nicht aufgelöste Energie $\overline{vE'}$ abgeleitet. Hier wird folgende, von Schumann [1973a] abgeleitete und hier leicht modifizierte Gleichung benutzt (Mittelung in der Grobstrukturdissipation):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{(u_i - \overline{u_i})^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{vE'} \\ &= - \delta_j^i \left(\overline{u_j^i E'} \right) \\ &\quad - \overline{u_i^i u_j^i} \delta_j^i \overline{u_i^i} \\ &\quad + \delta_j^i \left\{ \overline{v \frac{\partial E'}{\partial x_j}} + \overline{u_i^i \frac{\partial u_j^i}{\partial x_i}} - \overline{u_i^i \frac{\partial u_j^i}{\partial x_i}} - \overline{u_j^i E'} - \overline{u_j^i p'} \right\} \\ &\quad + \overline{v} \left\{ \delta_j^i \overline{u_i^i} \left(\overline{\delta_j^i u_i^i} + \overline{\delta_i^i u_j^i} \right) \right\} - \overline{vE'} \end{aligned} \quad (3-78)$$

Die Bedeutung der Terme wird wie in (A3-9) zugeordnet, d.h. von oben nach unten gelesen: Zeitliche Änderung = - Konvektion + Produktion + Diffusion + Grobstrukturdissipation - Gesamtdissipation. Das Einsetzen des isotropen Anteils von (3-68) und des Ansatzes (3-70) in den Produktionsterm von (3-78) führt nach zeitlicher Mittelung und Mittelung über das Kanalvolumen (analog zu (3-26)) auf:

$$C_2 = \frac{\langle \overline{\varepsilon} \rangle - \sqrt{\overline{\varepsilon}} \langle {}_{12}\overline{D}^2 \rangle}{\langle \overline{\varepsilon} (\overline{\varepsilon})^{1/2} (\delta_j^i \overline{u}_i + \delta_i^j \overline{u}_j) \rangle \delta_j^i \overline{u}_i} \quad (3-79)$$

Wegen der hier nicht berechenbaren Triplekorrelationen im Nenner wird (3-79) durch Einführen des Korrekturfaktors γ_1 auf berechenbare Verhältnisse vereinfacht. γ_1 ist, ebenso wie γ_T in (3-28), von der Größe $\gamma_1 \geq 1$. Die endgültige Formulierung für C_2 ist damit:

$$C_2 = \frac{\langle \overline{\varepsilon} \rangle - \sqrt{\overline{\varepsilon}} \langle {}_{12}\overline{D}^2 \rangle}{\gamma_1 \overline{\varepsilon} \overline{F}^{1/2} \langle \overline{\varepsilon} \rangle^{1/2} \langle {}_{12}\overline{D}^2 \rangle} \quad (3-80)$$

mit

$$\langle {}_{12}\overline{D}^2 \rangle = \langle (\delta_j^i \overline{u}_i + \delta_i^j \overline{u}_j) \delta_j^i \overline{u}_i \rangle \quad (3-81)$$

Der Wert von C_2 wird (wie der von C_{T2} im Kapitel 3.2.2.2) mit den Mitteln der Theorie isotroper Turbulenz berechnet. Dazu werden wieder die Differenzenformeln in (3-81) ausgeschrieben und ausmultipliziert und die dabei erscheinenden Zweipunktkorrelationen von Flächenmittelwerten (3-75) mit den Zweipunktkorrelationen für Kolmogorov-Spektren (3-76) berechnet. Als Ergebnis erhält man nach Normierung aller Längen auf die Maschenweite h (einschließlich \overline{F}):

$$C_2 = \frac{1 - \sqrt{\alpha} T(1/3) \frac{18}{55} h^{-4/3} \langle \overline{\varepsilon} \rangle^{-1/3} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D12_{ij} \right)}{\gamma_1 \left(\alpha T(1/3) \right)^{3/2} \frac{18}{55} \left(\frac{9}{20} \right)^{1/2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \overline{\varepsilon} (\overline{F} \text{ENERGZ}(j))^{1/2} D12_{ij} \right\}} \quad (3-82)$$

Die zur Verkürzung der Schreibweise eingeführte Größe $D12_{ij}$ enthält verschiedene Volumenintegrale vom Typ (3-75). Sie ist durch (3-81) und (3-76) wie folgt definiert:

$$\langle {}_{12}\overline{D}^2 \rangle = - \frac{18}{55} \alpha T(1/3) \langle \overline{\varepsilon} \rangle^{2/3} h^{-4/3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D12_{ij} \quad (3-83)$$

Die ausführlichen Differenzenformeln für $\langle {}_{12}\overline{D}^2 \rangle$ können, unter demselben Vorbehalt wie bei $\langle {}_{13}\overline{D}^2 \rangle$, bei Schumann [1973a] entnommen werden.

Da für C_2 nach Gleichung (3-82) dasselbe gilt wie für C_{T2} nach (3-55) im Falle $Pr \approx 1$, d.h., daß der Subtrahend im Zähler wesentlich kleiner als eins ist, kann für die Dissipation die Approximation nach (3-56) benutzt werden. Damit enthält C_2 als einzig relevante empirische Größe die Kolmogorov-Konstante α , die nach Tab. 3 recht gut bekannt ist und den Korrekturfaktor γ_1

von der Größe $\gamma_1 \geq 1$, der durch numerische Experimente näher ermittelt werden muß.

3.3.3 Numerische Ergebnisse

Die neuen, durch numerische Integration der Volumenintegrale ermittelten Werte für $\langle {}_{12}\overline{D}^2 \rangle$ und $\langle {}_{13}\overline{D}^2 \rangle$ sind in Tab. 7 für zwei Maschennetze zusammengefaßt. Beide zeigen, wie auch DT1 und DT2, nur eine geringe Empfindlichkeit gegenüber Maschennetzänderungen. Ihr absoluter Wert ist gegenüber den früheren Ergebnissen [Schumann 1973a, (4-41)] auf ca. das 1,3 bzw. 2,9-fache angestiegen.

Die Vergrößerung von $\langle {}_{12}\overline{D}^2 \rangle$ und die hier bei der numerischen Auswertung konsistente Berücksichtigung von ${}^{ij}C$ im Nenner von C_2 nach (3-82) ergeben für C_2 gegenüber den früheren Rechnungen kleinere Werte (Tab. 8). Die Änderungen von C_2 um den Faktor 2 bzw. 1,3 sind zwar in bezug auf den theoretischen Wert des Feinstrukturmodells relevant, so hätten z.B. die früheren Werte keine vergleichbaren turbulenten Prandtl-Zahlen Pr_{tSGS} für die Feinstruktur geliefert (Kap. 3.2.2.4), aber die Änderungen sind nur von geringem praktischen Wert, da sie lediglich zu einer Reduktion des von Schumann angegebenen Wertes $\gamma_1 = 3$ führen (bezogen auf die Näherungslösungen).

Welchen Einfluß die näherungsweise Vertauschung der ${}^{ii}C$ und ${}^{ij}C$ (siehe Tab. 8) auf die numerisch simulierten Geschwindigkeitsfelder hat, ist schwer abzuschätzen. Es muß angenommen werden, daß diese Änderungen nur zu physikalisch sinnvolleren Werten für die Konstanten führen und in der Praxis aber höchstens bei sehr stark anisotropen Maschennetzen einen Einfluß zeigen werden.

Von entscheidender Bedeutung ist dagegen die Verringerung von C_{20} (3-94) für den Produktionsterm der Feinstrukturenergiegleichung. Die früher benutzten C_{20} -Werte waren um den Faktor 2,2 zu groß. Man kann jetzt durch die Verringerung von C_{20} und C_2 erwarten, daß der Korrekturfaktor γ_1 von dem bisher unerklärlichen Wert 3 auf einen Wert zwischen 1 und 2 absinken wird.

Der hier neu angegebene Feinstrukturkonstantensatz läßt speziell bei schlecht auflösenden Maschennetzen, d.h. bei starker Abhängigkeit vom Feinstrukturmodell,

eine wesentliche Anhebung der Qualität der numerisch simulierten Geschwindigkeitsfelder erwarten, insbesondere dann, wenn nicht die Näherungslösungen für die Volumenintegrale benutzt werden, sondern die aufwendigere numerische Integration.

3.3.4 Der inhomogene Modellanteil

Da bei den betrachteten Kanalströmungen die Geschwindigkeitsfelder nur in der u_1 -Komponente und nur in der x_3 -Richtung stärkere Inhomogenitäten aufweisen, wird das inhomogene Modell beschränkt auf $^{13}\mu^*$ (aus (3-68)):

$${}^i_j \mu^* \equiv 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} i \neq 1 \\ j \neq 3 \end{cases} \quad (3-84)$$

Der neu eingeführte Ansatz, der analog zu (3-13) gemacht wird, berücksichtigt dies:

$${}^i_j \mu^* = \delta_{1i} \delta_{3j} \ell^2 |\delta_3 \langle \overline{u_1} \rangle| f(h^n) \quad (3-85)$$

Darin ist δ_{ij} das Kronecker-Delta, ℓ der Mischungsweg nach (3-16,14) und $f(h^n)$ die die Maschennetzabhängigkeit berücksichtigende Dämpfungsfunktion.

Für den inhomogenen Anteil $^{13}\mu^*$ wird der neue Ansatz (3-85) eingeführt, weil der früher verwendete Ansatz [Schumann 1973a] den Nachteil hat, daß bei fast allen Punkten der verwendeten Maschennetze die nur grob bestimmbare Modellkonstante bestimmend ist. Bei der Vorgabe rauher Wände kommt erschwerend hinzu, daß ℓ über A_w mit zunehmender Rauigkeit im Wandbereich größer wird [van Driest 1956, Yaglom, Kader 1974, Grötzbach 1974], aber im alten Modell keinen Einfluß auf $^{13}\mu^*$ hat. Außerdem ist zu erwarten, daß $^{13}\mu^*$ nicht proportional zu 3F ist, sondern, analog zum isotropen Modell, zumindest proportional $^3F^{1/2}$. Dies wird in Analogie zum inhomogenen Temperaturmodell nach Kapitel 3.2.3.1 angenommen. Auch hier gelingt es nicht, wenigstens über die Theorie "homogener" Turbulenz und die existierenden Daten für die Schubspannungsenergiespektren $E_{13}(k)$ für Kanalströmungen z.B. nach Laufer [1951], Lawn [1970, 1971], Lawn, White [1972], Hanjalić, Launder [1972], Bremhorst u.a. [1973a,b], Blinco, Simons [1975] und Szablewski [1976] diese Annahme durch Integration von [Hinze 1975]

$$R_{13}(r) = 4\pi \int_0^{\infty} k^2 \frac{\sin(kr)}{kr} E_{13}(k) dk \quad (3-86)$$

zu untermauern. Die alleinige Proportionalität zu ${}^3F^{1/2}$ ist allerdings auch nicht korrekt, da dies bedeuten würde, daß eine alleinige Verfeinerung des Maschennetzes in radialer (3) Richtung keinen Einfluß auf die nicht aufgelöste Feinstruktur hätte. Ein verbesserter Ansatz für die Maschennetzabhängigkeit kann aus folgender Betrachtung abgeleitet werden:

Die turbulente Schubspannung setzt sich aus dem Grobstruktur- und dem Feinstrukturanteil zusammen:

$$\langle u'_1 u'_3 \rangle = \langle \overline{u'_1} \overline{u'_3} \rangle + \langle \overline{u'_1 u'_3} \rangle \quad (3-87)$$

Der Grobstrukturanteil ist abhängig von der Auflösung in jeder der 3 Maschennetzrichtungen, da etwa gilt

$$\begin{aligned} \overline{u'_1} &\sim {}^1F^{-1/2} = (\Delta x_2 \Delta x_3)^{-1/2} \\ \overline{u'_3} &\sim {}^3F^{-1/2} = (\Delta x_1 \Delta x_2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3-88)$$

Für den Feinstrukturanteil muß sich dann natürlich die umgekehrte Tendenz ergeben. Zusammen mit (3-60) ergibt sich z.B.:

$$\langle \overline{u'_1 u'_3} \rangle \sim ({}^1F {}^3F)^{1/4} = (\Delta x_1 \Delta x_2^2 \Delta x_3)^{1/4} \quad (3-89)$$

Diese Abhängigkeit wird im Ansatz der Dämpfungsfunktion $f(h^n)$ des neuen inhomogenen Modells (3-85) berücksichtigt:

$$f(h^n) = \text{Min} \left(1, C_{10} ({}^1F {}^3F)^{1/4} / F_0^{1/2} \right) \quad (3-90)$$

Die Normierungsfläche $F_0^{1/2}$ wird aus Dimensionsgründen eingeführt. Wählt man für F_0 , wie im Kapitel 3.2.3.2 bei F_{T0} , gerade die Fläche 3F , über die die Korrelation $R_{13}(\Delta x)$ zu Null wird, dann muß C_{10} wegen des Ergodentheorems von der Größenordnung eins sein. Da mir zu R_{13} in der 3F -Ebene keine direkten Literaturangaben für Kanalströmungen bekannt sind, wird hier wie bei F_{T0} das nicht ganz relevante R_{11} benutzt. D.h. es gilt mit (3-66):

$$F_0 = F_{T0} = \Delta x_1 \Delta x_2 = 1,6 \cdot 0,8 = 1,28 \quad (3-91)$$

Die Unsicherheiten in der Bezugsgröße F_0 führen hier, wie bei C_{T10} , dazu, daß ein Wert $C_{10} \geq 1$ erwartet werden muß. Der genaue Wert muß durch numerische Experimente ermittelt werden. Daß bei allen Simulationsrechnungen mit den verschiedensten Maschennetzen derselbe Wert erfolgreich benutzt wird, ist ein Zeichen dafür, daß die Dämpfungsfunktion $f(h^n)$ nach (3-90) die Maschennetzabhängigkeit befriedigend wiedergibt. Dies stellt gegenüber dem früheren Modell besonders bei schlecht auflösenden Netzen einen wesentlichen Fortschritt dar.

3.4 Feinstrukturenergiegleichung

In den Schließungsansätzen für die isotrope Feinstrukturabhängigkeit ij_μ nach (3-70) und für die isotrope Feinstrukturtemperaturleitfähigkeit ja_t nach (3-9) wird als Proportionalgröße die orts- und zeitabhängige Energie der Geschwindigkeitsschwankungen innerhalb der Feinstruktur $\overline{jE^T}$ oder, unter Benutzung des Faktors jC_5 nach (3-10,71), $\overline{vE^T}$ benutzt. In diesem Kapitel wird, ausgehend von der von Schumann [1973a, 1975a] angegebenen exakten Energiegleichung (3-78) und der von ihm vereinfachten Modellenergiegleichung für isotrope Strömungen hoher Reynolds-Zahlen der Einfluß der Inhomogenitäten von Kanalturbulenz untersucht (Anhang 5) und entsprechende Erweiterungen in die Modellgleichung eingeführt. Dabei zeigt sich, daß der Einfluß der Abweichungen realer Energiespektren von den Kolmogorov-Spektren für die Werte der Feinstrukturkonstanten nur von geringer Bedeutung ist, daß aber die Wechselwirkung dieser Abweichungen bei den Konstanten im Produktions- und Dissipations-term der Modellgleichung für die Ergebnisse der Modellgleichung, und damit auch für die Ergebnisse der gesamten numerischen Simulation, von entscheidender Bedeutung ist. Die eingeführten Zusatzterme führen bei rauhen Wänden und bei Ringspalten zu physikalisch sinnvolleren Ergebnissen. Außerdem wird durch sie der Anwendungsbereich des Simulationsverfahrens auch auf niedrige Reynolds-Zahlen erweitert, für die die Berechnung der Feinstrukturkonstanten über die Theorie isotroper Turbulenz nicht mehr streng gilt.

3.4.1 Energiegleichungsmodell für isotrope Turbulenz

Die Erhaltungsgleichung für die Energie innerhalb der Maschen wurde bereits als Gleichung (3-78) in ihrer exakten Form angegeben. Will man diese Gleichung

durch Einführen von Korrekturkonstanten, die über die Theorie isotroper Turbulenz berechnet werden können, auf ein staggered grid anwenden und bezüglich des numerischen Aufwandes vereinfachen, dann darf man die Gleichung (3-78) nur auf die Schwankungen

$$\begin{aligned} \overline{u_i''} &= \overline{u_i} - \langle \overline{u_i} \rangle \\ \overline{p''} &= \overline{p} - \langle \overline{p} \rangle \end{aligned} \quad (3-92)$$

beziehen, für die diese Gleichung ebenso exakt erfüllt ist. Alle in diesem Kapitel 3.4 angegebenen Gleichungen beziehen sich nur auf die Schwankungsfelder $\overline{u_i''}$, $\overline{p''}$. Der Einfachheit halber wird jedoch die doppelgestrichene Bezeichnung der Schwankungsgrößen durch ihre ursprüngliche Schreibweise $\overline{u_i}$, \overline{p} ersetzt.

Die von Schumann [1973a] bezüglich des numerischen Aufwandes in Anlehnung an Lilly [1967] vereinfachte Feinstrukturenergiegleichung hat folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{E'}}{\partial t} &= - \delta_j^i \left(\overline{u_j^i} \overline{c_5^i} \overline{E'} \right) \\ &+ c_4 h^i c_{13} \overline{D}^2 \overline{E'}^{1/2} \\ &+ \delta_j^i \left\{ \left(\overline{v^i} \overline{c_5^i} + \overline{c_6^i} \left(\overline{v^i} \overline{E'} \right)^{1/2} \right) \delta_j^i \overline{E'} \right\} \\ &- \frac{c_3}{h} \overline{E'}^{3/2} \end{aligned} \quad (3-93)$$

Um die Korrektur- und Modellkonstanten $\overline{c_5}$, c_4 , $\overline{c_6}$ und c_3 über die Theorie isotroper Turbulenz berechnen zu können, muß man voraussetzen, daß auf das inhomogene Schwankungsfeld $\overline{u_j''}$ die Theorie isotroper Turbulenz angewandt werden kann. Zeitliche Mittelwertbildung und Koeffizientenvergleich mit der exakten Energiegleichung (3-78) führen dann auf die Bestimmungsgleichungen für die Korrekturfaktoren:

$$C_4 = \frac{\langle \delta_F \delta \overline{E'} \rangle^{1/2} \langle {}_{12} \overline{D}^2 \rangle}{h \langle \overline{v E'} \rangle^{1/2} \langle {}_{12} \overline{D}^2 \rangle} \cdot C_2 = C_{20} \cdot C_2$$

$$\delta C_6 = \frac{\langle \delta \overline{u_i \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} - \delta \overline{u_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} - \delta \overline{u_j' E'} - \delta \overline{u_j' \rho'} \rangle}{\langle (\delta_F \overline{v E'})^{1/2} \delta_j \overline{v E'} \rangle} \quad (3-94)$$

$$C_3 = h \frac{\langle \overline{v E'} \rangle}{\langle \overline{v E'}^{3/2} \rangle} \approx \frac{h}{\gamma_2} \cdot \frac{\langle \overline{v E'} \rangle}{\langle \overline{v E'} \rangle^{3/2}}$$

Der Korrekturfaktor γ_2 in der Konstanten C_3 des Dissipationsmodells ist, ebenso wie γ_T in C_{T2} nach (3-28), von der Größenordnung $\gamma_2 \geq 1$. Nach den Erfahrungen von Deardorff [1973b, 1974a] und Schemm [1974] für atmosphärische Turbulenz sollte etwa $C_3 \approx 0,7$ gelten. Hier wird mit Rücksicht auf die neu eingeführten Zusatzterme zur Berücksichtigung der Inhomogenität nach Kapitel 3.4.2 der Wert

$$\gamma_2 = 1,0 \quad (3-95)$$

benutzt, obwohl die numerische Auswertung von C_3 für ein isotropes Maschenetz den Wert $C_3 = 0,634$ liefert.

Die Beiträge, die die einzelnen Terme in (3-93) liefern, sind von unterschiedlicher Größenordnung. Die konvektiven und diffusiven Terme sind z.B. nach den experimentellen Ergebnissen von Laufer [1954], Johnson [1959], Lawn [1970], Lawn, Elliot [1971], Wyngaard, Coté [1971], Hanjalić, Launder [1972] und Hinze [1973] außer in Kanalmitte und bei kleinen Reynolds-Zahlen durchweg eine Größenordnung und mehr kleiner als die bestimmenden Terme Produktion und Dissipation. Hier ist deshalb nur die Modellierung des Produktions- und Dissipationstermes von entscheidender Bedeutung.

Der Produktionsterm, in dem nur der isotrope Anteil von (3-68) berücksichtigt ist, enthält mit C_{20} nur einen geometrieabhängigen Korrekturfaktor, der sich aus der Anwendung des Deformationsgeschwindigkeitsquadrats auf das staggered grid ergibt. C_{20} , und damit auch $C_4 = C_2 \cdot C_{20}$, ist auf bekannte

Weise mit den Gleichungen (3-51) und (3-74,81,83) für Kolmogorov-Spektren berechenbar (siehe Tab. 8).

Die Dissipation kann nicht aus bekannten Grobstrukturwerten berechnet werden, da sie durch die Vorgänge bei hohen Wellenzahlen bestimmt wird. Für sie wurde ein Modell von der Art des bewährten Rotta-Modells [Rotta 1951] eingeführt. Die bestimmende Modellkonstante C_3 kann mit der erweiterten Form von Gleichung (3-51) unter Zuhilfenahme des Korrekturfaktors γ_2 (3-95) auch recht genau über die Theorie isotroper Turbulenz berechnet werden.

Der Faktor \dot{C}_6 , der aus dem Modell für Teile des konvektiven und diffusiven Terms resultiert, beinhaltet das generelle Schließungsproblem der Energiegleichung in Form der Triplekorrelationen $\overline{j u''_j E''}$. Er ist mit der vorliegenden Theorie nicht berechenbar. Als Näherung wird deshalb eine Analogieformulierung mit einer turbulenten Prandtl-Zahl C_7 für $\overline{v E''}$ gewählt:

$$\dot{C}_6 \approx C_7 \dot{C}_5 = 0,3 \cdot \dot{C}_5 \quad (3-96)$$

Diese Annahme spielt wegen der geringen Bedeutung des diffusiven Terms, im Vergleich zum Produktions- und Dissipationsterm, eine untergeordnete Rolle.

3.4.2 Erweiterungen für inhomogene Strömungen

Insgesamt gesehen scheint die Energiegleichung nach (3-93) und (3-94) unproblematisch zu sein. Sie gilt in dieser Formulierung jedoch nur für lokal-isotrope Turbulenz, da sie keinerlei Zusatzterme für die bei den betrachteten Kanalströmungen vorliegenden inhomogenen $\overline{j u''_j}$ -Felder beinhaltet. Und sie gilt weiter nur für hohe Reynolds-Zahlen, weil nur dort das Kolmogorov-Spektrum über einen größeren Wellenzahlenbereich bestimmend ist [Lörcher 1976] und weil nur dort das Rotta-Dissipationsmodell gilt. Die in den früheren Rechnungen beobachteten zu flachen Verläufe $\overline{v E''} = f(r)$ und die zu hohen Geschwindigkeitsschwankungswerte an der inneren Wand von Ringspalten [Schumann 1973a, 1975a,b] werden dominant durch diese Einschränkungen bestimmt.

Eine erste Erweiterung der Energiegleichung für inhomogene Strömungen bietet sich in der zusätzlichen konsistenten Berücksichtigung des inhomogenen Impulsfeinstrukturmodells im Produktionsterm der Energiegleichung an. Im Anhang 5

wird jedoch gezeigt, daß diese Maßnahme dann zu einem sich nicht physikalisch verhaltenden Modell führt, wenn nicht gleichzeitig auch entsprechende Maßnahmen im Dissipationsmodell getroffen werden. Weiter zeigen die Ergebnisse des Anhangs 5, daß die Feinstrukturenergiegleichung der wesentliche Ansatzpunkt ist, um Inhomogenitätseffekte besser zu berücksichtigen. Deshalb werden auch Zusatzterme zum Dissipationsmodell eingeführt.

Da auch das Temperaturfeinstrukturmodell nach (3-9) wesentlich durch die Ergebnisse der Feinstrukturenergiegleichung bestimmt wird, ist es zumindest bei den hier interessierenden molekularen Prandtl-Zahlen $Pr \lesssim 1$ nicht erforderlich, mit ähnlichen Korrekturfaktoren wie (A5-6) reale Spektren zu berücksichtigen. Für $Pr \gg 1$ ist es allerdings denkbar, daß solche Korrekturen eine genauere Bestimmung der Modellkonstanten C_{T2} zulassen.

3.4.2.1 Erweiterung des Produktionstermes

Bei der Einführung von Inhomogenitätseffekten in die isotrope Feinstrukturenergiegleichung wird von der bestehenden Inkonsistenz zwischen Feinstrukturmodell und Energiegleichung ausgegangen. Diese Inkonsistenz besteht darin, daß im Produktionsterm der Feinstrukturenergiegleichung (3-93) für die Oberflächenspannungen $\overline{j_{u_i u_j}^*}$ der inhomogene Anteil gemäß der Aufspaltung (3-67,68) nicht berücksichtigt wird. Die daraus resultierenden Abweichungen sind wegen (3-85) im Bereich großer Geschwindigkeitsgradienten, also in Wandnähe, und im Bereich großer Maschen, z.B. im Ringspalt an der Außenwand, besonders gravierend, da die dort größere inhomogene Zähigkeit ij_{μ}^* zu einer Dämpfung der Energie in der Grobstruktur führt, und diese Dämpfung, im Gegensatz zum isotropen Modell nach (A5-20), nicht zu einer Absenkung der Feinstrukturenergie führt, um so letztlich durch Absenkung der isotropen Zähigkeit ij_{μ} wieder höhere Grobstrukturschwankungsenergien zuzulassen. Die in den früheren Simulationen [Schumann 1973a, 1975a,b] gefundene Tendenz besonders bei groben Maschennetzen an der Außenwand von Ringspalten zu niedrige Schwingungswerte zu liefern, kann somit durch das Fehlen des inhomogenen Modellanteils im Produktionsterm der Feinstrukturenergiegleichung erklärt werden.

Als Abhilfe wird der vollständige Produktionsterm in der folgenden Form eingeführt:

$$-\overline{u_i' u_j'} \delta_j^i = C_4 k_{13} \overline{D^2} \overline{E'}^{1/2} - \overline{u_i'} \delta_3^i \langle \overline{u_1'} \rangle \delta_3^j \overline{u_1'}^3 \quad (3-97)$$

(Auf $\langle \overline{u_1'} \rangle$ wird wegen (3-68) nicht die Aufspaltung (3-92) angewandt.) Durch diesen vollständigen Produktionsterm ist eine Teilerweiterung der Energiegleichung für inhomogene Strömungen erfolgt. Nach den Darlegungen in Anhang 5 muß nun, da C_{10} in $\overline{u_i' u_j'}$ etwa wie C_2 wirkt, eine entsprechende Erweiterung des Dissipationsmodells erfolgen.

3.4.2.2 Erweiterung des Dissipationsterms

3.4.2.2.1 Wandkorrektur des isotropen Modells

Dem verbesserten Dissipationsmodell gemäß (A5-13) haftet ebenso wie dem Modell des isotropen Produktionsterms immer noch ein fundamentaler Mangel an, nämlich daß bei endlichen Reynolds-Zahlen für das nur inhomogene Schwankungsfeld die Konstanten C_2 und C_3 über die Theorie isotroper Turbulenz berechnet werden. Dieser Mangel äußert sich im wesentlichen darin, daß bei isotroper Strömung die Maschenweite h als charakteristischer Längenmaßstab für die Dissipation angesehen werden kann, daß aber bei der in Wandnähe vorliegenden anisotropen Strömung h kein sinnvoller Längenmaßstab mehr ist. Hier wird die Dissipation sicherlich vom Wandabstand geprägt, womit sich als charakteristischer Längenmaßstab z.B. der Prandtl'sche Mischungsweg l (nach (3-16,14)) anbietet [Rotta 1951]. Beide Abhängigkeiten werden in dem verbesserten Modell in einer Form berücksichtigt, wie sie Deardorff [1974c] zur Berücksichtigung von Auftriebseffekten gewählt hat:

$$\overline{v E'} = C_3 \frac{\overline{v E'}^{3/2}}{\text{Min}(k_2, C_{31} \cdot l)} \quad (3-98)$$

Die neue Unbekannte C_{31} hat nur in den wandnahen Maschen einen Einfluß. Berechnet werden kann der Wert von C_{31} natürlich, ebenso wie der von $C_{3\text{Real}}$ nach (A5-13) in Abhängigkeit von h/η und h/L . Da aber für Kanalströmungen keine ausreichenden Angaben über reale Energiespektren im wandnahen Bereich bekannt sind, wird ein anderes, für Kanalströmungen typisches Vorgehen gewählt.

Die Bestimmungsgleichung für C_{31} ergibt sich bei Einschränkung auf den Wandbereich aus (3-98) durch zeitliche Mittelung:

$$C_{31} = C_3 \frac{\langle \overline{v E'}^{3/2} \rangle}{\langle \overline{v E'} \rangle l} \quad (3-99)$$

Die darin vorkommende Dissipation wird durch die Gesamtdissipation angenähert, und diese wiederum wird über das logarithmische Wandgesetz der Geschwindigkeit berechnet (siehe (3-57,58)), das zwar streng nur im Bereich $y^+ = 100$ bis $y/D \approx 0,05$ gilt [Rotta 1972, Perry, Abell 1975], aber das nach aller Erfahrung in diesem Bereich selbst bei niedrigen Reynolds-Zahlen [Eckelmann 1974] und bei Ringspalten bis zu Radienverhältnissen von $R_1/R_2 \geq 0,04 - 0,1$ [Rehme 1974, 1975b] eine gute Näherung ist.

Da die Triplekorrelationen $\langle \sqrt{E^T}^{3/2} \rangle$ nicht berechenbar sind, wird wie in C_3 nach (3-94) die folgende Näherung angesetzt:

$$\langle \sqrt{E^T}^{3/2} \rangle = \alpha_2 \langle \sqrt{E^T} \rangle^{3/2} \quad (3-100)$$

Die Feinstrukturenergie $\sqrt{E^T}$ ist von der Maschennetauflösung, dem Wandabstand und der Reynolds-Zahl abhängig. Da C_{31} wegen (3-98) nur bei schlechter Auflösung im Wandbereich einen Einfluß hat, wird $\langle \sqrt{E^T} \rangle$ auch nur für schlechtes Auflösungsvermögen approximiert. Es wird angesetzt:

$$\langle \sqrt{E^T} \rangle \approx \frac{\langle \sqrt{E^T}_{Kol} \rangle}{\int_{\eta/h}^{\infty} E_{Kol} dk} \cdot \frac{\int_{\eta/h}^{\infty} E_{Real} dk}{\int_0^{\infty} E_{Real} dk} \cdot E(y^+ = 100) \quad (3-101)$$

Der erste Term auf der rechten Seite korrigiert die Vernachlässigung der Volumenmittelung. Er wird für Kolmogorov-Spektren aus (3-51) [Schumann 1973a] und (A5-3,4) berechnet:

$$\frac{\langle \sqrt{E^T}_{Kol} \rangle}{\int_{\eta/h}^{\infty} E_{Kol} dk} = \Gamma(1/3) \frac{3}{10} \cdot 0,746 \cdot \pi^{2/3} = 1,286 \quad (3-102)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite kann in Abhängigkeit von h/l und h/η für das reale Spektrum (A5-1) numerisch integriert werden. In etwaiger Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von Lörcher [1976] wird für grobe Maschennetze mit $h \approx 1/8$ und für hohe Reynolds-Zahlen ($Re \geq 10^5$) der Wert 0,2 benutzt:

$$\left. \frac{\int_{\eta/h}^{\infty} E_{Real} dk}{\int_0^{\infty} E_{Real} dk} \right|_{h \approx 1/8, Re \approx 10^5} \approx 0,2 \quad (3-103)$$

Der dritte Term in (3-101) ist die Energie im Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes. Sie sollte nach den Ergebnissen von Perry, Abell [1975] in diesem Bereich konstant sein, was aber in der üblichen linearen

Darstellung des Wandabstandes bei experimentellen Ergebnissen kaum überprüfbar ist. Als Mittelwert der Ergebnisse von Laufer [1954], Comte-Bellot [1965] und Rehme [1975a,b] wird der Wert

$$\Xi (Y^+ \approx 100) \approx 4,3 \quad (3-104)$$

benutzt. Einsetzen aller Größen in die Bestimmungsgleichung (3-99) liefert das Ergebnis:

$$C_{31} = \gamma_2 C_3 \cdot 1,163 = \gamma_2 \cdot 0,74 \quad (3-105)$$

Die Herleitung dieses Wertes ist mit einigen Näherungen verbunden, deren Konsequenzen schwer abzuschätzen sind. Es soll deshalb hier, im Vorgriff auf Kapitel 6, angemerkt werden, daß eine Variation von C_{31} nur einen schwachen Einfluß auf die numerischen Ergebnisse hat.

3.4.2.2.2 Dissipation bei kleinen Reynolds-Zahlen

Bei hohen Reynolds-Zahlen findet eine nennenswerte Dissipation nur bei hohen Wellenzahlen statt. Bei kleinen Reynolds-Zahlen verschiebt sich der durch Dissipation bestimmte Bereich zu kleineren Wellenzahlen und die Energie wird in zunehmendem Maße in der Grobstruktur dissipiert. Dieser Vorgang ist in dem erweiterten Modell (3-98) wegen der Annahme $\overline{v_{E'}^2} \approx \overline{v_E^2}$ in (3-94) nicht enthalten. Es wird daher für den Grenzfall kleiner Reynolds-Zahlen, und für den Fall sehr feiner Maschen, in Anlehnung an Rotta [1951] eine Erweiterung $\overline{v_{E'}^2}$ des isotropen Dissipationsmodells $\overline{v_E^2}$ eingeführt, wie sie in ähnlicher Form von Schumann, Patterson [1975] durch Simulationen über ein Spektralverfahren bestätigt wurde. Zusätzlich wird auch hier die Wandkorrektur nach Kapitel 3.4.2.2.1 mit berücksichtigt:

$$\overline{v_{E'}^2} + \overline{v_{E'}^2} = \overline{v_E^2} + \nu C_{32} \frac{\overline{v_{E'}^2}}{\text{Min}(h, C_{31} \cdot \ell)^2} \quad (3-106)$$

Die unbekannte Konstante C_{32} wird so bestimmt, daß bei beliebig feinen Maschennetzen ($h \rightarrow 0$), bzw. bei sehr kleinen Reynolds-Zahlen ($Re \sim 1/\eta \rightarrow 0$, s. (A5-7)) die gesamte Dissipation innerhalb der Feinstruktur durch den viskosen Dissipationsterm beschrieben wird. Aus dem obigen Ansatz kann damit folgende Definitionsgleichung für C_{32} angeschrieben werden:

$$C_{32} = \frac{\langle \overline{v_{E'}^2} \rangle h^2}{\nu \langle \overline{v_{E'}^2} \rangle} \quad (3-107)$$

Das Verhältnis von nicht aufgelöster Dissipation zu nicht aufgelöster Energie kann aus den Energiespektren berechnet werden. Aus (A5-3) folgt:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\epsilon'} \rangle &\approx 2V \int_{\pi/h}^{\infty} k^2 E(k) dk \\ \langle \overline{\epsilon'} \rangle &\approx \int_{\pi/R}^{\infty} E(k) dk \end{aligned} \quad (3-108)$$

Hier im Bereich sehr kleiner Feinstrukturenergien ist es ausreichend, als "reales" (siehe Anhang 5) Energiespektrum $E(k)$ das Pao-Spektrum [Pao 1965] zu benutzen:

$$E_{\text{Pao}}(k) = \alpha \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \exp \left\{ -\frac{3}{2} \alpha (ky)^{4/3} \right\} \quad (3-109)$$

oder das Lin-Spektrum [Lin 1972] zu benutzen:

$$E_{\text{Lin}}(k) = \alpha \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \left(1 + (ky)^{2/3} \right) \exp \left\{ -\alpha \left(\frac{3}{2} (ky)^{4/3} + (ky)^2 \right) \right\} \quad (3-110)$$

Die Ergebnisse der numerischen Integration der beiden C_{32} -Ausdrücke sind in Abb. 10 in Abhängigkeit von h/η wiedergegeben. Die beiden Kurven unterscheiden sich nur teilweise geringfügig voneinander, haben aber beide für $h/\eta \rightarrow 0$ denselben Grenzwert:

$$C_{32} = C_{32\text{Pao}}(h/\eta \approx 0) = C_{32\text{Lin}}(h/\eta \approx 0) \approx 20. \quad (3-111)$$

Somit ist wegen $C_{32} \cdot \nu = C_{32}/\text{Re}_\tau \ll 1$ der Zusatzterm (3-106) bei hohen Reynolds-Zahlen ohne Bedeutung. Bei mäßigen Reynolds-Zahlen, etwa für $\text{Re}_\tau < 10^3$, zeigt der Zusatzterm dagegen schon einen erheblichen Einfluß auf die Gesamtdissipation. Aus den numerischen Ergebnissen muß man schließen, daß einzig und allein dieser Zusatzterm es ermöglicht, das Simulationsverfahren auch auf Reynolds-Zahlen anzuwenden, bei denen keine Kolmogorov-Spektren in den Energiespektren mehr zu finden sind. D.h. durch diesen Term wird das Verfahren auch dort anwendbar, wo die Theorie isotroper Turbulenz nicht mehr auf das Feinstrukturmodell streng anwendbar ist.

3.4.2.2.3 Dissipation in der laminaren Unterschicht

Bei der Verwendung von sehr stark anisotropen Maschennetzen mit einer sehr guten Auflösung in x_3 -Richtung oder aber bei der Anwendung des Simulationsverfahrens auf Reynolds-Zahlen nahe der kritischen Reynolds-Zahl ist es

denkbar, daß die laminare Unterschicht in Wandnähe ($y^+ \lesssim 5$) durch das Maschennetz aufgelöst wird. In diesem Fall versagt das obige Dissipationsmodell nach den Gleichungen (3-98,106) im Wandbereich, da das Verschwinden der Schwankungsenergie im Bereich $y^+ < 5$ [Lauffer 1954, Eckelmann 1974] für die Dissipation den Wert Null liefert, diese in Wirklichkeit aber an der Wand den Maximalwert besitzt. Um diese Modellschwäche zu umgehen, benutzen Jones, Launder [1972, 1973] einen Zusatzterm, der hier entsprechend auf die Feinstrukturenergiegleichung angewandt wird:

$$\overline{\epsilon^v} + \overline{\epsilon^v}_{II} + \overline{\epsilon^v}_{III} = \overline{\epsilon^v} + \overline{\epsilon^v}_{II} + 2\nu \left(\delta_3 \overline{\epsilon^v}^{1/2} \right)^2 \quad (3-112)$$

Dieser Term ist nur bei kleinen Reynoldszahlen im Bereich starker Änderungen des Energiefeldes in x_3 -Richtung von Bedeutung, d.h. im Bereich $y^+ \lesssim 5$. Bei den in dieser Arbeit benutzten Maschennetzen hat er keinen Einfluß. Dieser Term stellt somit lediglich eine Vervollständigung des Modells für Extremfälle dar.

3.5 Zusammenfassung der Schließungsmodelle

Mit dem Abschluß des letzten Kapitels wurde das gesamte Schließungsproblem durch Modellansätze und weitestgehende theoretische Berechnung der Modellkonstanten beseitigt. Um noch einmal zu verdeutlichen, an welchen Stellen unsichere, empirische oder numero-empirische Informationen bestimmend sind, werden die betreffenden Modelle hier nochmals zusammengefaßt.

Für die unbekanntenen turbulenten Feinstrukturwärmeströme wurden hier folgende Ansätze eingeführt:

$$\overline{\epsilon^v_{ij} T'} = -\dot{\alpha}_t \delta_{ij} (\overline{\epsilon^v} - \langle \overline{\epsilon^v} \rangle) - \dot{\alpha}_t^* \delta_{ij} \langle \overline{\epsilon^v} \rangle \quad (3-8)$$

$$\dot{\alpha}_t = C_{T2} \dot{\alpha}_T (\delta_F \dot{\alpha}_5 \overline{\epsilon^v})^{1/2} \quad (3-9,10)$$

$$\dot{\alpha}_t^* = \delta_{3j} l l_H |\delta_3 \langle \overline{u_1} \rangle| f_H (h^2) \quad (3-13)$$

Darin sind die folgenden Faktoren für lokal-isotrope Turbulenz exakt und ohne empirische Unterstützung berechenbar:

$$\delta C_T = \frac{\langle {}_1 D_{Tj}^2 \rangle}{\langle {}_1 D_{T[jj]}^2 \rangle} \cdot \frac{\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_{Ej}} \right)^2 \rangle}{\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 \rangle} \quad (3-29,54)$$

$$\delta C_5 = \langle \delta \overline{E'} \rangle / \langle \overline{v E'} \rangle \quad (3-51,71)$$

Bis auf eine geringe Restabweichung kann die im isotropen Modell bestimmende Konstante C_{T2} über die Theorie isotroper Turbulenz mit empirischer Unterstützung in Form der nahezu universell gültigen Kolmogorov- und Batchelor-Konstanten α und β berechnet werden:

$$C_{T2} = \frac{\langle E_{T1/2} \rangle - \alpha \langle {}_2 D_{Tj}^2 \rangle}{\gamma_T \delta C_T \delta F^{1/2} \langle \delta \overline{E'} \rangle^{1/2} \langle {}_2 D_{Tj}^2 \rangle} \sim \frac{1}{\gamma_T \alpha^{1/2} \beta} \quad (3-31,55)$$

$$\alpha = 1,5 \quad (3-53)$$

$$\beta = 1,3 \quad (3-41)$$

Die Mischungswege l und l_H nach (3-16, 3-22) sind natürlich empirisch unterstützte Größen. Sie können aber in dem alleine hier interessierenden Wandbereich als nahezu universell gültig angesehen werden. Die Dämpfungsfunktion des inhomogenen Modells ist:

$$f_H(k^n) = \text{Min} \left(1, (C_{T10} C_{T10})^{1/2} (F^2 \Delta x_3)^{1/5} F_{T0}^{-1/2} \right) \quad (3-63)$$

$$F_{T0} = F_0 = 1,28 \quad (3-66)$$

Die darin bestimmende Konstante C_{T10} muß ebenso numero-empirisch ermittelt werden, wie γ_T in C_{T2} . Für beide gilt jedoch (in Klammern die benutzten Werte):

$$\gamma_T \geq 1 \quad (\gamma_T = 1,4) \quad (3-113)$$

$$C_{T10} \geq 1 \quad \left(\begin{array}{l} C_{T10} = 1,0 \text{ bei } C_{T2} \neq 0, \\ C_{T10} = 0 \text{ bei } C_{T2} = 0 \end{array} \right) \quad (3-114)$$

Dies sind die einzig relevanten offenen Parameter des Temperaturmodells (abgesehen von der den beiden Modellen gemeinsamen Energiegleichung). Beide Faktoren wurden in allen Rechnungen gemäß (3-113,114) ohne Änderungen benutzt. Einige der in Kapitel 6 gezeigten Fälle für $Pr \ll 1$ wurden wegen

$C_{T2} = 0$, und damit $\overline{j u^i_j T^i} = 0$, ohne Modell, also ohne auch nur eine einzige empirische Größe im Temperaturteil zu benutzen, berechnet.

Für die unbekanntenen turbulenten Feinstrukturschubspannungen wurden folgende Ansätze übernommen bzw. neu eingeführt:

$$\overline{j u^i u^j} = - \mu^{ij} (\overline{D_{ij}} - \langle \overline{D_{ij}} \rangle) - \mu^{ij*} \langle \overline{D_{ij}} \rangle \quad (3-68)$$

$$\mu^{ij} = c_2 \epsilon^{ij} (\partial F \partial \epsilon_5^i \sqrt{E^i})^{1/2} \quad (3-70, 11)$$

$$\mu^{ij*} = \delta_{ai} \delta_{bj} l^2 |\delta_3 \langle \overline{u_1} \rangle| f(k^n) \quad (3-85)$$

Darin kann bei lokalisotroper Turbulenz der Faktor μ^{ij} ohne empirische Unterstützung exakt berechnet werden:

$$\epsilon^{ij} = \frac{\langle_{13} \overline{D_{ij}}^2 \rangle}{\langle_{13} \overline{D_{[ij][j]}^2} \rangle} \cdot \frac{\langle D_{[ij][j]}^2 \rangle}{\langle \overline{D_{ij}}^2 \rangle} \quad (3-72)$$

Geringe empirische Unterstützung benötigt die bis auf eine geringe Restabweichung berechenbare Konstante C_2 in Form der Kolmogorov-Konstanten α nach (3-53):

$$C_2 = \frac{\langle \epsilon \rangle - \nu \langle_{12} \overline{D}^2 \rangle}{\gamma_1 \epsilon^{ij} \partial F^{1/2} \langle \overline{D}^2 \rangle^{1/2} \langle_{12} \overline{D}^2 \rangle} \sim \frac{1}{\gamma_1 \alpha} \quad (3-80, 82)$$

Die Dämpfungsfunktion des neuen inhomogenen Modells ist:

$$f(k^n) = \text{Min} (1, c_{10} (F F)^{1/4} F_0^{-1/2}) \quad (3-90)$$

$$F_0 = 1,28 \quad (3-91)$$

Die offenen und durch numerische Experimente zu bestimmenden Faktoren des Impulsmodells sind γ_1 und C_{10} . Für beide ist bekannt, daß gilt (benutzte Werte in Klammern):

$$\gamma_1 \geq 1 \quad (\gamma_1 = 1.4) \quad (3-115)$$

$$C_{10} \geq 1 \quad (C_{10} = 2.0) \quad (3-116)$$

Beide Faktoren wurden bei allen Simulationsrechnungen mit den oben genannten Werten benutzt.

Die Feinstrukturenergie, die in beiden Feinstrukturmodellen benutzt wird, wird durch eine orts- und zeitabhängige Energiegleichung berechnet, die hier für inhomogene Strömungen und kleine Reynolds-Zahlen erweitert wurde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{v E'}}{\partial t} = & - \delta_j \cdot \left(\delta_{\mu_j}^i \cdot \delta_{c_5}^i \overline{v E'} \right) \\ & + \delta_j \cdot \left\{ \left(v \delta_{c_5}^i + \delta_{c_6}^i (\delta_F \overline{v E'})^{1/2} \right) \delta_j \cdot \overline{v E'} \right\} \\ & + C_2 C_{20} h \frac{\delta_{c_{13}}^i}{\delta_{c_{13}}^i} \overline{D}^{2v E' 1/2} - \mu^i * \delta_3 \langle \overline{u_1} \rangle^3 \delta_3 \overline{u_1}^3 \\ & - C_3 \frac{\overline{v E'}^{3/2}}{\text{Min}(h, C_{31} l)} - C_{32} \frac{v \overline{v E'}}{\text{Min}(h, C_{31} l)^2} - 2 v \left(\delta_3 \overline{v E'}^{1/2} \right)^2 \end{aligned}$$

(3-93, 97, 98, 106, 112)

Die Konstante C_3 und der Faktor C_{20} sind exakt berechenbar ohne empirische Unterstützung:

$$C_{20} = \frac{\langle \delta_F \delta_{c_5}^i \overline{v E'} \rangle^{1/2} \langle \delta_{12} \overline{D}^2 \rangle}{h \langle \overline{v E'} \rangle^{1/2} \langle \delta_{13} \overline{D}^2 \rangle} \quad (3-94)$$

$$C_3 = \frac{h}{\overline{D}^2} \cdot \frac{\langle \overline{v E'} \rangle}{\langle \overline{v E'} \rangle^{3/2}} \quad (3-94)$$

Die Konstante $\delta_{c_6}^i$ im diffusiven Term kann ohne großen Fehler durch die folgende Näherung ersetzt werden:

$$\delta_{c_6}^i = C_7 \delta_{c_5}^i \quad (3-94, 96)$$

$$C_7 = 0,3 \quad (3-96)$$

Mit einiger empirischer Unterstützung werden die neu eingeführten Konstanten C_{31} und C_{32} bestimmt:

$$C_{31} = C_3 \frac{\gamma_2 \langle \overline{v \epsilon'} \rangle^{3/2}}{\langle \overline{v \epsilon'} \rangle \rho} = 0,74 \gamma_2 \quad (3-99, 100, 105)$$

$$C_{32} = \frac{h^2 \langle \overline{v \epsilon'} \rangle}{\nu \langle \overline{v \epsilon'} \rangle} = 20. \quad (3-107, 111)$$

Der einzige offene Faktor in der Energiegleichung ist der in C_3 und C_{31} vorkommende Faktor γ_2 . Für ihn gilt (benutzter Wert in Klammern):

$$\gamma_2 \geq 1 \quad (\gamma_2 = 1,0) \quad (3-117)$$

Die hier angegebenen Zahlenwerte wurden bei allen Simulationsrechnungen ohne Änderungen benutzt. Wo nur die Definitionsgleichungen für Konstanten bzw. Faktoren angegeben sind bedeutet dies, daß diese für das jeweils benutzte Maschennetz und die gültige Reynolds- bzw. Peclet-Zahl neu berechnet werden müssen.

4. DIFFERENZVERFAHREN

Im Kapitel 3 wurden alle Modelle und Approximationen angegeben die nötig sind, um die nichtlinearen Unbekannten in den über Maschenvolumina gemittelten Grundgleichungen zu berechnen. In diesem Kapitel werden einige zusätzliche Näherungen eingeführt, um die linearen Unbekannten anzunähern, wie z.B. Mittelungen zur Annäherung von Geschwindigkeiten, Druck oder Temperatur an Stellen des Maschennetzes, an denen sie nicht definiert sind. Hierzu gehören insbesondere die Wandbedingungen. Den Abschluß dieses Kapitels bilden einige Bemerkungen zur Genauigkeit und Stabilität der Temperaturfeldsimulation. Alle Ausführungen beschränken sich weitgehend auf die Teile, die entweder der Vollständigkeit halber notwendig sind oder gegenüber der früheren Arbeit von Schumann [1973a] wesentlich geändert wurden, oder die bei der Temperaturfeldsimulation Besonderheiten aufweisen, wie sie bei der Geschwindigkeitsfeldsimulation nicht auftreten.

4.1 Lineare Differenzenapproximationen

Durch die Integration der Grundgleichungen über Maschenvolumina sind bereits nahezu alle Differentiale in Differenzenformeln überführt worden. Die verbliebenen Differentiale in den zeitlichen Änderungen und in Teilen der diffusiven Terme müssen approximiert werden. Hierfür werden lineare Differenzenapproximationen eingeführt und berücksichtigt, daß in der Richtung senkrecht zu den Wänden des Kanals, d.h. in x_3 -Richtung, die Benutzung nichtäquidistanter Maschennetze sinnvoll sein kann. Als Beispiel wird hier nur die lineare Näherung angegeben für:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \approx \int_1 \bar{u}_1 \quad (4-1)$$

am Maschenmittelpunkt, und die Parabelnäherung für:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right|_{k+\frac{1}{2}} \approx \int_3 \bar{u}_1 \Big|_{k+\frac{1}{2}} \equiv a_1 \bar{u}_1 \Big|_{k+1} + a_2 \bar{u}_1 \Big|_k + a_3 \bar{u}_1 \Big|_{k-1} \quad (4-2)$$

an der Maschenoberfläche (k = Maschenindex in x_3 -Richtung, siehe Abb. 3).

Die Hilfsgrößen a_1 bis a_3 ergeben sich aus dem Parabelansatz zu:

$$a_1 = (6 \Delta x_{3k-1} \Delta x_{3k} + 2 \Delta x_{3k-1}^2 + 4 \Delta x_{3k}^2) / d$$

$$a_2 = (-6 \Delta x_{3k-1} \Delta x_{3k} - 6 \Delta x_{3k}^2 + 2 \Delta x_{3k+1}^2 - 2 \Delta x_{3k-1}^2) / d$$

$$a_3 = (2 \Delta x_{3k}^2 - 2 \Delta x_{3k+1}^2) / d$$

$$d = (\Delta x_{3k-1} + \Delta x_{3k})(\Delta x_{3k} + \Delta x_{3k+1})(\Delta x_{3k-1} + \Delta x_{3k} + \Delta x_{3k+1})$$

Außer für die Differentiale sind auch z.B. für Größen aus den konvektiven Termen der Grundgleichungen (2-41) Näherungen erforderlich, weil dort Größen an Orten im Maschennetz verlangt werden, an denen sie nicht definiert sind. Diese werden durch lineare Mittelung, oder bei nichtäquidistanten Netzen durch Mittelung mit entsprechender Wichtung berechnet:

$$\tilde{Y}^k \Big|_{k+1/2} \approx (\Delta X_{3_{k+1}} Y_{k+1} + \Delta X_{3_k} Y_k) / (\Delta X_{3_{k+1}} + \Delta X_{3_k}) \quad (4-3)$$

Werden Flächenmittelwerte von Größen benötigt, die als Volumenmittelwerte definiert sind (Druck, Temperatur), so werden diese ebenfalls durch lineare Mittelung oder mit (4-3) aus den Werten in den angrenzenden Maschen berechnet. So z.B.

$$\delta \overline{Y} \approx \overline{\delta Y} \quad (4-4)$$

4.2 Differenzformeln

Mit den oben eingeführten Näherungen und den im Kapitel 3 angegebenen Feinstrukturmodellen können vollständige Differenzformeln für die über Maschenvolumina integrierten Grundgleichungen für das Strömungsinne angegeben werden.

4.2.1 Temperaturgleichung

Die endgültige Differenzenform der Temperaturgleichung (2-41) hat folgendes Aussehen:

$$\delta_4^v \overline{T} = -\delta_j^i \left(\overline{\delta_j^i \overline{T}} \right) + \delta_j^i \left[a \delta_j^v \overline{T} - \overline{\delta_j^i T'} \right] + \dot{Q} \quad (4-5)$$

Es ist zu beachten, daß beim Ausschreiben der Summen (bei doppelt vorkommenden gleichen Indizes) für $j = 3$ die Nichtäquidistanz der Maschennetze nach (4-2) und (4-3) berücksichtigt werden muß (siehe Anhang 1, A1-6).

Um aus (4-5) zu jedem Zeitpunkt das Temperaturfeld berechnen zu können, wird hier in Fortführung der früheren Arbeit und in Konsistenz mit dem Impulsteil ein explizites Verfahren gewählt, das ein gemischtes Euler-Leapfrog-Verfahren ist [Schumann 1973a]. Beim ersten Zeitschritt werden die neuen Werte $\overline{T}_{n_2}^v$ nach einem Euler-Verfahren aus den Anfangswerten $\overline{T}_{n_1}^v = \overline{T}_{n_0}^v$ berechnet. Anschließend folgt eine begrenzte Anzahl Leapfrog-Schritte, bei denen ausgehend vom vorletzten Zeitschritt und unter Benutzung der Ergebnisse des letzten Zeitschrittes n_1 für die konvektiven Terme die neuen Werte

berechnet werden. (Die Zahl der leapfrog-Schritte war bei den Simulationen dieser Arbeit ≤ 64 .) Im Anschluß an diese leapfrog-Schritte ist stets aus Stabilitätsgründen ein gemischter Euler-leapfrog-Schritt erforderlich. Diese drei Verfahren können in eleganter Weise zusammengefaßt werden. Für (4-5) erhält man dann schematisch:

$$\overline{v}_{n_2} = F_1 \overline{v}_{n_0} + F_2 \overline{v}_{n_1} + F_3 \Delta t \left(\text{Diff}_{n_0} - \text{Konv}_{n_1} + \dot{Q} \right) \quad (4-6)$$

mit den Faktoren

	F_1	F_2	F_3	
Euler	1	0	1	$n_0 = n_1$
Leapfrog	1	0	2	
gemischt	1/2	1/2	3/2	

Dieses Verfahren liegt auch dem Rechenprogramm EDDY [Grötzbach, Schumann 1974] zugrunde und wird in der Arbeit von Dütting [1976] ausführlich beschrieben.

4.2.2 Impulsgleichungen

Die Differenzenformeln für den Impulsteil haben sich nur unwesentlich geändert. Um von der x_2 -Richtung abhängige Randbedingungen (Rauhigkeiten) einführen zu können, muß lediglich die nach (3-68) verallgemeinerte Version des inhomogenen Gradientenmodells berücksichtigt werden. Die neu eingeführten Dissipationsterme der Energiegleichung sind problemlos. Sie benötigen keine zusätzlichen Differenzenapproximationen.

Die Berücksichtigung des turbulenten Druckes bei der expliziten Berechnung der neuen Geschwindigkeitsfelder erfolgt auch hier nach dem Verfahren von Chorin [1968]. D.h. das neue Geschwindigkeitsfeld wird zunächst ohne die turbulenten Druckschwankungen berechnet. Man erhält dann die Näherung \tilde{u}_{n_2} die sich von der Lösung \underline{u}_{n_2} um den Gradienten eines Potentials ψ unterscheidet:

$$\underline{u}_{n_2} = \tilde{u}_{n_2} - \text{grad } \psi \quad (4-7)$$

Die Anwendung der Kontinuitätsgleichung auf (4-7) liefert für ψ eine Poissongleichung:

$$\text{div} (\text{grad } \psi) = \text{div } \tilde{u}_{n_2}, \quad (4-8)$$

die mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation gelöst wird (siehe Schumann [1973a]). Dies bringt jedoch die Restriktion auf Maschennetze mit in jeder Richtung 2^n -Maschen mit sich. Würde man (4-8) mit dem Verfahren der zyklischen Reduktion [Sweet 1973, Schumann, Sweet 1976] lösen, dann könnten auch allgemeinere Maschennetze und kompliziertere Geometrien verwirklicht werden. Ist das Potential ψ bekannt, können die richtigen Geschwindigkeitsfelder u_{x_i} aus (4-7) berechnet werden.

4.3 Randbedingungen

Die mit obigen Angaben ableitbaren oder angegebenen Differenzenformeln stellen im Strömungsinnern ein geschlossenes Gleichungssystem dar. An den Berandungen des simulierten Strömungsvolumens werden in Hauptströmungsrichtung und senkrecht dazu periodische Randbedingungen eingeführt, in der Richtung senkrecht zu den Wänden werden lineare Approximationen, oder bei steilen Gradienten innerhalb der wandnächsten Maschen, logarithmische Wandgesetze benutzt.

4.3.1 Temperaturrandbedingungen

4.3.1.1 Periodizität

Der elliptische Charakter der Grundgleichungen macht es erforderlich, Randbedingungen für alle Berandungen des betrachteten Volumens anzugeben. In der Hauptströmungsrichtung und senkrecht dazu, parallel zur Wand (Abb. 1), kann dies durch Periodizität erreicht werden, d.h. es wird gesetzt:

$$Y(x_1 + X_1, x_2 + X_2, x_3) = Y(x_1, x_2, x_3) \quad (4-9)$$

Dies ist nur zulässig, wenn die Periodenlängen $X_{1,2}$ so groß gewählt werden, daß die Vorgänge über die Längen hinweg statistisch vollkommen entkoppelt sind. Die hier nach den Erfahrungen von Schumann [1973a] und aus den Autokorrelationen R_{ii} abgeleiteten benutzten Längen

$$\begin{aligned} X_1 &= 2 \div 4 \\ X_2 &= 1 \div 2 \quad \text{bzw.} \quad \pi/2 \div \pi \end{aligned} \quad (4-10)$$

erweisen sich leider bei Auswertung der numerischen Ergebnisse besonders in Hauptströmungsrichtung als nur bedingt ausreichend. Es treten generell in Kanalmitte noch erhebliche Korrelationen in den Druckfeldern auf und etwas schwächere Korrelationen in den Temperaturfeldern bei sehr kleinen Prandtl-Zahlen (siehe Kapitel 6). Weitergehende Konsequenzen dieser etwas

zu gering gewählten Längen sind allerdings nicht offensichtlich.

Aus der Anwendung der periodischen Randbedingungen in Hauptströmungsrichtung auf das Temperaturfeld ergibt sich eine recht ungewohnte Eigenschaft der simulierten Temperaturfelder: Die Eintrittstemperatur T_E in das Kontrollvolumen wird gleich der Austrittstemperatur T_A , unabhängig davon, ob innerhalb des Volumens Energie zu- oder abgeführt wird. Daß dies kein Widerspruch ist, liegt daran, daß durch die periodischen Randbedingungen der betrachtete endliche Kanal in x_1 - und x_2 -Richtung unendliche Ausdehnung erhält, und daß dadurch auch an jeder Stelle dieselbe Wärmemenge zu- oder abgeführt wird. Dadurch bleiben die Eintritts- und Austrittstemperaturen zu jedem Zeitpunkt gleich, wenn sie nur zu Beginn gleich sind, d.h.

$$T_A(x, t) = T_E(x, t) \quad (4-11)$$

Allen Simulationen dieser Arbeit liegt (4-11) zugrunde.

Eine Ausdehnung der Theorie auf allgemeine Temperaturfelder ist trotz periodischer Randbedingungen möglich, wenn man die Temperaturgleichung samt Randbedingungen transformiert. Ist $\langle \partial T / \partial x_1 \rangle = f(x_3)$ der mittlere Gradient des Temperaturprofils zu Beginn der Simulation, TG die mittlere Temperatur und VG die mittlere Geschwindigkeit für eine Galilei-Transformation der gemittelten Profile, dann kann mit den Transformationsvorschriften

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - \delta_{i1} VG t & T'' &= T - TG \\ t' &= t & T' &= T'' + x_1 \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1} \right\rangle \end{aligned} \quad (4-12)$$

$$u'_i = u_i - \delta_{i1} VG$$

die Temperaturgleichung (2-22) transformiert werden in eine Form, in der wieder periodische Randbedingungen in x_1 -Richtung anwendbar sind. Das Ergebnis der Transformation ist nach Weglassen der Striche für die transformierten Variablen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) - TPK + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \dot{Q} \quad (4-13)$$

$$\begin{aligned} TPK &= u_1 \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1} \right\rangle + u_3 x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1} \right\rangle - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a \frac{\partial}{\partial x_3} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1} \right\rangle \right) \\ &+ VG t \left\{ u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a \frac{\partial}{\partial x_3} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1} \right\rangle \right) \right\} \end{aligned}$$

4.3.1.2 Wandbedingungen

Die Formulierung von Wandbedingungen bezüglich der Temperaturfelder stößt nur in den diffusiven Termen auf Schwierigkeiten. Dort sind die Wandwärmeströme:

$$\dot{q}_{w1,2} = -a \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{R_1, R_2} \quad (4-14)$$

zu approximieren.

Bei kleinen Peclet-Zahlen $Pe_T = 1/a$ und bei laminarer Strömung ist das Temperaturprofil in wandnähe weitestgehend parabelförmig, weil der molekulare Wärmetransport mindestens gleichbedeutend mit dem turbulenten ist. Das turbulente Temperaturprofil unterscheidet sich nur unwesentlich vom laminaren Profil. In diesem Fall kann der Gradient in (4-14) ohne großen Fehler linear angenähert werden, analog zu (4-1):

$$\dot{q}_{w1} = -a \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{R_1} \approx \frac{-a}{\frac{\Delta x_{3R_1}}{2}} \left\{ \overline{T_1} - T_{w1} \right\} \quad (4-15)$$

Die unbekannte Wandtemperatur T_{w1} sollte zeit- und ortsabhängig durch Wärmeleitrechnungen für die Kanalwand bestimmt werden. Hier wird zur Vereinfachung des Aufwandes angenommen, daß die Wärmekapazität der Wand unendlich groß ist, d.h. es wird folgende Näherung benutzt:

$$T_{w1} \approx \langle T_{w1} \rangle \quad (4-16)$$

Die Temperatur $\langle T_{w1} \rangle$ wird aus der Wandbedingung in der Form

$$a_{w1} \langle T_{w1}(x_2) \rangle - \frac{b_{w1}}{Pe_T} \frac{\partial \langle T_{w1}(x_2) \rangle}{\partial x_3} = c_{w1}(x_2) \quad (4-17)$$

berechnet, wobei für den Gradienten auch hier die Form (4-15) benutzt wird. Durch die Vorgabe von a_{w1}, b_{w1} und c_{w1} wird es möglich, nicht nur einen konstanten Wandwärmestrom oder eine konstante Wandtemperatur aufzuprägen, sondern auch gemischte Randbedingungen zu realisieren.

Bei großen Peclet-Zahlen ist die Näherung (4-15) dann nicht mehr zulässig, wenn sich der Temperaturgradient innerhalb der wandnächsten Masche stark nichtlinear ändert, d.h. wenn die Wandmasche dicker ist als die durch molekulare Wärmeleitung bestimmte Schicht (Pendang zur viskosen Unterschicht). Das trifft bei den in dieser Arbeit verwendeten Maschennetzen auf alle Simu-

lationen mit $Pr \gtrsim 0.1$ zu. In solchen Fällen wird nur angenommen, daß der momentane Wandwärmestrom proportional ist zur momentanen Temperaturdifferenz $\overline{T}_1 - T_{w1}$:

$$\dot{q}_{w1} \approx \langle \dot{q}_{w1} \rangle \frac{\overline{T}_1 - T_{w1}}{\langle \overline{T}_1 - T_{w1} \rangle} \quad (4-18)$$

- Bei adiabaten Wänden wird wie oben eine unendliche Wärmekapazität der Wand angenommen und $\langle \dot{q}_{w1} \rangle \equiv 0$ gesetzt.
- Bei aufgeprägtem Wärmestrom $\langle \dot{q}_{w1} \rangle$ muß ein Weg zur Berechnung von $\langle \overline{T}_1 - T_{w1} \rangle$ gefunden werden oder auch nur von T_{w1} , $\langle T_{w1} \rangle$,
- und bei festgehaltener Wandtemperatur $\langle T_{w1} \rangle$ muß umgekehrt $\langle \dot{q}_{w1} \rangle$ berechnet werden.

Beide Probleme werden über das logarithmische Wandgesetz der Temperatur gelöst. Es ist mit (2-18), (3-21) und Anhang 2:

$$T^+ = \frac{1}{X_H} \ln Y^+ + B_T(h^+, Pr) \quad (4-19)$$

Berücksichtigt man die gewählte Normierung nach (2-18,23), dann ist

$$\begin{aligned} T^+ &= \frac{\langle \hat{T}_{w1} \rangle - \hat{T}}{\langle \hat{T}^* \rangle} = -T \frac{\langle \hat{q}_{wo} \rangle}{\langle \hat{q}_{w1} \rangle} \sqrt{\frac{\langle \hat{t}_{w1} \rangle}{\langle \hat{t}_{wo} \rangle}} \\ &= -T \frac{\sqrt{\langle \hat{t}_{w1} \rangle}}{\langle \hat{q}_{w1} \rangle} \end{aligned} \quad (4-20)$$

Integriert man (4-19) über die wandnächste Masche, dann erhält man

$$\langle \overline{T}_1 \rangle = \frac{1}{X_H} \left\{ \ln(Re_c \sqrt{\langle \hat{t}_{w1} \rangle}) + \ln(\Delta x_{3,1}) - 1 \right\} + B_T(h^+, Pr) \quad (4-21)$$

Da die Wandschubspannung hier als bekannt vorausgesetzt werden kann (s.u.), kann aus (4-18), (4-20) und (4-21) wahlweise $\langle \dot{q}_{w1} \rangle$ oder $\langle T_{w1} \rangle$ berechnet werden. In beiden Fällen wird dazu das berechnete Temperaturfeld selbst benutzt. Fehler in den zu Beginn der Rechnung vorgeschätzten Wandwerten korrigieren sich automatisch. Das Verfahren hat sich zwar bestens bewährt, ist aber dennoch unbefriedigend, da mit $B_T(h^+, Pr)$ (Abb. 5,6) eine sehr unsichere empirische Größe eingeführt wurde [Grötzbach 1974].

4.3.2 Geschwindigkeitsrandbedingungen

Für die Geschwindigkeitsrandbedingungen gilt dasselbe, wie für die Temperaturfelder. D.h. es sind an allen Berandungen Randbedingungen erforderlich. In Hauptströmungsrichtung und senkrecht dazu, parallel zur Wand, werden dieselben Periodenlängen X_1 und X_2 benutzt, wie beim Temperaturfeld. Und die Formulierung von Wandbedingungen ist ebenfalls nur in den diffusiven Termen der u_1 -Komponente problematisch. Verlangt wird:

$$\tau_{w1} = - \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right|_{R_1} \quad (4-22)$$

Da die hier verwendeten Maschennetze bei turbulenter Strömung die viskose Unterschicht nicht auflösen, darf der Gradient in (4-22) nur bei laminarer Strömung linear gemäß (4-1,15) approximiert werden. Er wird bei turbulenter Strömung, wie oben, in Anlehnung an Schumann [1975a] aus dem Ansatz

$$\tau_{w1} \approx \left. \langle \tau_{w1} \rangle \frac{u_1}{\langle u_1 \rangle} \right|_{k=1} \quad (4-23)$$

aus dem über die wandnächste Masche integrierten logarithmischen Geschwindigkeitsprofil (3-17) berechnet:

$$\left. \langle u_1 \rangle \right|_1 = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\langle \tau_{w1} \rangle} \left\{ \ln(\alpha x_{31}) + \ln\left(E(h^+) Re_\tau \sqrt{\langle \tau_{w1} \rangle} \right) - 1 \right\} \quad (4-24)$$

Dazu wird das berechnete Geschwindigkeitsprofil selbst benutzt. Allerdings müssen zwei Dinge beachtet werden:

1. Im symmetrischen Plattenkanal darf trotz der gewählten Normierung $\langle \tau_{w1} \rangle$ nicht als bekannt vorausgesetzt werden, da sich die Normierung nur auf den eingelaufenen, stationären Zustand bezieht. Die große Streuung der von Schumann [1973a] berechneten $\langle u_{1max} \rangle$ bei gleichen Reynolds-Zahlen muß auf das Festhalten der Wandschubspannung zurückgeführt werden.
2. Bei niedrigen Reynolds-Zahlen, sehr feinen Maschen und größeren Rauigkeiten muß natürlich das logarithmische Profil über eine Masche integriert werden, in der das logarithmische Profil auch tatsächlich gültig ist. Bekanntlich treten in solchen Fällen in Wandnähe erhebliche Abweichungen von den logarithmischen Profilen auf [Grötzbach 1974].

Das Verfahren arbeitet bei Beachtung dieser Punkte hervorragend, benötigt allerdings empirische Informationen über $E(h^+)$, die jedoch als ausreichend zuverlässig angesehen werden können (3-19).

4.4 Stabilität

4.4.1 Zulässige Zeitschrittweite

Explizite Integrationsverfahren haben bekanntlich den Nachteil, daß sie aus Stabilitätsgründen nur beschränkt große Zeitschritte zulassen. Implizite Verfahren haben den weniger beachteten Nachteil, daß sie durch Phasenfehler der numerischen Lösung gegenüber der theoretischen Lösung auch keine nennenswert größeren Zeitschritte zulassen [Reinecke 1974]. Somit haben die expliziten Verfahren den wesentlichen Vorteil des geringeren numerischen Aufwandes.

Für das nach Gleichung (4-6) formulierte explizite leapfrog- und zeitverzögerte Euler-Verfahren hat Schumann [1973a, 1975c] über eine lineare Stabilitätsanalyse ein Kriterium für die maximal zulässige Zeitschrittweite angegeben:

$$\Delta t_{max} = \left\{ \frac{|\langle \bar{u}_i \rangle|}{\Delta x_i} + 4\mu \frac{1}{\Delta x_i^2} \right\}^{-1} \quad (4-25)$$

Die Zähigkeit μ ist die zum betrachteten Feld (\underline{u}, E, T) gehörige effektive Diffusionskonstante. Hier, bei der direkten numerischen Simulation, werden die Feinstrukturmodelle gemäß (2-41) den diffusiven Termen zugeschlagen. Folglich setzt sich μ aus dem jeweiligen molekularen Anteil und dem von Null verschiedenen inhomogenen Anteil des betreffenden Feinstrukturmodells zusammen. Den größten zulässigen Zeitschritt erhält man demnach aus (4-25) mit

$$\mu = \text{Max} \left(\nu + \delta \mu^*, \quad a + \delta a^* \right) \quad (4-26)$$

Der durch Anwendung von (4-25,26) aus den wandabstandsabhängigen Profilen $\langle \bar{u}_i \rangle, \delta \mu^*, \delta a^*$ ermittelte maximal zulässige Zeitschritt hat sich dann bewährt, wenn man ihn noch um den Faktor 0.5 bis 0.7 reduziert hat. Zu große Korrekturfaktoren führten, besonders während der Anlaufphase, gelegentlich zum lokalen kurzfristigen Auftreten von negativen Lösungen der Energiegleichung. Wirkliche Instabilitäten der Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfelder wurden in nur zwei Fällen beobachtet, bei denen die Maschennetze in einer Richtung um den Faktor 2-3 verfeinert wurde und aus Unachtsamkeit die Zeitschrittautomatik bei der Weiterintegration abgeschaltet war. Schon nach wenigen Zeitschritten überstrichen die berechneten Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfelder in den am feinsten aufgelösten Gebieten des Maschennetzes den gesamten Zahlenbereich der Rechenanlage, was zum Abbruch des Rechenlaufes führte.

4.4.2 Verbesserungen durch Galileitransformationen

Aus dem Stabilitätskriterium nach (4-25) folgt, daß die maximale Zeitschrittweite reziprok von den Geschwindigkeiten $|\langle \bar{u}_i \rangle|$ beeinflußt wird. Führt man eine Galilei-Transformation der Grundgleichungen mit der mittleren Geschwindigkeit $V_G = \langle \bar{u}_1 \rangle$ durch, d.h. bezieht man sich z.B. auf ein mit V_G in Hauptströmungsrichtung mitbewegtes Maschennetz, dann reduzieren sich die in (4-25) einzusetzenden Geschwindigkeiten in x_1 -Richtung auf die Abweichungen gegenüber V_G . D.h. die Galilei-Transformation mit V_G (in (4-12) enthalten) führt zu einer Vergrößerung der zulässigen Zeitschrittweite.

Gleichzeitig führt die Galilei-Transformation auch zur Reduktion der Abbruchfehler des Differenzverfahrens [Schumann 1973a, Deardorff 1974a], da die Genauigkeit aufgrund der endlichen Zifferndarstellung von Zahlen auf Rechenanlagen bei der Verarbeitung etwa gleichgroßer Zahlen besser ist, als bei der Verarbeitung stark verschieden großer Zahlen. Aus diesem Grunde wird auch eine Galilei-Transformation des Temperaturprofils mit dem Mittelwert $T_G = \langle \bar{T} \rangle$ durchgeführt (4-12). Man erhält damit als Transformationsvorschriften für die Grundgleichungen:

$$u'_i = u_i - \delta_{1i} V_G$$

$$T' = T - T_G \tag{4-27}$$

$$x'_i = x_i - \delta_{1i} V_G t$$

Anwendung auf die Grundgleichungen führt, wie man am Beispiel der Temperaturgleichung (4-13) sieht, auf die unveränderten ursprünglichen Gleichungen für die transformierten Variablen zurück. Bei (4-13) gilt dies nur, wenn keine Periodizitätstransformation erforderlich ist, d.h. wenn $\langle \partial T / \partial x_1 \rangle = 0$ ist. Es muß bei der Transformation jedoch beachtet werden, daß auch die Wandbedingungen (4-17,18) und (4-23,24) mittransformiert werden.

5. Rechenprogramm TURBIT-2

Das Rechenprogramm, mit dem laminare und turbulente Strömungen in Plattenkanälen und Ringspalten mit der dargestellten Methode der Kapitel 2-4 simuliert werden können, trägt den Namen TURBIT-2 (Turbulenter Impuls Transport). Im folgenden wird kurz beschrieben, welche wesentlichen Eigenschaften die Vorläufer TURBIT-1 und EDDY haben und welches die wichtigsten Erweiterungen und Verbesserungen sind, die das Rechenprogramm TURBIT-2 auszeichnen.

5.1 Vorläufer TURBIT-1 und EDDY

Das Rechenprogramm TURBIT-1 von Schumann [1973a] bietet die Möglichkeit, den laminaren und turbulenten Impulsaustausch in einem unendlich ausgedehnten Plattenkanal und Ringspalt zu simulieren. Bei turbulenter Strömung ist es infolge der isotropen Feinstrukturenergiegleichung nur auf hohe Reynolds-Zahlen anwendbar. Das inhomogene Impulsfeinstrukturmodell läßt außerdem nur eine Anwendung auf glatte Kanäle zu und macht gleichzeitig die Verwendung fein auflösender Maschennetze erforderlich.

Das Programm ist weitestgehend in FORTRAN IV geschrieben, benutzt jedoch an einigen Stellen Assembler-Unterprogramme, z.B. zur Vereinfachung der Eingabe, zur dynamischen Bereitstellung von Feldern, zur Rechenzeitkontrolle, für Hilfsprogramme zur Fehlersuche, für die schnelle Fourier-Transformation usw. Die Geschwindigkeits- und Energiefelder sind in Blöcke unterteilt. Ein Block enthält die Daten eines Feldes einer Ebene parallel zur Wand, d.h. $IM \times JM$ -Werte (Abb. 3). Alle Blöcke werden durch eine dynamische Datenblockverwaltung (= virtueller Speicher) [Schumann 1974a] optimal in dem gewählten Kernspeicherbereich (Region) verwaltet. Eine automatische Zeitkontrolle überwacht die Einhaltung der in den Steuerkarten vereinbarten Rechenzeit und stoppt den Rechenlauf im Bedarfsfalle durch Abspeichern des letzten Integrationsergebnisses von \underline{u} und E auf magnetische Datenträger. Die Feinstrukturkonstanten werden nicht gerettet. Sie werden bei jedem Restart neu über Näherungslösungen für die Volumenintegrale berechnet. Da auch der Druck nicht gerettet wird, ist vor der ausführlichen Auswertung die Vorwärtsintegration über einen Zeitschritt erforderlich.

Das Rechenprogramm EDDY (Grötzbach, Schumann [1974]), das ausführlicher von Dütting [1976] beschrieben wurde, entstand während meiner Einarbeitungszeit. Es basiert auf denselben Programmiermethoden wie TURBIT-1, erlaubt allerdings nur die Simulation von Plattenkanalströmungen kleiner Reynolds-Zahlen, da keine Feinstrukturmodelle benutzt werden. Es erlaubt

aber zusätzlich die Temperaturfeldsimulation. Es basiert somit auf den Grundgleichungen (2-41), die mit den Näherungen des Kapitels 4 und den zusätzlichen Annahmen $\overline{\delta u_i u_j} = 0$ und $\overline{\delta u_j T} = 0$ gelöst werden. zusätzlich zu den Geschwindigkeitsfeldern werden auch die Druck- und Temperaturfelder in die dynamische Datenblockverwaltung einbezogen und zu Restart- und Auswertezwecken auf magnetische Datenträger gerettet.

5.2 TURBIT-2

Dem Rechenprogramm TURBIT-2 liegt die Theorie der Kapitel 2 bis 4 zugrunde. Es erlaubt die Simulation laminarer und turbulenter Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder in unendlich ausgedehnten Ringspalten und Plattenkanälen. Es unterscheidet sich von TURBIT-1 in den folgenden wesentlichen Punkten:

- TURBIT-2 enthält die Steuerung für die Temperaturintegration, die Temperaturmodelle und die zugehörige Galilei-Transformation $T - \langle T \rangle$. Die Temperaturwandbedingungen T_w und \dot{q}_w können als Funktion der x_2 -Richtung angegeben werden. Alle mit der Temperaturintegration verknüpften Rechnungen sind derart angelegt, daß es auch mit TURBIT-2 möglich ist, die Geschwindigkeitsfelder alleine zu integrieren. Dabei wird automatisch der Kernspeicherbereich freigegeben, den die mit der Temperaturintegration verbundenen Daten benötigen würden.
- Die Schwierigkeiten bei der Berechnung der Feinstrukturkonstanten mit den Näherungsformeln für die Volumenintegrale werden durch nur einmalige Berechnung vor den Anfangswerten (Abb. 11) umgangen. Es ist so möglich, die rechenintensive numerische Integration der Volumenintegrale anzuwenden. Durch konsequente Ausnutzung aller Symmetrieeigenschaften der Maschennetze und Mehrfachintegrale werden lediglich zwischen 1 und 12 min Rechenzeit für die Konstantenberechnung benötigt.
- Die Einschränkung auf die Verwendung feiner Maschennetze und glatter Wände durch das inhomogene Impulsfeinstrukturmodell ist beseitigt.
- Die Einschränkung des Reynolds-Zahlenbereiches auf hohe Reynolds-Zahlen ist durch die Erweiterungen im Produktionsterm und im Dissipationsterm der Feinstrukturenergiegleichung beseitigt.
- Zur Einleitung von Sekundärströmungen können umfangsvariable Rauigkeiten vorgegeben werden. Dies ist nicht nur ein Problem der Erweiterung

der Eingabe, da in den TURBIT-Programmen alle zusammengesetzte Faktoren, die nicht von den Geschwindigkeitsfeldern abhängen, zu Konstanten zusammengefaßt und nur einmal vor der Integration berechnet werden (Abb. 12). Dies ist außerdem ein Problem der Verallgemeinerung der inhomogenen Modelle (Gradientenansatz nicht nur in x_3 -Richtung).

- TURBIT-2 bietet die Möglichkeit, zeitliche Mittelwerte der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder und einige Korrelationen zu berechnen. Die Berechnung der zeitlichen Mittelwerte ist flexibel angelegt, um jederzeit auch andere zeitliche Mittelwerte berechnen zu können. Sie ist so mit der Integration verknüpft (Abb. 12), daß keine zusätzlichen Zugriffe auf die Direktzugriffsdatei des virtuellen Speichers (File 12 in Abb. 12) erforderlich werden. Der Rechenzeitanstieg durch die zeitliche Mittelwertbildung ist kaum feststellbar.
- Die Druck- und Temperaturfelder sind in die dynamische Datenblockverwaltung einbezogen. Alle Felder werden nach jeweils NLEAP+1 Zeitschritten (NLEAP=Zahl der leapfrog-Schritte, rechter Teil in Abb. 12) auf magnetische Datenträger (File 14 in Abb. 12) gerettet. Dadurch liegen auch Ergebnisse zu Zwischenzeiten zur Auswertung vor.
- Das Auswerteprogramm ist durch das Retten aller Felder vollkommen vom Integrationsprogramm entkoppelt (Abb. 11). Es verarbeitet vollautomatisch die Ergebnisse der Integrationsläufe. Die Art der Auswertung und der auszuwertende Zeitbereich sind wählbar. Es kann über die Einzelergebnisse der verschiedenen Zeitpunkte zeitlich gemittelt werden. Höhenlinien- und Vektorplotprogramme [Schumann 1971, Leinemann 1972] können für eine zeitabhängige Darstellung der Felder bei Bedarf gelinkt werden.

Bei der Programmierung von TURBIT-2 wurde auf dem vorhandenen Rechenprogramm TURBIT-1 aufgebaut. Es wurde entsprechend der aufgezählten Eigenschaften erweitert, geändert oder stellenweise neu geschrieben. Zusätzliche umfangreiche Änderungen wurden alleine aus programmiertechnischen Gründen in den Steuerunterprogrammen (linke+rechte Seite von Abb. 12) erforderlich, weil die Kapazitäten des FORTRAN-H-Compilers überschritten wurden. Das Auswerteprogramm ist bis auf wenige Unterprogramme vollkommen neu erstellt worden. Es gibt Unterprogramme im gesamten Programmpaket nach Abb. 11, das schätzungsweise 15 000 bis 20 000 Lochkarten umfaßt, die unverändert übernommen wurden und mir durch ihre zuverlässige Arbeitsweise nur namentlich bekannt sind (z.B. zur Berechnung des Potentials Ψ).

Allen Programmierarbeiten wurden folgende Grundsätze vorangestellt:

1. Die Programme müssen alles automatisch steuern und überwachen! Der Grund für diese Forderung liegt darin, daß Programme des genannten Umfangs nicht mehr überschaubar sind und daß Eingabefehler, samt Überschreiten von Gültigkeitsbereichen, eine der häufigsten Fehlerursachen darstellen. Die Eingaben sind deshalb möglichst kurz und lesbar gehalten und werden auf ihre Verträglichkeit mit dem Modell geprüft.
2. Die aktivsten Teile der Programme müssen wegen der hohen Rechenzeiten optimal programmiert sein! Die aktivsten Teile sind in Abb. 12 rechts dargestellt. In diesen Teilen verbraucht das Rechenprogramm mehr als 90% der gesamten Rechenzeit. Entsprechend werden in den Integrationsunterprogrammen z.B. nur 1-dimensionale Felder benutzt und die Zahl der Zugriffe auf Feldelemente ist minimalisiert. In den übrigen Unterprogrammen, die nur selten benutzt werden (Abb. 12 links), wurde zunehmend eine benutzerfreundliche, d.h. lesbare Programmierweise gewählt.

Der Kernspeicherbedarf des Integrationslaufes (ohne Plot-Unterprogramme) setzt sich zusammen aus 324 K Byte für das Programm ohne Arbeitsfelder und aus 30 K für den Ein- und Ausgabepuffer. Hinzu kommt der vom Problem abhängige Arbeitsbereich für Konstanten, Potential ψ und Arbeitsfelder der dynamischen Datenblockverwaltung. Für das größte hier benutzte Maschennetz mit $64 \cdot 32 \cdot 16$ Maschen sind das 167 K für Konstanten, Zeitmittelwerte und Potential ψ und mindetsens $64 \cdot 32 \cdot 37 \cdot 4 \approx 303$ K für die Arbeitsfelder der dynamischen Datenblockverwaltung. Die Zahl 37 ergibt sich aus dem Euler-leapfrog-Verfahren und gibt die Mindestzahl der im Kernspeicher gleichzeitig benötigten Blöcke an. Die Zahl 4 gibt mit 4 Byte/Wort die Wortlänge an. Der minimale Kernspeicherbedarf für das genannte Netz beträgt damit 824 K Byte. Die Vorgabe eines wesentlich größeren Kernspeicherbereiches erwies sich bei den Rechnungen auf der IBM 370/168 des Kernforschungszentrums im Spätsommer 1976 nicht als sinnvoll, da bei Reservierung von z.B. 1000 K die Kosten für die Direktzugriffsdatei (File 12 in Abb. 12) des virtuellen Speichers nur etwa 15% der gesamten Rechenkosten betragen, und da beim Überschreiten von ca. 1200 K eine besondere Bearbeitung durch die Operateure einsetzte, die den Durchsatz von Zweistundenläufern von einem Lauf pro Nacht auf einen Lauf pro Woche reduzierte.

6. NUMERISCHE ERGEBNISSE

In Übereinstimmung mit der Zielsetzung dieser Arbeit nach Kapitel 1.3 wurde im Kapitel 3 ein überarbeitetes und verbessertes Impulsfeinstrukturmodell eingeführt, das auch auf schlecht auflösende Maschennetze, auf Strömungen mäßiger Reynolds-Zahlen und auf Kanäle mit rauhen Wänden anwendbar ist. Das eingeführte Temperaturfeinstrukturmodell berücksichtigt zusätzlich die Abhängigkeit von der molekularen Prandtl-Zahl. In diesem Kapitel wird an numerischen Ergebnissen des Rechenprogramms TURBIT-2 gezeigt, daß die erweiterten und neuen Schließungsmodelle die gestellten Anforderungen erfüllen.

Die numerischen Ergebnisse zum turbulenten Impulsaustausch stimmen bei großen und bei kleinen Maschen, bei großen und bei kleinen Reynolds-Zahlen und bei glatten und bei rauhen Wänden recht gut mit experimentellen Ergebnissen überein. Die qualitative Übereinstimmung der Auswirkungen der Sekundärströmung bei Kanälen mit ortsabhängiger Wandrauigkeit ist ebenfalls gut. Die numerischen Ergebnisse des Temperaturteiles zeigen bei molekularen Prandtl-Zahlen $Pr \lesssim 1$ nur geringe Abhängigkeiten von offenen Modellparametern. Bei Flüssigmetallströmungen mit Peclet-Zahlen $Pe \lesssim 1000$ treten im gesamten Temperaturteil keine Modellparameter oder empirisch bestimmte Größen auf. Die Ergebnisse liegen im breiten Streuband experimenteller Ergebnisse. Sie werden von den wenigen zur Verfügung stehenden, zuverlässigen Experimenten bestätigt.

6.1 Programm- und Modellprüfung

6.1.1 Tests mit laminaren Strömungen

Zur Prüfung der Fehlerfreiheit und Genauigkeit der Differenzenformeln werden Rechnungen für laminare Anlaufprobleme benutzt. Als Anfangswerte werden alle Felder $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{T}, \underline{E}, \underline{p})$ zusammen mit den Wandwerten auf Null gesetzt. Bei der molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 1$ entwickeln sich dann unter Vorgabe gleicher Werte für Wärmequellichte und Druckgradient nach (2-12) und (2-23) das u_1 und das T-Feld gleich, wenn die Differenzenformeln konsistent programmiert sind.

Die Teile des Impulsteiles von TURBIT-2, die bei laminarer Strömung benutzt werden, entstammen nahezu unverändert von TURBIT-1, das Schumann [1973a] ausführlich auf seine Genauigkeit getestet hat. Über kurze Integrationszeiten ($t < 1$) bleiben die berechneten Temperaturfelder gleich den u_1 -Feldern, so daß auch die Genauigkeit des Temperaturteiles ausrei-

chend ist. Über lange Integrationszeiten ($t > 10$) steigt jedoch das Temperaturprofil um 1% bis 2% schneller an, als das Geschwindigkeitsprofil. Da diese Abweichung bei den Tests mit EDDY nicht auftritt, muß der Unterschied in der unterschiedlich formulierten Wandbedingung von u_1 in TURBIT-1 und von T gesucht werden. Wie im Kapitel 4.3.2 erläutert, darf τ_w bei instationärer Strömung nicht fest vorgegeben werden. Vielmehr kann bei laminarer Strömung der Gradient in (4-22) linear approximiert werden, wie in (4-15,17). Mit dieser konsistenten Wandbedingungsformulierung bleiben auch über lange Integrationszeiten die Abweichungen zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturprofil unter 1% der betreffenden Maximalwerte.

Einen weiteren Beweis dafür, daß keine schwerwiegenden Fehler in den Differenzenformeln enthalten sind, liefern die Ergebnisse der bei dem Anlaufproblem berechneten Geschwindigkeits-, Energie- und Druckfelder. Alle Felder, außer dem u_1 -Feld, bleiben exakt Null, was u.a. bedeutet, daß das Differenzenverfahren exakt die Kontinuitätsgleichung erfüllt und daß die u_1 - und T -Felder von den übrigen Feldern bei diesem linearen Testproblem vollkommen entkoppelt sind.

Daß auch die übrigen Felder untereinander entkoppelt sind, kann mit der Nachrechnung von Anlaufproblemen mit gleichzeitig in x_2 -Richtung bewegten Wänden ($u_{2wi} \neq 0$) gezeigt werden. Diese Bewegung führt bei laminarer Plattenkanalströmung lediglich zu einem (im angelaufenen Zustand) linearen u_2 -Profil, ohne die übrigen Felder zu beeinflussen.

Alle diese Tests lassen darauf schließen, daß die programmierten Differenzenformeln für die Nachrechnung laminarer Probleme keine offensichtlichen Fehler enthalten und daß die Genauigkeitsangaben für das Rechenprogramm TURBIT-1 auf das Programm TURBIT-2 übertragen werden können.

6.1.2 Tests mit turbulenten Strömungen

Mit der Nachrechnung laminarer Strömungen können lediglich die Differenzenformeln aus Kapitel 2 und 4 überprüft werden, nicht aber die Programmdarstellung der Feinstrukturmodelle nach Kapitel 3. Diese können nur bei turbulenter Strömung getestet werden. Das Fehlen analytischer Lösungen zur Beschreibung der Turbulenzfelder erlaubt es allerdings nicht, Momentanwerte der Felder quantitativ zu vergleichen. Es können lediglich statistische Auswertungen der Felder mit experimentellen Ergebnissen quantitativ verglichen werden (Kap. 6.2) und mehr qualitative Einflußstudien

zur Prüfung des physikalischen Gehaltes der Modelle durchgeführt werden.

6.1.2.1 Bereitstellen turbulenter Anfangsfelder

Es werden Anfangswerte für die Geschwindigkeits-, Energie- und Temperaturfelder benötigt. Da hier nur stationäre Felder (im statistischen Sinne) untersucht werden sollen, sollten zur Verkürzung der Rechenzeit bis zum voll eingelaufenen Gleichgewichtszustand die Anfangsfelder bezüglich der statistischen Eigenschaften schon sehr nahe an den Lösungen liegen, d.h. in der Nähe experimenteller Erfahrungen.

Die Anfangsfelder für Geschwindigkeiten und Energie werden in den meisten Fällen wie von Schumann [1973a] ermittelt. D.h. die Geschwindigkeitsfelder werden unter Vorgabe von zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofilen (z.B. logarithmischen Wandgesetzen) aus mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erwürfelten Potentialen so berechnet, daß sie die Kontinuitätsgleichung erfüllen und ein Kolmogorov-Spektrum aufweisen. Die Feinstrukturenergieverteilung wird aus der stationären Lösung von (3-93) berechnet.

In den Fällen, in denen für gleiche Maschennetze schon Simulationsergebnisse vorliegen, und nur z.B. das Radienverhältnis oder die Reynolds-Zahl geringfügig geändert werden sollen, ist es sinnvoll, auf die vorhandenen Ergebnisse zurückzugreifen und diese durch Änderung der Radienverhältnisse oder durch Anpassung des mittleren Geschwindigkeitsprofils, bei stark asymmetrischen Fällen auch der Grobstrukturenergie, an die erwarteten Profile anzupassen. Der Rechenzeitgewinn ergibt sich im wesentlichen aus den besseren statistischen Eigenschaften der Anfangsfelder, wie besserer Grobstrukturenergie- und Schubspannungsverteilung.

Die Anfangswerte für das Temperaturfeld sollten ebenfalls sehr nahe an den Lösungen liegen. Hier wird bei der Neuerstellung von den Anfangswerten der erwürfelten Felder der Hauptströmungsgeschwindigkeit u_1 ausgegangen. Diese werden zunächst zur statistischen Entkoppelung um $x_1 = X_1/2$ gespiegelt, ihr Profil entsprechend dem logarithmischen Temperaturprofil geändert und als letztes die Temperaturschwankungsenergie an die zu erwartenden Verläufe, soweit diese überhaupt aus experimentellen Ergebnissen bekannt sind, grob angenähert. Auch hier kann Rechenzeit gespart werden, wenn für das verwendete Maschennetz schon ähnliche Simulationsergebnisse vorliegen und diese nur geringfügig verändert werden müssen, weil dann schon von einer weitgehend physikalisch sinnvollen statistischen Abhängigkeit zwischen dem

Geschwindigkeitsfeld und dem Temperaturfeld, z.B. den turbulenten Wärmeströmen, ausgegangen werden kann. Für das Bereitstellen der Anfangsfelder wird bis zu 1 Minute Rechenzeit benötigt.

6.1.2.2 Beurteilung des Einlaufzustandes

Die experimentellen Ergebnisse von Comte-Bellot [1965] zeigen, daß die Einlauf­längen, die zum Erreichen stationärer statistischer Eigenschaften der Geschwindigkeitsschwankungsfelder benötigt werden, erheblich größer sind, als diejenigen zum Erreichen eines konstanten Druckabfalls. Während der konstante Druckabfall nach etwa 30 Kanalweiten erreicht wird, werden konstante rms-Werte (root-mean-square)

$$Y_{rms} = \sqrt{\langle Y'^2 \rangle} \quad (6-1)$$

erst nach etwa 50 Kanalweiten erreicht, und eine konstante Schiefe (skewness)

$$Y_{skew} = \frac{\langle Y'^3 \rangle}{Y_{rms}^3} \quad (6-2)$$

bzw. eine konstante Flachheit (flatness)

$$Y_{flat} = \frac{\langle Y'^4 \rangle}{Y_{rms}^4} \quad (6-3)$$

der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Geschwindigkeitsfluktuationen stellt sich erst nach etwa 60 Kanalweiten ein. Übertragen auf das Anlaufproblem in den hier berechenbaren unendlich ausgedehnten Kanälen können daraus die entsprechenden Anlaufzeiten abgeschätzt werden. Bei einer mittleren Geschwindigkeit von $\langle u_1 \rangle \approx 20$ werden die geforderten 60 Kanalweiten in $t \approx 3$ Zeiteinheiten zurückgelegt. Um den dann erreichten stationären Zustand zuverlässig auswerten zu können, müssen die berechneten Felder über einige zusätzliche Zeiteinheiten bekannt sein. Die Zahl dieser zusätzlich geforderten Zeiteinheiten richtet sich sehr stark nach der Art der Auswertung und kann nicht generell abgeschätzt werden.

Geht man von den nach Kapitel 6.1.2.1 erzeugten Anfangswerten aus, dann ändern sich die oben genannten statistischen Größen während der Anlaufphase kaum. Sie können deshalb nur bei sehr mangelhaft vorgegebenen Anfangswerten als Einlaufkriterium benutzt werden.

Als sehr zuverlässige Einlaufkriterien erweisen sich dagegen die Kreuzkorrelationen zwischen Geschwindigkeitsschwankungen, insbesondere die turbulente Schubspannung $\langle u_1' u_3' \rangle$.

In Abb. 13 ist die über zwei verschiedene Zeitbereiche gemittelte turbulente Schubspannung für einen Ringspalt mit dem Radienverhältnis $R_1/R_2 = 0,25$ dargestellt: Im ersten Zeitbereich legte das Fluid 18 Kanalweiten zurück, im zweiten 88 Kanalweiten. Die Anfangswerte wurden mit einem Zufallszahlengenerator nach Kap. 6.1.2.1 ermittelt. Die über den späteren Zeitbereich gemittelte turbulente Schubspannung, bestehend aus Grobstrukturanteil $\langle \overline{u_1^1}, \overline{u_3^3} \rangle$ und inhomogenem Modellanteil $\langle \overline{u_1^1}, \overline{u_3^3} \rangle$, zeigt den erwarteten, glatten Verlauf. Hingegen zeigt die über die erste Zeiteinheit gemittelte Schubspannung einen schlängelförmigen Verlauf. Da der inhomogene Anteil in beiden Zeitbereichen etwa gleich ist, kann man annehmen, daß sich wegen (3-68,85) das Geschwindigkeitsprofil zwischen den beiden Zeitbereichen nur unwesentlich ändert, und daß die Änderung überwiegend durch den allmählichen Aufbau der Korrelation zwischen den einzelnen Grobstrukturgeschwindigkeitsschwankungen bewirkt wird. Dieser Aufbau beginnt an den Wänden und breitet sich von dort ins Kanalinnere aus. Die nach diesem Kriterium ermittelten Anlaufzeiten decken sich mit der obigen Abschätzung.

Für die Beurteilung des Einlaufzustandes der Temperaturfelder gilt prinzipiell dasselbe. Der thermische Einlauf für Temperaturprofile ist kürzer, als der für Temperatur-rms-Werte [Tanimoto, Hanratty 1963]. Es muß selbst bei ausgebildeten Geschwindigkeitsfeldern in Abhängigkeit von der Reynolds- und der Prandtl-Zahl [Gärtner 1974] mit Einlaufängen von 25 Kanalweiten [Genin u.a. 1974] bis zu ca. 50 Kanalweiten [Y.Lee 1964] gerechnet werden. Aufgrund der guten Anfangswertevorgabe muß hier analog die Kreuzkorrelation zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturschwankungen, z.B. der turbulente Wärmestrom $\langle \overline{u_3^1}, \overline{T^1} \rangle$, als Kriterium zur Beurteilung des Einlaufzustandes des Temperaturfeldes herangezogen werden. Auch dessen Grobstrukturanteil $\langle \overline{u_3^1}, \overline{v^1}, \overline{T^1} \rangle$ baut sich nur langsam von den beheizten oder gekühlten Wänden ausgehend auf.

6.1.2.3 Prüfung der Modelleinflüsse

Das Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, daß die programmierten Feinstrukturmodelle auf die numerischen Ergebnisse den Einfluß haben, wie er in Anhang 5 abgeschätzt wurde, zu zeigen, wie unempfindlich die Ergebnisse teilweise auf Änderungen in den offenen oder unsicheren Parametern reagieren und dabei einen optimalen Korrekturfaktorsatz zu finden. Um bei diesen Rechnungen einen hohen Modelleinfluß zu erreichen, wird ein nur schlecht auflösendes Maschennetz mit nur 2048 Maschen benutzt (Netz K7 in Tab. 11) und die Reynolds-Zahl mit $Re = 1,4$ bzw. $3 \cdot 10^5$ (Tab. 12) hoch angesetzt.

6.1.2.3.1 Prüfung des Impulsmodells

Im Anhang 5 wurde gezeigt, welche Abhängigkeit die Grob- und Feinstrukturenergie theoretisch von den Feinstrukturkonstanten C_2 und C_3 haben sollten. Überträgt man die Ergebnisse (A5-20,21) auf das erweiterte Impulsmodell mit der verbesserten Energiegleichung, dann erhält man mit den Gleichungen (3-80,94,105) folgende Abhängigkeiten vom isotropen Modell:

$$\sqrt{E'} \sim 1/C_2^2 \sim \sigma_1^2 \quad (6-4)$$

$$\sqrt{E'} \sim C_3/C_2^3 \sim \begin{cases} \sigma_1^3/(C_{31}\sigma_2^2) & \text{Wandnähe} \\ \sigma_1^3/\sigma_2 & \text{Kanalmitte} \end{cases}$$

Berücksichtigt man, daß das inhomogene Modell mit der Konstanten C_{10} ebenso wie das isotrope Modell wirkt, dann erhält man die zusätzlichen Abhängigkeiten

$$\sqrt{E'} \sim 1/C_{10}^2 \quad (6-5)$$

$$\sqrt{E'} \sim C_3/C_{10}^3 \sim 1/(C_{31}\sigma_2^2 C_{10}^3)$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den numerischen Ergebnissen für die gesamte Turbulenzenergie

$$E_{gs} = \langle \sqrt{E'} \rangle + \langle \sqrt{E'} \rangle = \langle \sqrt{E'} \rangle + \left\langle \frac{\overline{u_i'^2}}{2} \right\rangle \quad (6-6)$$

für $K = 2$ (Wandnähe) bzw. für $K = KM/2 = KMH$ (Kanalmitte) nach Abb. 14, dann findet man die meisten Tendenzen korrekt wieder. An nur wenigen Stellen in dem weiten Parameterfeld treten Widersprüche auf, offensichtlich aufgrund zu kurzer Anlauf- und Mittelungszeiten. Die Konstante C_{31} des Dissipationsmodells und der zugehörige Korrekturfaktor σ_2 beeinflussen über weite Bereiche die Energien nur sehr geringfügig. Ihre Werte können damit gemäß (3-95) und (3-105) ohne Anpassung benutzt werden. Der Korrekturfaktor σ_1 des isotropen Modells hat entsprechend (6-4) einen recht kräftigen Einfluß auf die Energie. Und die Konstante C_{10} des inhomogenen Modells wirkt besonders bei hohen isotropen Zähigkeiten (σ_1 klein) gemäß (6-5) sehr stark dämpfend auf die Energie. Bei geringen isotropen Zähigkeiten (σ_1 groß) hat sie dagegen einen sehr geringen Einfluß. Aus der Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit denen nach den Abschätzungen (6-4) und (6-5) kann wenigstens qualitativ auf eine korrekte Behand-

lung der Impulsfeinstrukturmodelle und der Energiegleichung im Rechenprogramm TURBIT-2 geschlossen werden.

In Abb. 15 ist als Repräsentant der integralen Strömungsdaten die Abhängigkeit von

$$\Delta V_{\max} = \langle \bar{u}_{1,\max} \rangle - \langle \bar{u}_1 \rangle \quad (6-7)$$

wiedergegeben. Bei hohen C_{10} - und ϑ_1 -Werten tritt fast keine Abhängigkeit von irgendeinem der Modellparameter auf und der Wert von ΔV_{\max} liegt sehr nahe dem aus den Experimenten von Nikuradse [1932], Barthels [1967], Clark [1968], Lawn [1971], Hussain, Reynolds [1975] und Rehme [1975b] abschätzbaren Wert

$$\Delta V_{\max} \approx 3. \quad (6-8)$$

Zu einem optimalen Parameterpaar (ϑ_1, C_{10}) kommt man durch Vergleich der drei Abhängigkeiten mit experimentellen Ergebnissen. Die in Abb. 14 eingezeichneten Vergleichswerte

$$\begin{aligned} E_{\text{ges } 2} &= 3,3 \\ E_{\text{ges KMH}} &= 0,85 \end{aligned} \quad (6-9)$$

können aus den Ergebnissen von Laufer [1954], Comte Bellot [1965] und Rehme [1975a,b] abgeschätzt werden. Die Schnittlinien der experimentellen und numerischen Ergebnisse sind, als Geraden approximiert, in Abb. 16 über ϑ_1 und C_{10} aufgetragen. Als optimales Wertepaar erhält man:

$$\begin{aligned} C_{10} &= 2,0 \\ \vartheta_1 &= 1,4 \end{aligned} \quad (6-10)$$

Diese Werte liegen allen Simulationen dieser Arbeit zugrunde. C_{10} hat in diesem Bereich nach obigen Ergebnissen keinen starken Einfluß. Lediglich der Wert von ϑ_1 bewirkt empfindliche Änderungen der numerischen Ergebnisse.

6.1.2.3.2 Prüfung des Temperaturmodells

Die Abhängigkeit der berechneten Temperaturfelder von den Temperaturfeinstrukturmodellen ist einfach abzuschätzen, da durch das Fehlen von Auftriebstermen keine Rückwirkung über die Energiegleichung besteht. Eine Vergrößerung der Feinstrukturwärmeströme wird eine Verringerung der Grob-

strukturtemperaturschwankungen bewirken und gleichzeitig die Temperaturprofile fülliger machen. Dieser Einfluß wird bei großen Prandtl-Zahlen größer sein, als bei kleinen.

Die Rechnungen zur Untersuchung dieser Tendenzen werden für $Pr = 0,7$ ebenfalls mit dem Netz K7 und bei der Reynolds-Zahl $Re = 3 \cdot 10^5$ mit den in Tab. 12 angegebenen thermischen Randbedingungen durchgeführt. Experimentelle Vergleichswerte für das Maximum des logarithmischen Temperaturprofils werden aus der Literaturübersicht in Abb. 17 extrapoliert:

$$T_{max}^+ (Y^+ \approx 6000) = 24 \quad (6-11)$$

und die zugehörigen Temperatur-rms-Werte werden der Literaturübersicht in Abb. 18 entnommen:

$$\sqrt{\langle T'^2 \rangle}_{max} (Pr = 0,7) = 1,6 \quad (6-12)$$

Bei der Berechnung der Temperatur-rms-Werte aus den numerisch simulierten Temperaturfeldern wird der Feinstrukturanteil der Temperaturschwankungen nach Anhang 6 (A6-1,2,10) berücksichtigt.

Die numerischen Ergebnisse sind in Abb. 19 zusammengestellt. Die Konstante C_{T10} des inhomogenen Modells zeigt den erwarteten Einfluß zunehmender Dämpfung, d.h. Reduktion der rms-Werte und Reduktion des Temperaturmaximums bei Vergrößerung von C_{T10} . Auffallend ist, daß für Werte $C_{T10} \geq 1$ kaum noch ein Einfluß feststellbar ist, und daß alle Ergebnisse im Streubereich der experimentellen Ergebnisse liegen (vgl. Abb. 17,18). Auch der Einfluß von γ_T aus dem isotropen Modell ist sehr klein. Eine Vergrößerung von γ_T führt erwartungsgemäß über die Verringerung von C_{T2} nach (3-28) zu einer Vergrößerung der Grobstrukturtemperaturschwankungen. Wegen der hohen Unempfindlichkeit der Ergebnisse gegen Änderung der Modellparameter wird für die weiteren Rechnungen nahezu willkürlich angenommen:

$$\begin{aligned} C_{T10} &= 1 \\ \gamma_T &= \gamma_1 = 1,4 \end{aligned} \quad (6-13)$$

Die Tests für flüssiges Natrium mit $Pr = 0,007$ werden ebenfalls mit dem Netz K7 durchgeführt, jedoch für die Reynolds-Zahl $Re = 1,4 \cdot 10^5$ (Tab. 12). Die Feinstrukturkonstante C_{T2} gemäß (3-55) liefert in diesem Falle im Zentrum des Kanals in 6 der 16 radialen Maschen den Wert Null. Nach der Konvention (3-114) und Kapitel 3.2.3.2 wird daher $C_{T10} = 0$ gesetzt. Der Ein-

fluß des Faktors \mathcal{D}_T ist damit der einzig offene Parameter des Temperaturmodells. Abb. 20 verdeutlicht, daß sein Einfluß trotz der Änderung um fast drei Größenordnungen praktisch nicht feststellbar ist. D.h. auch bei Flüssigmetallen kann der Wert $\mathcal{D}_T = 1,4$ nach (6-13) unverändert benutzt werden. Eine Manipulation der numerischen Ergebnisse des Temperaturfeldes ist praktisch nicht mehr sinnvoll möglich.

Damit tritt bei allen Prandtl-Zahlen $Pr \lesssim 1$ eine erfreulich geringe Abhängigkeit der simulierten Temperaturfelder von den Temperaturmodellparametern auf. Diese mit dem numerischen Modell gewonnene Erfahrung stimmt qualitativ mit der Abschätzung der Feinstrukturanteile der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder für $Pr \approx 1$ nach (A6-9) ebenso überein, wie mit den experimentell bestimmten Energie- und Temperaturspektren von Yeh, Van Atta [1973] und Zarić [1975].

6.2 Auswertung numerischer Ergebnisse

6.2.1 Maschennetz- und Fallspezifikation

Die Maschennetze, die den Simulationen dieser Arbeit zugrunde liegen, reichen von nur 2048 Maschen bis zu 32768 Maschen (Tab. 11). Größere Netze wurden aus Rechenzeitgründen nicht benutzt. Die Netze der in dieser Arbeit diskutierten Fälle haben in x_3 -Richtung die äquidistante Auflösung $\Delta x_3 = 1/16$. Die Auflösung in Hauptströmungsrichtung variiert von $\Delta x_1 = 1/8$ bis $1/16$, die in x_2 -Richtung von $\Delta x_2 = 3/16$ bis zu $1/16$. Aus diesen Maschenweiten ergeben sich zusammen mit den gewählten Zahlen IM, JM, KM für die Anzahl der Maschen in den drei Maschennetzrichtungen die Periodenlängen $X_1 = 2$ bis 4 , $X_2 = 1$ bis 3 , bzw. die Periodenwinkel $\phi = \pi/2$ bis $\pi(4-9,10)$.

Die mit diesen Netzen berechneten Fälle sind in Tab. 12 zusammengestellt. Gekennzeichnet sind die Fälle durch das Maschennetz und durch den Namen der Experimentatoren, deren Kanal- oder Experimentdaten, wie Radienverhältnis, Reynolds-, Prandtl-Zahl oder Rauigkeit zum Vergleich herangezogen werden. Der Fall K3 mit Netz K2.3 ist die Weiterintegration des Falls K3 von Schumann [1973a]. Die festgelegten Radienverhältnisse überdecken den Bereich von $R_1/R_2 = 0,1$ bis 1 , die Reynolds-Zahlen den Bereich von $18\ 700$ bis $300\ 000$., und die Prandtl-Zahlen den Bereich von $0,007$ bis 7 . Durch diese Parameterfestlegung können praktisch alle zur Verfügung stehenden Experimente zur Temperaturfeldauswertung (siehe Tab. 13) zum Vergleich benutzt werden. Jedoch können lediglich die Temperaturprofile verglichen

werden, da in den berechenbaren Kanälen keine übertragbaren experimentellen Daten zur Temperaturfeldstatistik bekannt sind.

Die in Tab. 12 eingetragenen Problemzeiten zeigen, daß in den meisten Fällen über mehr als 3 Zeiteinheiten integriert wurde, so daß gewöhnlich ca. eine Zeiteinheit zur Auswertung mit zeitlicher Mittelwertbildung zur Verfügung steht. Die Rechenzeiten erstrecken sich von 10 min bis zu 18 Stunden.

Bei der Darstellung der Ergebnisse in den folgenden Kapiteln wird überwiegend nur der Fall "Z2.2-Ball" benutzt, weil bei dem Radienverhältnis $R_1/R_2 = 0,25$ Vergleichsexperimente bekannt sind und gleichzeitig aber wegen der relativ hohen Prandtl-Zahl ($Pr = 0,7$) und niedrigen Reynolds-Zahl ($Re = 25\ 000$) hohe Ansprüche an die Feinstrukturmodelle, insbesondere an die Energiegleichung, gestellt werden.

6.2.2 Auswertung der Geschwindigkeitsfelder

6.2.2.1 Glatte Kanäle

Der Sinn dieses Kapitels soll es nicht sein, zu zeigen, daß TURBIT-2 sehr gut experimentelle Ergebnisse wiedergeben kann. Dies wurde für die Ergebnisse feiner Maschennetze für TURBIT-1 von Schumann [1973a,b, 1975a,b] schon nachgewiesen. Vielmehr sollen hier nur die Einflüsse des verbesserten Impulsfeinstrukturmodells aufgezeigt werden und die Richtigkeit in dem erweiterten Gültigkeitsbereich nachgewiesen werden.

6.2.2.1.1 Qualitative Beurteilung der Impulsmodellverbesserungen

Eine qualitative Beurteilung der Ergebnisse kann anhand von Höhenlinien- und Vektordarstellungen der berechneten Felder erfolgen. Für den besprochenen Fall Z2.2-Ball sind in Abb. 21 die Geschwindigkeitsschwankungsfelder, die Feinstrukturenergie, die gesamte Schwankungsenergie (6-6) und das zugehörige Druckfeld in der R-Z-Ebene aufgetragen. Die Höhenlinien zeigen beim Geschwindigkeitsfeld die Werte der Geschwindigkeiten von $\frac{2}{u_2}$ an, wobei negative Werte gestrichelt dargestellt werden, und die Vektoren zeigen nach Länge und Richtung (sie haben den Ursprung an den Knoten der Netzlinien) die Geschwindigkeitsschwankungen $\overline{u'_i} = \overline{u_i} - \langle \overline{u_i} \rangle$ in der Zeichenebene an. Die Höhenlinien beginnen bei Null. Das Höhenlinieninkrement Δ ist konstant. Sinngemäß gilt dies auch für die Höhenliniendarstellung der skalaren Felder.

Die Abbildungen vermitteln den erwarteten Eindruck randomer Felder. Es sind keine Symmetrien oder Regelmäßigkeiten zu erkennen, die erfahrungsgemäß auf Fehler oder auf Mängel im Korrekturfaktorsatz schließen lassen würden. Die Schwankungen sind in der Nähe der Wände größer als in Kanalmitte. Das Minimum der Schwankungen liegt näher an der Innenwand des Ringspaltes (R_1). Neu an diesen Ergebnissen ist, daß im Gegensatz zu den TURBIT-1-Ergebnissen, in Übereinstimmung mit experimentellen Erfahrungen [z.B. Rehme 1975b], die Energie an der Außenwand höher ist als an der Innenwand. Dies gilt auch für die berechnete Feinstrukturenergie.

Die Abb. 22 zeigt für denselben Kanal und Zeitpunkt die Geschwindigkeits- und Gesamtenergiefelder in einem Schnitt senkrecht zur Hauptströmungsrichtung. Auch diese Bilder lassen keine Regelmäßigkeiten erkennen und bestätigen die obigen Ergebnisse.

6.2.2.1.2 Quantitative Beurteilung der Impulsmodellverbesserungen

Der durch die Höhenliniendarstellungen vermittelte Eindruck, daß die von TURBIT-2 gelieferten Energieverteilungen physikalischen Tendenzen folgen, wird auch durch die über längere Zeiten ausgewerteten und gemittelten Ergebnisse zur Energieverteilung bestätigt (Abb. 23). Die Energie E_{ges} ist auch im zeitlichen Mittel an der Außenwand höher als an der Innenwand. Auch die Feinstrukturenergie $ESGS = \sqrt{E'}$ (SGS = sub grid scale) zeigt einen entsprechenden Verlauf.

An diesem Beispiel muß auf zwei Probleme des Modells hingewiesen werden:

1. Die Feinstrukturenergie wird, bezogen auf die Experimente von Lörcher [1976], etwas zu groß berechnet. Sie beträgt 15-30% der Gesamtenergie, sollte aber nach Lörcher nur ca. 10% betragen. Unterstellt man, daß die Feinstrukturenergie in TURBIT-2 tatsächlich zu groß berechnet wird, so erklärt dies die Notwendigkeit relativ großer Werte (1.4) für \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_T . Große Werte für diese Korrekturfaktoren vermindern den Einfluß der Feinstrukturenergie auf die turbulente Dämpfung der Grobstruktur.
2. Die Energieverteilung zeigt stets in der zweiten Masche von der Wand ein Maximum (siehe Abb. 23), das nicht verifizierbar ist. Sehr ausgeprägt wird dieses Maximum, wenn die Maschenweite Δx_3 in Wandnähe sehr klein gewählt wird. Es wird vermutet, daß dies mit der Formulierung der Wandbedingungen zusammenhängt. Denn in den meisten Termen wird bisher angenommen, daß das Maschennetz den wandnahen Bereich mit abfallender Turbulenz (viskose Unterschicht) nicht auflöst. Dies ist auch der einzige ersicht-

liche Grund, warum TURBIT-2-1976 nicht auf Reynolds-Zahlen um die kritische anwendbar ist.

Zusätzlich zur Energie sind in Abb. 23 die Beiträge der drei Dissipations-terme (3-98,106,112) zur Gesamtdissipation eingetragen. Der Term 3 (3-112) für die viskose Unterschicht ist hier erwartungsgemäß ohne Einfluß. Der Term 2 (3-106) für niedrige Reynolds-Zahlen ist etwa gleichbedeutend wie der Term 1 (3-98) für hohe Reynolds-Zahlen. In Wandnähe ist der Term 2 bestimmend, offensichtlich durch die Inhomogenitätserweiterung ($C_{31} \cdot \hat{\epsilon}$). Man kann davon ausgehen, daß die Einführung des Termes 2 einzig dafür verantwortlich ist, daß TURBIT-2 für kleine Reynolds-Zahlen sinnvoll anwendbar ist.

Bei der hohen Reynolds-Zahl des Falls K3, $Re = 2,5 \cdot 10^5$, hat der Term 2 des Dissipationsmodells wie erwartet nur noch einen sehr geringen Einfluß (Abb. 24). Hier ist mit Ausnahme der Wandmaschen der Term 1 für hohe Reynolds-Zahlen dominant. Die berechneten Feinstrukturenergien sind, entsprechend der Erweiterung der Spektren zu höheren Wellenzahlen, gegenüber der kleineren Reynolds-Zahl geringfügig angestiegen.

Die Abb. 25 zeigt Ergebnisse des härtesten Tests, der mit TURBIT-2 durchgeführt wurde. Es ist dies die Nachrechnung eines Ringspaltes mit dem Radienverhältnis R_1/R_2 , wie ihn Rehme [1975b] vermessen hat, wobei "nur" das Maschennetz 29 benutzt wurde. Selbst bei den dabei entstehenden stark anisotropen Maschen wird die Energieverteilung korrekt wiedergegeben und auch der Schubspannungskorrelationskoeffizient

$$R_{u'_1 u'_3} = \frac{\langle u'_1 u'_3 \rangle}{u_{1rms} u_{3rms}} \quad (6-14)$$

der durch seinen nicht ganz glatten Verlauf auf einen zu kurzen Anlauf schließen läßt, hat in der Außenzone einen horizontalen Verlauf. Dies entspricht etwa den Experimenten von Brighton, Jones [1964] und Durst [1968], widerspricht aber den Ergebnissen von Rehme [1975b]. Der Ort der Nullschubspannung wird trotz der starken Asymmetrie gut wiedergegeben.

6.2.2.1.3 Vergleich von Geschwindigkeitsprofilen

Das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil dieses Ringspaltes ist in Abb. 26 mit dem experimentellen Ergebnis von Rehme [1975b] verglichen. Beachtet man, daß die Simulation nicht Funktionswerte des Profils an einem Ort liefert, sondern wegen (2-34) Flächenmittelwerte, und daß diese wegen

(4-24) im Bereich des logarithmischen Wandgesetzes niedriger als die entsprechenden Funktionswerte sein müssen, und daß außerdem in den Abbildungen nur linear interpoliert wird, dann kann die Übereinstimmung als sehr gut bezeichnet werden. Dies gilt auch für den Ort des Geschwindigkeitsmaximums, den Absolutwert des Geschwindigkeitsprofils (Tab. 14), und den Reibbeiwert, der zu diesem Zeitpunkt um nur 5 % zu niedrig berechnet wird.

Das Geschwindigkeitsprofil des Falls Z2.2-Ball stimmt in der normierten Darstellung (Abb. 27) ebenfalls sehr gut mit Experimenten von Ball [1972] und Lee [1964] überein, zeigt jedoch absolut nach Tab. 14 gegenüber den Ergebnissen von Ball einen zu hohen Maximalwert und zu geringen Reibbeiwert. Diese Abweichung muß nach den Ergebnissen von Rehme [1975b] erwartet werden und liegt wahrscheinlich in der sehr dichten Abstandshalterfolge (alle 20 Kanalweiten ein Abstandshalter) der Ball'schen Experimente begründet. Für die Richtigkeit der numerischen Ergebnisse spricht außerdem die logarithmische Darstellung des Profils in Abb. 28. Das numerische Ergebnis folgt über weite Bereiche dem gefilterten logarithmischen Profil (z.B. nach 4-24). Die Maxima liegen in der Innenzone (Y_1^+) unterhalb oder gerade auf dem theoretischen Profil, und im Außenbereich klar darüber, wie dies auch aus Experimenten bekannt ist [z.B. Rehme 1975b].

Diese Ergebnisse zeigen, zusammen mit der Übersicht und dem Vergleich nach Tab. 14, daß das verbesserte Impulsmodell mit der erweiterten Energiegleichung die Erwartungen auch bei niedrigen Reynolds-Zahlen und bei schlecht auflösenden Netzen, wie dies das Z9-Netz ist, erfüllt und Ergebnisse hoher Güte liefert.

6.2.2.2 Einseitig rauher Plattenkanal

Daß dieser hohe Qualitätsstandard auch bei rauhen Kanälen und dem noch schlechter auflösenden Maschennetz K7 (Tab. 11) erreicht wird, wird an den numerischen Ergebnissen für einen von Baumann [1976a,b,c] vermessenen einseitig rauhen Plattenkanal verdeutlicht. Die im Experiment benutzte Rechteckrauigkeit wird aus den gemessenen Geschwindigkeitsprofilen in eine äquivalente Sandrauigkeit ($h_1^+ = 465$) umgerechnet. Die Reynolds-Zahl beträgt 194 900 (Tab. 12).

In Abb. 29 sind die aus den numerisch simulierten Geschwindigkeitsfeldern ausgewerteten Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilungen aufgetragen. Das berechnete logarithmische Geschwindigkeitsprofil ist steiler als das theoretische nach (3-17). Aus der Steigung zwischen der zweiten und dritten

Masche (vgl. Abb. 28) von der Wand kann man die Steigung zu $1/\kappa_{\text{rauh}} \approx 3$ abschätzen, und aus den weiter innen liegenden Maschen den Wert 3,8. Baumann [1976c] findet experimentell $1/\kappa_{\text{rauh}} = 2.937$. Das Geschwindigkeitsmaximum und der Reibbeiwert werden bis auf - 5% genau wiedergegeben (Tab. 15). Die positiven Abweichungen der numerischen Ergebnisse gegenüber den experimentellen sind konsistent mit dem Unterschied zwischen endlichem (in x_2 -Richtung) Plattenkanal im Experiment und unendlichem Plattenkanal in der Rechnung.

Der Ort von Geschwindigkeitsmaximum und Nullschubspannung werden ebenfalls mit dieser Genauigkeit wiedergegeben (Tab. 15). Die geringfügige Verschiebung beider Orte zur Kanalmitte hin wird durch die Gradientenansätze (3-68, 85) für das inhomogene Impulsmodell verursacht (Abb. 29); tatsächlich liegt der Ort des Geschwindigkeitsmaximums und der Nullschubspannung sehr weit auseinander, das Gradientenmodell andererseits impliziert, daß beide zusammenfallen. Der nichtlineare Verlauf der turbulenten Schubspannung läßt wieder darauf schließen, daß entweder die Strömung noch nicht voll angelaufen ist, oder aber daß die Mittelungszeit bei der Auswertung zu kurz ist.

Die Ergebnisse zeigen, daß das neue inhomogene Impulsfeinstrukturmodell zusammen mit der insbesondere um den inhomogenen Anteil des Produktionsterms (3-97) erweiterten Energiegleichung auch eine zuverlässige Behandlung rauher Kanäle zuläßt. Eine Modifikation der Korrekturfaktoren ist dazu nicht erforderlich.

6.2.2.3 Einseitig teilweise rauher Plattenkanal mit Sekundärströmung

Durch die erweiterte, allgemeine Formulierung der Gradientenansätze (3-8, 68) für die inhomogenen Modellanteile und durch die Möglichkeit, von der x_2 -Richtung abhängige Randbedingungen vorzugeben, können mit TURBIT-2 die Einflüsse von Sekundärströmungen rechnerisch untersucht werden. Eine solche Rechnung wurde mit dem sehr schlecht auflösenden Maschennetz K8 (Tab. 11) für einen Plattenkanal mit der Periodenlänge $X_2 = 3$ durchgeführt. Zum qualitativen Vergleich werden die Experimente von Hinze [1973] an einem Plattenkanal mit dem Seitenverhältnis 5:1 herangezogen. In beiden Fällen ist eine Wand glatt, und die andere in drei Streifen unterteilt, rauh-glatt-rauh (Fall K8-Hinze in Tab. 12).

6.2.2.3.1 Einfluß auf die turbulenten Geschwindigkeitsfelder

In Abb. 30 sind in Vektor- und Höhenliniendarstellung über kurze Zeiten gemittelte Geschwindigkeits- und Schubspannungsfelder aufgetragen. Die Höhenlinien der Hauptströmungsgeschwindigkeit $\langle \bar{u}_1 \rangle$ zeigen nicht ein Maximum in der Symmetrieebene im glatten Bereich, sondern zwei Maxima an den Grenzen zwischen den glatten und rauhen Bereichen, wie dies auch Hinze gefunden hat. Bewirkt wird dies durch die sich einstellende Sekundärströmung (Vektoren in Abb. 30). Sie führt in Wandnähe von den Gebieten höherer Wandschubspannung (rauhe Bereiche) zu dem Gebiet niedrigerer Wandschubspannung (glatter Bereich), treffen in Kanalmitte aufeinander und führen von dort zur gegenüberliegenden glatten Wand [Wang, Nickerson 1972, Hinze 1973]. Das auf diesem Wege transportierte Fluid mit niedrigem Impuls aus dem rauhen Wandbereich verhindert in der Symmetrieebene den Aufbau höherer Geschwindigkeiten. Die Geschwindigkeitsmaxima treten deshalb in Bereichen niedriger Sekundärströmungsgeschwindigkeiten in den Grenzbereichen zwischen glatt und rau auf.

Die Höhenliniendarstellungen der radialen ($\langle \bar{u}_1 \bar{u}_3 \rangle$) und azimutalen ($\langle \bar{u}_1 \bar{u}_2 \rangle$) turbulenten Schubspannungen zeigen, daß die Sekundärströmung nicht nur Impuls, sondern auch komplexere Turbulenzeigenschaften, wie die Korrelation zwischen Geschwindigkeitsschwankungen, über größere Entfernungen transportieren kann. So ist z.B. die radiale Schubspannung im Bereich der eingezeichneten Pfeile über mehr als die halbe Kanalweite konstant. Auch dies wird durch die Messungen von Hinze [1973] in der Symmetrieebene bestätigt. In der azimutalen Schubspannung ist dies weniger deutlich. Sie wird durch ausgeprägte Extremwerte an Orten großer azimutaler Geschwindigkeitsgradienten geprägt.

Die Verzerrungen der Geschwindigkeitshöhenlinien und der Höhenlinien der radialen Schubspannung weisen fast ausnahmslos in die Richtung des lokalen Sekundärströmungsvektors. Damit kann bei bekanntem Hauptströmungsgeschwindigkeits- oder Schubspannungsfeld das zugehörige Sekundärströmungsfeld qualitativ extrapoliert werden.

In wie weit das zu diesem Zeitpunkt dargestellte Sekundärströmungsmuster mit dem über lange Zeiten gemittelten Muster übereinstimmt oder nicht, muß offen bleiben. Es ist zumindest nicht anzunehmen, daß aneinander angrenzende Wirbel im zeitlichen Mittel gegensinnig drehen. Vielleicht ist dies nur ein Momentaneffekt oder auf die sehr große Maschenweite $\Delta x_2 = 3/16$ zurückzuführen. Für phänomenologische Turbulenzenuntersuchungen sind

aber gerade solche momentanen Abweichungen von den statistischen Gleichgewichtszuständen sehr nützlich.

6.2.2.3.2 Einfluß auf die turbulenten Temperaturfelder

Die Auswirkungen der Sekundärströmung auf das Temperaturfeld sind vergleichsweise gering (Abb. 31). Die Erklärung der auftretenden Anomalien kann jedoch nur unter Einschluß der Sekundärströmung erfolgen. So müßte bei den hier gewählten Temperaturreandbedingungen, konstante Wandtemperatur und interne Wärmequelle im Fluid (siehe Tab. 12), das Temperaturmaximum im Bereich des schlechteren Wärmeübergangs an die Wände, d.h. in der Symmetrieebene im glatten Bereich auftreten. Daß das Maximum dort nicht auftritt liegt daran, daß die oben beschriebene Sekundärströmung kälteres Fluid aus dem rauhen Wandbereich in die Symmetrieebene transportiert und dadurch dort eine sehr effektive Kühlung hervorruft.

Vergleicht man das Temperaturfeld mit dem Sekundärströmungsfeld, dann erkennt man, daß die Temperaturmaxima in Wirbelkernen auftreten, d.h. an Stellen, an denen die Sekundärströmungsgeschwindigkeiten sehr niedrig sind. Dieses Phänomen des schlechten turbulenten Wärmetransportes aus dem inneren ortsfester Wirbel ist aus den Experimenten zur Untersuchung des Temperaturfeldes hinter Blockaden in Reaktorbrandelementen bekannt [Grötzbach 1972, Kirsch 1974].

Bezüglich der Verzerrung der Höhenlinien von Temperatur- und turbulenten Wärmestromfeldern gilt dasselbe, wie bei den Geschwindigkeitsfeldern. Auch an diesen Höhenlinien ist, wenn auch wesentlich schwächer, die Richtung der lokalen Sekundärströmung ablesbar.

Die phänomenologischen Ergebnisse zur Auswirkung von Sekundärströmungen stehen in recht guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Es erweist sich als entscheidender Vorteil der numerischen Simulation, daß zu jeder Zeit alle Informationen über die räumliche Struktur des Strömungsfeldes zur Auswertung zur Verfügung stehen.

6.2.3 Auswertung der Temperaturfelder

Die guten Ergebnisse der berechneten Geschwindigkeitsfelder und die hohe Unempfindlichkeit der berechneten Temperaturfelder gegenüber Änderungen der Modellparameter (siehe Kap. 6.1.2.3.2) lassen auch sehr zuverlässige Ergebnisse für die turbulenten Temperaturfelder erwarten. Dieser Nachweis

wird durch Vergleich numerisch ermittelter Temperaturprofile mit experimentell ermittelten erbracht. Zusätzliche Ergebnisse der statistischen Auswertung der turbulenten Temperaturschwankungen finden zwar keine direkt vergleichbaren experimentellen Ergebnisse, lassen aber dennoch nach Vergleich mit Daten aus Rohr- und Plattenströmungen auf eine korrekte Temperaturfeldsimulation schließen.

6.2.3.1 Vergleich von Temperaturprofilen

Ein Vergleich berechneter und experimentell ermittelter Temperaturprofile wird für das Fluid Luft ($Pr = 0,7$) mit den Ergebnissen für den Z2.2-Ball-Ringspalt und den K2.2-Hsu-Plattenkanal (Tab. 12) durchgeführt, d.h. für Fälle, bei denen das inhomogene Temperaturmodell von Bedeutung ist und bei denen die Wandbedingungen über die logarithmischen Profile nach (4-18,21) benutzt werden. Und als Beispiel für eine lineare Wandbedingungsformulierung bei gleichzeitigem Verschwinden des inhomogenen Modells wird für das Fluid Quecksilber ($Pr = 0,0214$) ein Vergleich mit dem Z9-Dwyer-Ringspalt-Ergebnis (Tab. 12) durchgeführt. Damit können fast alle direkt vergleichbaren experimentellen Ergebnisse nach Tab. 13 benutzt werden.

Die Abb. 32 zeigt den Vergleich zwischen dem für den Fall Z2.2-Ball berechneten Temperaturprofil und den experimentellen Ergebnissen von Ball [1972], Lee [1964] und Barrow [1957]. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Lee und Barrow ist ausgezeichnet. Die Abweichung von dem Ball'schen Profil ist allerdings recht erheblich. Die Gründe hierfür sind wahrscheinlich wie beim Geschwindigkeitsprofil nach Kap. 6.2.2.1.3 in der sehr kurzen Abstandshalterfolge und in dem mit 29 Kanalweiten recht kurzen thermischen Einlauf der Ball'schen Experimente zu suchen. Ähnlich füllige Profile wurden von Nishihara und Ohtsubo [1969] bei mangelhaftem thermischen Einlauf in Rohren gemessen.

Für die Richtigkeit des numerischen Ergebnisses spricht auch die logarithmische Auftragung des Temperaturprofils in Abb. 32. Das numerische Ergebnis folgt stückweise dem logarithmischen Wandgesetz. Der Maximalwert liegt mit $T_{\max}^+ = 20,21$ an der Stelle $Y_1^+_{\max} = 1330$ etwas über dem Wandgesetz, was sehr gut mit der Literaturübersicht in Abb. 17 übereinstimmt. Die aus den Profilen nach (2-24,25) berechnete Nusselt-Zahl liegt im Bereich der experimentellen Ergebnisse (Tab. 14).

Für das Wärmedurchgangsproblem des K2.2-Hsu-Plattenkanals ist der Vergleich

der numerisch und experimentell [Hsu u.a. 1956] ermittelten Temperaturprofile in Abb. 33 dargestellt. Die Übereinstimmung ist nur befriedigend, weil die experimentellen Ergebnisse durch Naturkonvektionseinflüsse nicht symmetrisch sind. Um dies zu verdeutlichen, sind in der Abbildung die zur oberen und unteren Wand gehörigen Temperaturprofile an nur einer Wand zusammengezeichnet. Das numerische Ergebnis liegt zwischen beiden Profilen.

Die Abb. 34 zeigt den Vergleich der experimentellen Ergebnisse von Dwyer u.a. [1976] mit den numerischen Ergebnissen des Z9(!)-Dwyer-Ringspaltes (Tab. 12). Selbst bei diesem schlecht auflösenden Netz ist die Übereinstimmung der beiden Profile beachtlich. Das Abschalten des inhomogenen Modells nach (3-114) scheint hierdurch gerechtfertigt zu werden.

Etwas fragwürdig erscheint jedoch das Ergebnis für die Nusselt-Zahl (Tab. 14), verglichen mit dem Ergebnis des Z2.2-Dwyer-Ringspaltes mit niedrigerer Reynolds-Zahl, oder verglichen mit den Ergebnissen der empirischen Beziehung von Barthels [1967]. Offensichtlich liegt das Abschaltkriterium für das inhomogene Modell zwischen den Peclet-Zahlen und Maschennetzen der Fälle Z9- und Z2.2-Dwyer. Diese Erfahrung liegt durchaus im Bereich der in Tab. 1 angegebenen Mindestmaschenzahlen zur Auflösung aller Temperaturschwankungen.

Insgesamt gesehen fällt der Vergleich der Temperaturprofile mit experimentellen Ergebnissen in allen drei Fällen recht gut aus.

6.2.3.2 Auswertung der Temperaturschwankungsfelder

6.2.3.2.1 Qualitative Beurteilung

Für die qualitative Beurteilung der Temperaturschwankungsfelder $T' = T - \langle T \rangle$ werden Höhenliniendarstellungen der Felder benutzt. In Abb. 35 sind für die drei Z2.2-Ringspalte (Tab. 12) Ball ($Pr = 0,7$), Dwyer ($Pr = 0,0214$) und Weinberg ($Pr = 0,007$) die Temperaturschwankungsfelder in der Z-R-Ebene ($= x_1-x_3$ -Ebene) dargestellt. Schnittebene und Zeitpunkt für den Fall Ball stimmen mit denen von Abb. 21 überein, ebenso stimmen diejenigen von Abb. 36 und Abb. 22 überein.

Die Temperaturfelder erscheinen in allen drei Fällen random und zeigen keine regelmäßigen Strukturen. Die Temperaturschwankungen sind jeweils an der beheizten Innenwand größer als an der adiabaten Außenwand. Die Höhenlinien zeigen eine Tendenz zu einer schrägen Ausrichtung gegenüber beiden Wänden. Diese Ausrichtung wird durch die gleiche Ausrichtung des Geschwindigkeits-

feldes nach Abb. 21 hervorgerufen und ist wahrscheinlich auf das Auftreten einzelner Burst-Ereignisse [Hinze 1975] zurückzuführen.

Der Einfluß der molekularen Prandtl-Zahl entspricht qualitativ der Darstellung in Abb. 18, d.h. mit zunehmender Prandtl-Zahl werden die Temperaturschwankungen größer, was an dem zunehmenden Höhenlinieninkrement Δ erkennbar ist. Außerdem rückt bei zunehmender Prandtl-Zahl der Ort maximaler Temperaturschwankungen näher an die beheizte Wand, und die räumliche Ausdehnung der Temperaturschwankungen nimmt ab. Diese Einflüsse sind auch aus der Höhenliniendarstellung für die R-Y-Ebene ersichtlich (Abb. 36). Zusätzlich folgt hieraus, daß die räumliche Ausdehnung der Temperaturschwankungen auch in der Y-Richtung abhängig ist von der Prandtl-Zahl.

Beide Abbildungen (Abb. 35 u. 36) bestätigen die qualitative Argumentation des Prandtl-Zahleinflusses auf die Temperaturfelder gemäß Kap. 2.6 und Kap. 3.2.3.2 und unterstreichen den Wunsch, die Normierungsfläche F_{TO} des inhomogenen Temperaturfeinstrukturmodells (3-13,63) in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl formulieren zu können.

6.2.3.2.2 Statistische Auswertung der Temperaturschwankungsfelder

Die starke Abhängigkeit der räumlichen Ausdehnung der Temperaturschwankungen von der Prandtl-Zahl läßt eine entsprechende Abhängigkeit der Zweipunktekorrelationen der Temperaturschwankungen R_{TT} (analog zu (3-65)) erwarten, und zwar derart, daß die Längen, über die die Temperaturschwankungen miteinander korreliert sind, zusammen mit der räumlichen Ausdehnung der Temperaturschwankungen zunehmen. Die in Abb. 37 für die Kanalmitten wiedergegebenen Zweipunktekorrelationen über der Hauptströmungsrichtung

$$R_{TT}(\Delta x_1) = \frac{\langle T'(x_1, x_2, x_3) T'(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) \rangle}{\langle T'(x_1, x_2, x_3) T'(x_1, x_2, x_3) \rangle} \quad (6-15)$$

bestätigen diese Erwartung. Die Korrelationen fallen mit abnehmender Prandtl-Zahl weniger rasch ab. Für den Fall 'Weinberg' folgt daraus, daß wegen des stark negativen Wertes von R_{TT} bei $Z = X_1/2$ die Periodenlänge X_1 zu kurz gewählt wurde. Eine Auswirkung dieser zu kurz gewählten Periodenlänge ist bei keiner der übrigen ausgewerteten statistischen Größen dieses Falles feststellbar. Dennoch sollte vorsichtshalber bei zukünftigen Rechnungen für Fluide sehr kleiner Prandtl-Zahlen X_1 größer gewählt werden.

Die zu den drei Fällen gehörigen Profile der rms-Werte der Temperaturschwankungen (Abb. 38) bestätigen die übrigen durch die Höhenliniendarstellungen vermittelten Eindrücke quantitativ: Mit zunehmender Prandtl-Zahl nehmen die Maximalwerte der rms-Werte zu und wandern näher an die beheizte Innenwand des Ringspaltes. Der Maximalwert im Fall Ball entspricht den Ergebnissen der Empfindlichkeitsstudie mit dem Netz K7 (Abb. 19). Er stimmt damit gut mit experimentellen Daten in Rohren oder an Platten überein. Die Ergebnisse für die beiden Flüssigmetallströmungen zeigen dagegen beim direkten Vergleich mit der Experimentübersicht in Abb. 18 keine gute Übereinstimmung. Auch nicht beim K2.2-Fuchs-Plattenkanal [Grötzbach 1976]. Sie liegen mit $T_{\text{rms max}} (Pe=350) \approx 0.3$ und $T_{\text{rms max}} (Pe=1070) \approx 1$ über den experimentellen Ergebnissen. Die Übereinstimmung wird recht gut, wenn für die Übertragung der numerischen Ergebnisse die um den Faktor 2 größere mit dem hydraulischen Durchmesser $D_h = 2D$ gebildete Peclet-Zahl benutzt wird.

Eine Bestätigung für die Glaubwürdigkeit der numerischen Ergebnisse des Temperaturteiles von TURBIT-2, und damit auch eine Bestätigung für die Richtigkeit der Verwendung des hydraulischen Durchmessers bei obiger Datenübertragung, liefern die Ergebnisse für den Wärmestromkreuzkorrelationskoeffizienten $R_{u_3, T}$ (analog zu 6-14). Dieser ist nach Abb. 19 sehr stark durch die rms-Werte der Temperatur beeinflusst. Er liegt selbst im Falle K7(!)-Hsu inmitten experimenteller Ergebnisse (Abb. 39) für Luftströmungen. Im Falle Z2.2-Weinberg (Natrium) verläuft $R_{u_3, T}$ ebenfalls weitgehend horizontal und hat eine Größe, die der der Ergebnisse für Luft entspricht. Selbst beim Überschreiten des Ortes des Geschwindigkeitsmaximums bei $R \approx 0,74$ (vgl. Abb. 27) und Annäherung an die adiabate Außenwand ändert $R_{u_3, T}$ seine Größe nur unwesentlich. Daraus darf, auch ohne daß vergleichbare experimentelle Ergebnisse bekannt sind, auf die Richtigkeit der für Flüssigmetallströmungen berechneten Temperatur-rms-Werte geschlossen werden.

6.2.3.3 Berechnung turbulenter Austauschgrößen

Bei der thermohydraulischen Auslegung von Reaktorbrennelementen mit statistischen Turbulenzmodellen, z.B. den Rechenprogrammen VERA und TERA [Meyder 1975] werden u.a. Informationen über die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t benötigt, die als Verhältnis von turbulenter Austauschgröße für Impuls ϵ_m zu der für Wärme ϵ_H definiert ist:

$$Pr_t = \epsilon_m / \epsilon_H = \epsilon_{m13} / \epsilon_{H3}$$

$$\epsilon_{mij} = - \frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}} \quad (6-16)$$

$$\epsilon_{Hj} = - \frac{\langle T' u_j' \rangle}{\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j}}$$

Einige dieser Austauschgrößen können aus den numerischen Ergebnissen von TURBIT-2 berechnet werden.

6.2.3.3.1 Radialer Austausch

Erste Ergebnisse zu den radialen turbulenten Austauschgrößen Pr_t , ϵ_{m13} und ϵ_{H3} wurden mit dem Rechenprogramm EDDY bei $Re_t = 100$ gewonnen [Grötzbach, Schumann 1974, Grötzbach u.a. 1975]. Zur Simulation turbulenter Strömungen wurden Anfangswerte (Abb. 40) verwendet, bei denen einer parabolischen Hauptströmung 2- bzw. 3-dimensionale Wirbelfelder z.B. gemäß Shlanchyauskas [1973] überlagert sind. Wie in einer turbulenten Strömung wird dadurch Impuls und Enthalpie einerseits durch die molekulare Diffusion und andererseits durch Konvektion transportiert. Es ergab sich, daß bei einem bezüglich der Turbulenz zweidimensionalen Strömungszustand, d.h. die Wirbelrotationsgeschwindigkeit ω ist in Z-Richtung konstant, daß für diesen Zustand die turbulente Prandtl-Zahl identisch eins ist und daß bei dreidimensionalem Turbulenzzustand, d.h. mit $\omega = f(Z)$ und bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 1$ die turbulente Prandtl-Zahl merklich kleiner als eins ist. Da Turbulenz aber immer dreidimensional ist, folgt daraus das bekannte Ergebnis, daß selbst bei $Pr = 1$ die Reynolds-Analogie nicht zutrifft [Hinze 1959].

Es wird hier die immer wieder auftauchende Frage aufgeworfen, ob es möglich ist, turbulente Strömungen z.B. über die Wirbeltransportgleichung numerisch nur 2-dimensional zu simulieren. Sinnvolle turbulente Austauschgrößen kann man bei Auswertung einer 2-dimensionalen numerischen Simulation nach diesen Ergebnissen offensichtlich nicht berechnen.

Ergebnisse der aufwendigen dreidimensionalen numerischen Simulation mit TURBIT-2 sind für die beiden Flüssigmetallfälle Z2,2-Dwyer und -Weinberg in Abb. 41 gegenübergestellt. Im Falle Dwyer nimmt die Wärmeaustauschgröße ϵ_h von innen nach außen um etwa 10% zu und es ist $\epsilon_m \approx \epsilon_h$. Da der Verlauf von ϵ_h trotz adiabater Außenwand qualitativ dem Verlauf in Röhren oder Plattenkanälen mit beidseitiger Wärmez- und -abfuhr entspricht, kann man aus diesem Ergebnis schließen, daß ϵ_h weitestgehend unabhängig von der Art der

thermischen Randbedingungen ist. Dieses Ergebnis ist wegen der starken Abhängigkeit der Temperaturschwankungsfelder von den Randbedingungen (s. Abb. 35) nicht gerade einsichtig. Die Impulsaustauschgröße ϵ_m ist an der Innenwand geringfügig kleiner, als an der Außenwand, was dazu führt, daß Pr_t an der Innenwand bei ca. 0.9 liegt, und außen bei 1.05. Dies stimmt sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen zu ϵ_h und den Abschätzungen von Pr_t von Dwyer u.a. [1976] überein. Allerdings würde man sich hier etwas längere Mittelungs- und damit Simulationszeiten wünschen, um glattere Kurvenverläufe von ϵ_m zu bekommen.

Dies betrifft auch die Ergebnisse zum Fall Weinberg. Hier, bei Natrium, ist die Wärmeaustauschgröße ϵ_h durch den größeren molekularen Wärmetransport wesentlich kleiner als die Impulsaustauschgröße. Beide hängen wegen des geringeren Radienverhältnisses stärker vom Wandabstand ab. Die Werte sind innen niedriger als außen. Bei vielen Experimenten beobachtet man mit zunehmendem Wärmestrom ein umgekehrtes Ergebnis zu ϵ_m [z.B. Ball 1972], was auf eine erhöhte Turbulenzproduktion durch Auftriebskräfte an der beheizten Wand zurückgeführt werden muß, aber bei der Interpretation und Modellumsetzung der Ergebnisse oft nicht berücksichtigt wird. Die aus dem geglätteten ϵ_m Verlauf berechneten turbulenten Prandtl-Zahlen reichen von 1.7 an der Innenwand bis zu 1.85 an der Außenwand. Sie liegen damit auch beim Ringspalt in einem Bereich wie man ihn von Rohren her kennt [Fuchs 1973]. Für den K2.2-Fuchs-Plattenkanal erhält man ebenfalls $Pr_t \approx 1.7-1.8$ [Grötzbach 1976].

6.2.3.3.2 Azimutaler Austausch

Die Auswertung der azimutalen Austauschgrößen ϵ_{m2} oder ϵ_{H2} nach (6-16) aus den numerischen Simulationen trifft aus Rechenzeitgründen auf erhebliche Schwierigkeiten. Es gelingt bei den bisher realisierten Problemzeiten der Fälle mit azimutalen Gradienten in den u_1 - bzw. T-Feldern (K8-Hinze und Z9- $\dot{q}_w(\varphi)$) nicht die sehr kleinen Effekte zuverlässig auszuwerten. Die zur Verfügung stehenden Mittelungszeiten sind vermutlich um eine bis zwei Größenordnungen zu kurz. Die Wirkung der azimutalen Austauschvorgänge kann jedoch qualitativ an den vorliegenden beiden Fällen untersucht werden.

Für den Hinze-Plattenkanal mit Sekundärströmung (Abb. 30 u. 31) wurde im Kapt. 6.2.2.3 gezeigt, daß die Sekundärströmung zu einer Verzerrung der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder führt, und daß die turbulenten Schubspannungen und Wärmeströme stets mit solchen Verzerrungen korreliert sind und von der Sekundärströmung transportiert werden. Daraus muß man zwangs-

läufig folgern, daß beim Auftreten von Sekundärströmungen auch die turbulenten Austauschgrößen beeinflusst werden und in gewissem Umfang als transportierbare Strömungsgröße angesehen werden können. Ob der turbulente Austausch verstärkend oder ausgleichend wirkt, ist aus den Höhenliniendarstellungen schwerlich feststellbar. Einige Bereiche, z.B. in Wandnähe zwischen $x_2 = 0$ und $x_2 = 0,6$, lassen den Schluß zu, daß der turbulente Transport dem Transport durch die Sekundärströmung entgegenwirkt und diesen auszugleichen versucht.

Die Ergebnisse für den Fall $Z9-\dot{q}_w(\varphi)$ nach Abb. 42 lassen ebenfalls nur unsichere Schlüsse zu, obwohl hier keine Sekundärströmung auftritt, sondern eine Natriumströmung mit einem vom Winkel φ abhängigen Wandwärmestrom $\dot{q}_w(\varphi)$ simuliert wurde. Das Temperaturprofil war zu einem früheren Zeitpunkt ($T \approx 3.4$) nahezu so symmetrisch wie der Wandwärmestrom. Es wurde durch turbulenten konvektiven Wärmetransport in der Grobstruktur so gestört, daß zum dargestellten Zeitpunkt die Temperaturmaxima $T_{\max}(\varphi, R=\text{const.})$ bei $\varphi < 45^\circ$ liegen und die Temperaturen bei $\varphi = 60-90^\circ$ zu niedrig sind.

Der radiale Wärmestrom $\langle u_3' T' \rangle$ wirkt dem Temperaturminimum in diesem Winkelbereich durch einen relativ hohen Wärmestrom in den Außenwandbereich und durch einen entsprechend niedrigeren im Bereich der Temperaturmaxima entgegen. Der azimutale Wärmestrom $\langle u_2' T' \rangle$ ist von derselben Größenordnung. Er wirkt durch den (positiven) Transport aus dem Gebiet der Temperaturmaxima und durch den (negativen) Transport aus dem Gebiet hoher radialer Wärmeströme zur Symmetrielinie hin ebenfalls ausgleichend. Interessant ist dabei die Feststellung, daß zu diesem Zeitpunkt die Wärme in Kanalmitte beim Transport von $\varphi \approx 90^\circ$ nach $\varphi \approx 60^\circ$ gegen den Temperaturgradienten transportiert wird.

Damit wird deutlich, daß wegen der Langfristigkeit solcher Ausgleichsvorgänge, wegen der großen Korrelationslängen bei kleinen Prandtl-Zahlen und wegen der geringen Größe der auszuwertenden Effekte wie bei einer experimentellen Bestimmung ebenfalls große Mittelungszeiten erforderlich sind, um die azimutalen Austauschgrößen zuverlässig zu berechnen.

6.2.3.4 Schlußfolgerungen aus den Temperaturfeldauswertungen

Die mit den zur Verfügung stehenden Problemzeiten sinnvoll auswertbaren Ergebnisse der Temperaturfeldsimulationen sind sehr zuverlässig. Dies gilt insbesondere bei Prandtl-Zahlen um eins, wo das Temperaturfeinstrukturmodell vollständig benutzt wird, und bei sehr kleinen Prandtl-Zahlen, wo durch die Auflösung aller relevanten turbulenten Temperaturschwankungen das Modell nicht benutzt wird. Im Bereich dazwischen treten kleinere

Unstimmigkeiten auf, die auf das diskontinuierliche Abschalten des inhomogenen Modellanteils zurückzuführen sind. Eine Verbesserung ist mit Unterstützung der eigenen numerischen Ergebnisse über zusätzliche Auswerterechnungen oder über (2-44) wie in (A6-10) denkbar.

Die bekannten Probleme der Gradientenmodelle führen beim inhomogenen Temperaturfeinstrukturmodell nur bei gleichzeitig großen Prandtl-Zahlen, großen Maschen und asymmetrischen thermischen Randbedingungen, wie z.B. bei einem Wärmedurchgangsproblem oder bei einer adiabten Wand, zu kleineren Interpretationsschwierigkeiten. Besonders beim Wärmedurchgangsproblem läßt das Verschwinden des inhomogenen Modells am Ort des Geschwindigkeitsmaximums (3-13) zu hohe Temperaturschwankungen an dieser Stelle zu. Die eleganteste Abhilfe hierfür wäre ein inhomogenes Modell auf Transportgleichungsbasis, wenn nicht auf sehr unsichere empirische Daten zurückgegriffen werden müßte.

6.2.4 Auswertung der Druckfelder

Das turbulente Druckfeld muß zwangsläufig bei der Berechnung der turbulenten Geschwindigkeitsfelder berechnet werden (Kap. 4.2.2). Es steht damit ebenfalls zur statistischen Auswertung zur Verfügung. Die Auswertung turbulenter Druckfelder gewinnt in letzter Zeit an Bedeutung, da sich der turbulente Druck als der Schlüssel zur Untersuchung von Turbulenzstrukturen herausstellt [Hinze 1975_7].

6.2.4.1 Qualitative Beurteilung der Druckfelder

Eine Momentaufnahme des turbulenten Druckes in der R-Z-Ebene ist in Abb. 21 für den Z2.2-Ball-Ringspalt aufgetragen. Die Druckschwankungen sind in Wandnähe größer als in Kanalmitte. Auffallend ist, daß die räumliche Ausdehnung der Druckschwankungen, verglichen mit denen der Geschwindigkeitsschwankungen, relativ groß ist. Eine eindeutige Korrelation zwischen Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen oder Energie kann mit Ausnahme des einen Burst-Ereignisses in der Außenzone bei $Z \approx 1.5$ nicht festgestellt werden.

6.2.4.2 Quantitativer Vergleich mit Experimenten

Ein quantitativer Vergleich der berechneten Druckprofile (Abb. 43) mit den experimentellen Ergebnissen von Patterson u.a. [1967_7] für eine Rohrströmung zeigt beim K2.2-Hsu und Fuchs-Plattenkanal eine gute Übereinstimmung. Vergleichbare Druck-rms-Wertprofile sind mir nicht bekannt. Jedoch läßt der dem Energieprofil entsprechende Verlauf und die gute Übereinstimmung

der Wandwerte mit den experimentellen Ergebnissen $p_{Wrms} = 2,64$ [Willmarth, Wooldridge 1962] und $p_{Wrms} = 2,6$ [Elliot 1972] keine Zweifel an der Glaubwürdigkeit der numerischen Ergebnisse zu.

6.2.4.3 Auswertung für einen Ringspalt

Ein entsprechender Vergleich für den Z2,2-Ball-Ringspalt (Abb. 44) kann wegen des Fehlens experimenteller Daten nicht durchgeführt werden. Man stellt fest, daß die Druck-rms-Werte entsprechend der höheren Turbulenzenergie an der Außenwand (vgl. Abb. 23) dort höhere Werte annehmen als an der Innenwand, und daß das Druckprofil an der Außenwand ebenfalls höhere Werte liefert als an der Innenwand. Letzteres stimmt qualitativ mit der Abschätzung des "statistischen" Druckes aus den Geschwindigkeits-rms-Werten von Brighton, Jones [1964] überein. Die Autoren konnten allerdings ihre Abschätzung aufgrund von Meßungenauigkeiten nicht experimentell verifizieren. Es muß angenommen werden, daß die Asymmetrie des turbulenten Drucks, hervorgerufen durch die Asymmetrie der Geschwindigkeitsfluktuationen, bei asymmetrischen Kanälen u.a. dafür verantwortlich ist, daß der Ort von Nullschubspannung und Geschwindigkeitsmaximum nicht zusammenfallen.

Die Zweipunktkorrelationen R_{pp} (analog zu 6-15) bestätigen die große räumliche Ausdehnung der Druckschwankungen (Abb. 45). Die Korrelation R_{pp} fällt zwar ähnlich schnell ab wie die Korrelationen R_{ii} der Geschwindigkeitsschwankungen, oder wie R_{EE} der gesamten Turbulenzenergie, ist aber für $\Delta x_1 = \Delta z \gtrsim 0,4$ stark negativ korreliert, wie dies auch von Mulhearn [1975] theoretisch gezeigt wurde, und ist selbst bei $X_1/2$ noch stark von Null verschieden. Auch hieraus folgt, daß bei zukünftigen Rechnungen die Periodenlänge X_1 größer als 3 bis 4 gewählt werden sollte.

Diese hier in Kanalmitte gefundene große Korrelation R_{pp} über große axiale Längen widerspricht nicht den numerischen Ergebnissen von Schumann [1975b], der bei Auswertung der Wanddruckfelder nur kleine azimutale Korrelationen gefunden hat. Beide Ergebnisse sind vielmehr konsistent mit dem experimentellen Ergebnis von Clinch [1969], der in einem Rohr um den Faktor 5,5 größere axiale Korrelationslängen gefunden hat als azimutale. Dieser Vergleich wird auch nicht dadurch eingeschränkt, daß als weiteres Ergebnis dieser Rechnungen festgestellt wurde, daß R_{pp} in Wandnähe bei großen axialen Abständen geringere Korrelationen liefert, denn es wurde gleichzeitig auch festgestellt, daß die Korrelationslängen

$$L_{PP,z} = \frac{2}{X_{90}} \int_{X_{90}}^{X_{1/2}} R_{PP}(z) dz \quad (6-17)$$

dabei nahezu konstant bleiben.

Damit widersprechen die Auswertungen des Druckfeldes in keinem Punkt experimentellen Ergebnissen.

6.2.5 Berechnung einiger Kreuzkorrelationen

Die guten Ergebnisse der Auswertung der simulierten Druck-, Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder lassen eine Extrapolation, d.h. die Berechnung bisher weitgehend unbekannter oder bisher nicht meßbarer Größen zu. Die meisten der im folgenden angegebenen Größen sind bei der Erstellung von statistischen Turbulenzmodellen auf Transportgleichungsbasis oder bei Turbulenzstrukturuntersuchungen von erheblichem Interesse. Die Ergebnisse entstammen alle dem Fall Z2.2-Ball (Pr=0.7). Sie werden nur kurz erläutert.

6.2.5.1 Druck-Geschwindigkeits-Kreuzkorrelationen

6.2.5.1.1 Druck-Energie-Kreuzkorrelation

Bei der qualitativen Beurteilung des Druckfeldes (Kap. 6.2.4.1) wurde festgestellt, daß die momentanen Druck- und Geschwindigkeitsschwankungsfelder nur sehr schwach korreliert sind. Die Kreuzkorrelation R_{PE} (Abb. 45) bestätigt dies durch einen schwach negativen Wert am selben Ort ($z=0$) und durch die sonst mit $R_{PE}(z) < 10\%$ sehr niedrigen Werte.

6.2.5.1.2 Pressure-Strain-Terme

Die Pressure-Strain-Terme erscheinen in der Schubspannungsgleichung (2-28). Sie sind für die Energieumverteilung zwischen den Geschwindigkeitskomponenten verantwortlich [Rotta 1972]. Sie werden hier wie folgt bezeichnet:

$$P\mathcal{U}_{ij} = \left\langle \pi' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right\rangle \quad (6-18)$$

Der Term PU_{11} (Abb. 46) ist negativ, d.h. der u'_1 -Komponente wird Energie entzogen; die Terme PU_{22} und PU_{33} sind positiv, d.h. den Komponenten u'_2 und u'_3 wird diese Energie zugeführt. Die Konstanten A_{ij} des Modells von Rotta [1951] ⁷

$$PU_{ij} = -A_{ij} \frac{\epsilon}{E_{qs}} \left(\langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} E_{qs} \right) \quad (6-19)$$

unterscheiden sich recht erheblich, so daß sie nicht durch eine einzige Konstante ersetzt werden können. Bei der vorliegenden inhomogenen Strömung sind wenigstens A_{22} und A_{13} nicht konstant.

6.2.5.2 Druck-Temperatur-Kreuzkorrelationen

6.2.5.2.1 Druck-Temperatur-Zweipunktkorrelationen

Die Zweipunktkorrelation R_{PT} sollte nach Vergleich der Abb. 21 mit Abb. 35 sehr klein sein, da ein direkter Zusammenhang nicht ersichtlich ist. Dies wird nach Abb. 37 auch bestätigt. Druck und Temperatur sind am gleichen Ort nur schwach positiv korreliert. Mit zunehmendem Abstand sind sie schwach negativ korreliert. Mit abnehmender Prandtl-Zahl werden die absoluten Korrelationen etwas größer, offensichtlich durch die Angleichung der Längemaßstäbe der Temperatur- und Druckschwankungsfelder.

Das Profil von $\langle p'T' \rangle$ ist in Abb. 47 wiedergegeben. Der in der Transportgleichung für den turbulenten Wärmestrom $\langle u'_i T' \rangle$ auftauchende Term wird z.B. von Donaldson [1973] ⁷ als $\langle p'T' \rangle \sim \frac{2}{\rho c} \langle u'_i T' \rangle$ modelliert. Da der turbulente Wärmestrom $\langle u'_3 T' \rangle$ bei adiabater Außenwand monoton ist und keinen Vorzeichenwechsel macht, und die beiden Wärmeströme für $i=1$ und $i=2$ null sind, kann dieser Ansatz wegen Abb. 47 hier nicht gültig sein. Vielmehr scheint hier ein Ansatz der Form $\langle p'T' \rangle \sim \langle u'_1 u'_3 \rangle \langle u'_3 T' \rangle$ sinnvoller zu sein (vgl. Abb. 13).

Der Korrelationskoeffizient von $\langle p'T' \rangle$ (Abb. 47) zeigt in diesem Fall keine ausgeprägten konstanten Bereiche. Bei einigen der übrigen Fälle wurden konstante Bereiche mit Werten zwischen 0,2 und 0,3 gefunden.

6.2.5.2.2 Pressure-Scrambling-Terme

Die 'Pressure-Scrambling'-Terme $\langle p' \partial T' / \partial x_i \rangle$ erscheinen ebenfalls in den Transportgleichungen der turbulenten Wärmeströme. Sie sind bisher nicht experimentell bestimmt worden. Der berechnete Verlauf ist in Abb. 48 wieder-

gegeben. Der Verlauf für $j = 1$ ist etwa spiegelbildlich zu dem von $\langle p'T' \rangle$ nach Abb. 47; für $j = 2$ erhält man null, und für $j = 3$ (bei allen simulierten Prandtl-Zahlen) über einen kleinen Bereich in Kanalmitte ein positives Ergebnis, sonst ein negatives. Dieses Überschwingen wird durch existierende Modelle, die nur für homogene Strömungen gültig sind, wie z.B. das von Launder [1975]

$$\left\langle p' \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right\rangle = -C_{1T} \frac{\epsilon}{E_{y^2}} \langle u_i' T' \rangle + C_{2T} \langle u_i' T' \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \quad (6-20)$$

nicht beschrieben, was dazu führt, daß die zugehörige Modellkonstante C_{1T} bei der hier vorliegenden inhomogenen Strömung nicht konstant ist (s. Abb. 48). Lediglich im Bereich der Außenwand, wo das Temperaturprofil (s. Abb. 32) nahezu homogen wird, zeigt C_{1T} einen kleinen konstanten Bereich. Das Modell für $j = 1$ ist wegen des glatten Verlaufes von C_{2T} offensichtlich auch auf inhomogene Strömungen übertragbar. Die von Launder abgeschätzten Werte $C_{1T} = 3,2$ und $C_{2T} = 0,5$ werden durch die Simulationsergebnisse etwa bestätigt.

6.2.5.3 Energie-Temperatur-Kreuzkorrelation

Die Zweipunktekorelation R_{ET} sollte nach Vergleich von Abb. 21 mit Abb. 35 sehr klein sein. Abb. 37 bestätigt dies; sie ist am selben Ort schwach negativ und mit zunehmendem Abstand leicht positiv. Daß sie bei kleinen Prandtl-Zahlen bei $X_1/2$ noch eine ansteigende Tendenz hat, weist wieder darauf hin, daß bei zukünftigen Rechnungen die Periodenlänge X_1 größer gewählt werden sollte.

Die vorliegenden Ergebnisse zu den teilweise recht komplexen Kreuzkorrelationen zeigen, daß die direkte numerische Simulation gerade bei Kanalströmungen ein ausgezeichnetes Mittel sein kann, und ist, bei der Entwicklung von Transportgleichungsturbulenzmodellen Hilfe zu leisten. Der mangelnde Informationsstand über die Statistik des Temperaturfeldes und über die Statistik gemischter Terme verliert damit etwas an Bedeutung.

7. Schlußbemerkungen

In dieser Arbeit wurde ein numerisches Differenzenverfahren vorgestellt, mit dem der dreidimensionale, instationäre Impuls- und Wärmetransport turbulenter Strömungen in Ringspalten und Plattenkanälen durch numerische Integration der Grundgleichungen simuliert wird. Das Verfahren wurde, verglichen mit bisher bekannten, derart erweitert, daß auch schlecht auflösende Maschennetze, der gesamte Prandtl-Zahlenbereich und Strömungen mit kleinen Reynolds-Zahlen behandelt werden können.

Die hier verwendete Theorie zum turbulenten Impulstransport basiert auf dem von Schumann [1973a, 1975a] entwickelten Verfahren. D.h. die in den über Maschenvolumina integrierten Grundgleichungen erscheinenden Unbekannten werden als Oberflächenspannungen interpretiert und mit Maschennetzanisotropie berücksichtigenden Feinstrukturmodellen bestimmt.

Der Anwendungsbereich dieser Impulsfeinstrukturmodelle war teilweise nur auf lokalisotrope Turbulenz beschränkt. Er wurde durch eine konsistente Behandlung des gesamten Impulsfeinstrukturmodells in den Grobstruktur- und Feinstrukturgleichungen, und durch neu eingeführte Zusatzterme für kleine Reynolds-Zahlen und Wandeinflüsse auf praktisch alle Reynolds-Zahlen und auf die Verwendbarkeit schlecht auflösender Maschennetze erweitert. Der mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz behandelbare Teil des Modells liegt in einer überarbeiteten Form vor. Der die Inhomogenitätseinflüsse berücksichtigende Modellanteil wurde mit dem Ziel neu formuliert, daß er auf ungleichseitige Maschen und auf Kanäle mit ortsabhängig rauhen Wänden anwendbar ist. Entsprechend wurde die Wandbedingung für die Hauptströmungsgeschwindigkeit erweitert.

Das für die Simulation des turbulenten Wärmetransports erforderliche Temperaturfeinstrukturmodell wurde hier erstmalig entwickelt. Dieses Modell berücksichtigt die Einflüsse von Inhomogenität, Peclet-Zahl, Rauigkeit und Maschennetzanisotropie. Die theoretische Bestimmung der Modellkonstanten des isotropen Modellanteils bestätigt die empirisch gewonnenen Erfahrungswerte für die turbulente Prandtl-Zahl der Feinstruktur bei der Simulation meteorologischer Probleme. Das Modell liefert auch bei kleinen molekularen Prandtl-Zahlen sinnvolle Ergebnisse. Es zeigt, daß mit heute realisierbaren Maschennetzen die totale Auflösung aller relevanten Temperaturschwankungen bei Peclet-Zahlen unter 1000 erreicht wird. Der die Inhomogenitätseinflüsse berücksichtigende Modellanteil beinhaltet ebenfalls die Abhängigkeit von der molekularen Prandtl-Zahl, beschreibt allerdings den Übergang

zur totalen Auflösung nicht kontinuierlich. Die Temperaturwandbedingungen sind auf den Einfluß der Prandtl-Zahl abgestimmt. Es besteht die Möglichkeit ortsabhängige Wandtemperaturen, Wandwärmeströme, und bei Prandtl-Zahlen ≥ 0.7 auch ortsabhängige Wandrauigkeiten vorzugeben.

Das Simulationsverfahren ist in dem Rechenprogramm TURBIT-2 verwirklicht. Das Rechenprogramm ist auf laminare und turbulente Strömungen anwendbar. Eine Anwendung auf turbulente Strömungen ist wegen der Formulierung einiger Wandbedingungen bei Reynolds-Zahlen über 10^4 sinnvoll möglich. Die Leistungsfähigkeit des Rechenprogramms wurde an zahlreichen Beispielen demonstriert. Die verwendeten Maschennetze haben 2048 bis 32 768 Maschen. Das kleinste Netz, und eines mit einer um den Faktor 2 größeren Maschenzahl, sind die hier am häufigsten benutzten Netze. Eine Empfindlichkeitsstudie mit dem kleinsten Netz zeigte, daß die offenen oder unsicheren Modellkonstanten, mit Ausnahme einer einzigen, keinen starken Einfluß auf die numerischen Ergebnisse haben. Im Temperaturteil ist der Einfluß sehr gering. Alle Beispiele wurden daher mit demselben Korrekturfaktorsatz berechnet.

Ein quantitativer Vergleich der Ergebnisse des Impulsteils mit experimentellen Ergebnissen wurde unter anderem durchgeführt für zwei glatte Ringspalte mit den Radienverhältnissen 0.1 und 0.25, und für einen einseitig rauhen Plattenkanal. Die Ergebnisse sind in allen Fällen ebenso gut, wie die qualitative Übereinstimmung bei der Untersuchung der Auswirkungen von Sekundärströmungen auf Geschwindigkeits-, Schubspannungs- und Temperaturfelder.

Die Ergebnisse des Temperaturteils wurden mit experimentellen Ergebnissen für die fluide Luft, Quecksilber und Natrium verglichen. Die Übereinstimmung ist meist gut, oder wenn nicht, liegen gewöhnlich unterschiedliche Randbedingungen (Abstandshalter, mangelnder Einlauf) vor. Die numerischen Ergebnisse sind durch das relativ hohe Auflösungsvermögen der Netze bezüglich Temperaturschwankungen bei Prandtl-Zahlen $\lesssim 1$ zuverlässig. Die totale Auflösung aller relevanten Temperaturschwankungen wird selbst bei dem kleinsten Netz mit den größten Maschen für das Fluid Natrium bei kleinen Peclet-Zahlen erreicht.

Die Auswertungen des turbulenten Druckfeldes ergaben gute Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen und theoretischen Forderungen. Die Berechnung von Kreuzkorrelationen zwischen Druck und Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten zeigte, daß diese bisher nicht meßbaren Größen nur teilweise befriedigend in statistischen Turbulenzmodellen modelliert sind.

Die Abweichung der numerischen Ergebnisse gegenüber zuverlässigen experimentellen Ergebnissen ist meist kleiner als 5%. Die Streubreite experimenteller Temperaturdaten ist gewöhnlich größer. Damit konnte die Qualität der Ergebnisse von TURBIT-2 durch die Überarbeitung und Erweiterung der Impulsfeinstrukturmodelle selbst bei Verwendung schlecht auflösender Netze gegenüber den Ergebnissen des Vorläuferprogramms TURBIT-1 [Schumann 1973a] wesentlich gesteigert werden. Mit dem Programmsystem TURBIT-2 steht somit ein Mittel zur Verfügung, das in der Turbulenzforschung einen breiten Anwendungsbereich finden kann.

Anhang 1: Temperaturgleichung und -Differenzenformeln in Zylinderkoordinaten

Die normierte Form der Temperaturgleichung ist in (2-22) für kartesische Koordinaten angegeben. In allgemeiner Operatorenschreibweise heißt diese Gleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\underline{u} \cdot T) = \operatorname{div}(a \operatorname{grad} T) + \dot{Q} \quad (\text{A1-1})$$

Die Operatoren div und grad können für die zylindrischen Koordinaten (Abb. 1)

$$\underline{\hat{x}} = \{ \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 \} = \{ \hat{z}, \hat{\varphi}, \hat{r} \} \quad (\text{A1-2})$$

$$\underline{u} = \{ u_1, u_2, u_3 \} = \{ v_z, v_\varphi, v_r \}$$

zum Beispiel bei Wieghardt [1969] oder bei Rodi [1970] entnommen werden. Anwendung auf (A1-1) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial r} (r^\kappa v_r T) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi T) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z T) \\ = \frac{1}{r^\kappa} \frac{\partial}{\partial r} (a r^\kappa \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{a}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q} \end{aligned} \quad (\text{A1-3})$$

Der Exponent κ erlaubt den Übergang auf kartesische Koordinaten:

$$\kappa = \begin{cases} 0 & \text{kartesisch} \\ 1 & \text{zylindrisch} \end{cases} \quad (\text{A1-4})$$

Nach Anwendung von (2-33, 40) erhält man die über Maschenvolumina integrierte exakte Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^\kappa} \delta_r (r^\kappa v_r T) + \frac{1}{r} \delta_\varphi (v_\varphi T) + \delta_z (v_z T) \\ = \frac{1}{r^\kappa} \delta_r \left(a r^\kappa \frac{\partial T}{\partial r} - r^\kappa v_r' T' \right) + \frac{1}{r} \delta_\varphi \left(\frac{a}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} - v_\varphi' T' \right) \\ + \delta_z \left(a \frac{\partial T}{\partial z} - v_z' T' \right) + \dot{Q} \end{aligned} \quad (\text{A1-5})$$

Für die Anwendung dieser Gleichung auf ein staggered grid nach Abb. 3 werden die linearen Differenzenapproximationen nach Kapitel 4.1 benutzt (4-1 bis 4-4 und 3-4). Man erhält damit die programmierten Differenzenformeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = & -\frac{1}{\tau^k} \delta_r \left(\bar{v}_r \overline{r^k \bar{T}} \right) - \frac{1}{\tau} \delta_\varphi \left(\bar{v}_\varphi \overline{\bar{T}} \right) - \delta_z \left(\bar{v}_z \overline{\bar{T}} \right) \\ & + \frac{1}{\tau^k} \delta_r \left(a \tau^k \overline{\delta_r \bar{T}} - \overline{r^k \bar{v}_r \bar{T}} \right) \\ & + \frac{1}{\tau} \delta_\varphi \left(\frac{a}{\tau} \overline{\delta_\varphi \bar{T}} - \overline{\bar{v}_\varphi \bar{T}} \right) \\ & + \delta_z \left(a \overline{\delta_z \bar{T}} - \overline{\bar{v}_z \bar{T}} \right) + \dot{Q} \end{aligned} \quad (\text{A1-6})$$

Für die nichtlinearen Unbekannten werden die Feinstrukturmodelle nach (3-8, 9) und (3-13) in Zylinderkoordinatenform benutzt:

$$\begin{aligned} \overline{r \bar{v}_r \bar{T}} = & -C_{T2} \bar{C}_T \left(C_5 \overline{r^k F E'} \right)^{1/2} \overline{\delta_r \left(\bar{T} - \langle \bar{T} \rangle \right)} \\ & - l l_n \left| \overline{\delta_r \langle \bar{v}_z \rangle} \right| \overline{\delta_r \langle \bar{T} \rangle} \end{aligned}$$

$$\overline{\varphi \bar{v}_\varphi \bar{T}} = -C_{T2} \bar{C}_T \left(C_5 \overline{\varphi F E'} \right)^{1/2} \frac{1}{\tau} \overline{\delta_\varphi \left(\bar{T} - \langle \bar{T} \rangle \right)} \quad (\text{A1-7})$$

$$\overline{z \bar{v}_z \bar{T}} = -C_{T2} \bar{C}_T \left(C_5 \overline{z F E'} \right)^{1/2} \overline{\delta_z \left(\bar{T} - \langle \bar{T} \rangle \right)}$$

Die Differenzenformeln (A1-6, 7) liegen dem Rechenprogramm TURBIT-2 (Kap. 5) zugrunde.

Ergänzend sei noch angemerkt, daß die zur Normierung benutzten Mittelwerte über die beiden Wandschubspannungsgeschwindigkeiten nach (2-6) und über die beiden Wandwärmeströme nach (2-21) bei Zylinderkoordinaten wie folgt definiert sind:

$$Y_{w0} = \left(R_1^k Y_{w1} + R_2^k Y_{w2} \right) / \left(R_1^k + R_2^k \right) \quad (\text{A1-8})$$

Entsprechend muß auch bei der Berechnung von Mittelwerten über den Kanalquerschnitt eine radiusabhängige Wichtung erfolgen.

Anhang 2: Beschreibung logarithmischer Temperaturprofile

Das Analogon zum logarithmischen Wandgesetz der Geschwindigkeit nach (3-17) ist für das Temperaturfeld das logarithmische Wandgesetz der Temperatur:

$$T^+ = \frac{1}{\chi_H} \ln Y^+ + B_T(h^+, Pr) \quad (A2-1)$$

Die dimensionslose Temperatur T^+ ist gemäß (2-17, 18, 19) definiert. Der dimensionslose Wandabstand y^+ ist wie in (3-17) definiert als

$$Y^+ = \hat{y} \hat{u}_\tau / \hat{v} \quad (A2-2)$$

Die Größe B_T ist sowohl Funktion der dimensionslosen Rauigkeitshöhe

$$h^+ = \hat{h} \hat{u}_\tau / \hat{v} \quad (A2-3)$$

als auch Funktion der molekularen Prandtl-Zahl. In der Tabelle 2 sind einige Modelle für $B_T(h^+, Pr)$ aus der Literatur zusammengestellt. Die Modelle zeigen selbst bei glatten Wänden ($h^+=0$) sehr unterschiedliche Abhängigkeiten von der molekularen Prandtl-Zahl. Bei den sehr kleinen Prandtl-Zahlen von Flüssigmetallen divergieren die Modelle sehr stark (Abb. 5); bei großen Prandtl-Zahlen verhalten sie sich, mit einer Ausnahme, etwa gleich. Dennoch sind die Abweichungen untereinander in dem durch Experimente am besten abgesicherten Bereich $0,7 < Pr < 10$ recht erheblich (man beachte die doppellogarithmische Darstellung für diesen Bereich).

Die experimentellen Ergebnisse, die in Abb. 5 als Bereiche oder als Einzelwerte angegeben sind, wurden den Arbeiten von Jayatilleke [1969] und Kader und Yaglom [1972] entnommen und teilweise gemäß der Übersicht in Tab. 3 ergänzt. Man erkennt aus dem Vergleich der Modellergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen, daß nur die beiden Modelle von Kader und Yaglom [1972] innerhalb des jeweiligen Gültigkeitsbereiches gute Übereinstimmung zeigen. In dieser Arbeit werden daher bei glatten Wänden die Beziehungen nach Kader und Yaglom (siehe Tab. 2) benutzt und zusätzlich vereinbart, daß im Bereich $0,03 < Pr < 0,6$ zwischen dem Modell für kleine und dem für große Prandtl-Zahlen linear interpoliert wird.

Bei rauhen Wänden ($h^+ > 0$) muß auf den Bereich $Pr < 0,7$ verzichtet werden, da für diesen Bereich bisher keine Messungen publiziert wurden. Für den

Bereich $Pr \geq 0,7$ existieren für Sandrauhigkeiten nur wenige Beziehungen für $B_T(h^+, Pr)$ oder $G(h^+, Pr)$, die gemäß

$$T^+ = \frac{1}{\chi_H} \ln Y^+ + B_T(h^+, Pr) \quad (A2-4)$$

$$= \frac{1}{\chi_H} \ln \frac{\hat{Y}}{\hat{h}} + G(h^+, Pr) = \frac{1}{\chi_H} \ln Y^+ + G(h^+, Pr) - \frac{1}{\chi} \ln h^+$$

auf gleiche Definitionen umgerechnet werden können (Tab. 2). Es sind dies die Modelle von Yaglom und Kader [1974], von Jayatilke [1969] mit $E(h^+)$ nach seiner eigenen, offensichtlich nur für $h^+ < 100$ gültigen Interpolationsformel, bzw. mit $E(h^+)$ nach (3-19), und die Interpolationsformel von Dipprey und Sabersky [1963] für deren eigene Messungen. Die Abb. 6 verdeutlicht, wie unterschiedlich diese Modelle den Einfluß von Prandtl-Zahl und Rauigkeitshöhe wiedergeben. (Auch hier täuscht die doppellogarithmische Darstellung eine bessere Übereinstimmung vor.) Bei der Erstellung der Abb. 6 wurde entsprechend der Literaturübersicht in Tab. 3 der Wert

$$\chi_H = 0,465 \quad (A2-5)$$

benutzt. Da in dieser Arbeit nur Fluide mit $Pr < 10$ betrachtet werden, wird die experimentell abgesicherte Beziehung von Dipprey und Sabersky [1963] nach Tab. 2 ausgewählt und zusätzlich im Bereich $0 < h^+ < 100$ linear interpoliert.

Die Abbildungen 5 und 6 wurden, ebenso wie die Abbildungen 8, 9 und 10, mit dem Programmsystem PLOTCP [Zimmerer 1975] erstellt.

Anhang 3: Ableitung der Bilanzgleichung für die Temperaturschwankungsquadrate innerhalb der Feinstruktur

Bei der Ableitung der Bilanzgleichung für die Temperaturschwankungsquadrate innerhalb der Maschen wird von deren Definition ausgegangen. Es gilt nach (2-30) mit (2-39):

$$\overline{E_{T^{1/2}}^v} \equiv \frac{1}{2} \overline{(T - \overline{T})^2} = \frac{1}{2} \left\{ \overline{T^2} - (\overline{T})^2 \right\} \quad (A3-1)$$

In diesem Anhang wird der vereinfachten Schreibweise wegen der Index 1/2 ab hier weggelassen. Zu einem Ansatz für die gesuchte Transportgleichung gelangt man nach zeitlicher Ableitung der obigen Definition:

$$\frac{\partial \overline{E_T^v}}{\partial t} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{T^2}}{\partial t}}_I - \overline{T} \underbrace{\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}}_{II} \quad (A3-2)$$

Der erste Term (I) kann aus der über Maschenvolumina gemittelten Bilanz der Temperaturquadrate berechnet werden, der zweite Term (II) aus dem Produkt von über Maschenvolumina gemittelter Temperaturgleichung und \overline{T} .

Term I:

Eine Erhaltungsgleichung für $E_T = 1/2 T^2$ erhält man nach Multiplikation der Temperaturgleichung (2-22) mit T:

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_j E_T) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \frac{\partial E_T}{\partial x_j} \right) + T \dot{Q} - \epsilon_T \quad (A3-3)$$

Durch Integration über Maschenvolumina gemäß (2-33) wird daraus:

$$\overline{\frac{\partial E_T}{\partial t}} = - \delta_j^i \overline{\mu_j E_T} + \delta_j^i \overline{\left(a \frac{\partial E_T}{\partial x_j} \right)} + \overline{T \dot{Q}} - \overline{\epsilon_T}$$

Zur Aufspaltung in Grobstrukturwerte $\overline{\overline{Y}}$ und Feinstrukturwerte $\overline{Y'}$ werden folgende Definitionen eingeführt:

$$\begin{aligned} Y' &= Y - \overline{\overline{Y}} & Y &= \mu_i, T, E_T, a \\ \overline{\overline{E_T}} &= 1/2 \overline{\overline{T^2}} \end{aligned} \quad (A3-4)$$

Zusammen mit (2-39), d.h. $\overline{\overline{Y'}} \equiv 0$, erhält man dann nach einigen Umformungen das Ergebnis für Term I:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial E_T}{\partial t}} = & - \delta_j \cdot \left\{ \overline{\mu_j^i E_T^i} + \overline{\mu_j^i E_T^i} + \overline{\mu_j^i E_T^i} + \overline{\mu_j^i T^i} \right\} \\ & + \delta_j \cdot \left\{ \overline{\frac{\partial E_T^i}{\partial x_j^i}} + \overline{\frac{\partial E_T^i}{\partial x_j^i}} + \overline{a \frac{\partial}{\partial x_j^i} (\overline{T^i T^i})} + \overline{a \frac{\partial}{\partial x_j^i} E_T^i} \right\} \\ & + \overline{\frac{v}{T}} \overline{\frac{v}{Q}} - \overline{\frac{v}{E_T}} \end{aligned} \quad (A3-5)$$

Im Gegensatz zu (2-31) ist dies keine Transportgleichung für die Quadrate der Temperaturschwankungen um deren Mittelwert, sondern eine Gleichung für die Quadrate der absoluten Temperaturen.

Term II:

Die Bestimmungsgleichung für Term II kann durch Multiplikation der über Maschenvolumina gemittelten Temperaturgleichung (2-41) mit $\overline{v_T}$ bereitgestellt werden:

$$\begin{aligned} \overline{v_T} \overline{\frac{\partial T}{\partial t}} = & - \overline{v_T} \delta_j \cdot \left\{ \overline{\mu_j^i T^i} + \overline{\mu_j^i T^i} \right\} \\ & + \overline{v_T} \delta_j \cdot \left(\overline{a \frac{\partial T}{\partial x_j^i}} \right) + \overline{v_T} \overline{\frac{v}{Q}} \end{aligned} \quad (A3-6)$$

Auch in diese Gleichung werden zur Aufspaltung in Grobstruktur- und Feinstrukturanteil die Definitionen (A3-4) eingesetzt. Es werden ebenso (2-39) und zusätzlich die Kontinuitätsgleichung (2-35) berücksichtigt. Weitere Rechenregeln, die bei den recht umfangreichen Umformungen zur Vereinfachung des Ergebnisses führen, sind neben der arithmetischen Mittelung über benachbarte Maschen nach (3-4) die folgenden:

$$\begin{aligned} \delta_i(ab) & \equiv \overline{a^i} \delta_i b + \overline{b^i} \delta_i a \\ \overline{v_T} & \approx \overline{v_T}^i \end{aligned} \quad (A3-7)$$

Damit kann aus (A3-6) das folgende Ergebnis für den Term II von (A3-2) abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \overline{v_T} \overline{\frac{\partial T}{\partial t}} = & - \delta_j \cdot \left\{ \overline{\mu_j^i E_T^i} + \overline{\mu_j^i T^i} \right\} + \overline{\mu_j^i T^i} \delta_j \cdot \overline{\frac{v}{T}} \\ & + \delta_j \cdot \left(\overline{\frac{\partial E_T^i}{\partial x_j^i}} \right) - \overline{v} \delta_j \cdot \overline{\frac{v}{T}} \delta_j \cdot \overline{\frac{v}{T}} \\ & + \overline{v_T} \delta_j \cdot \left(\overline{a \frac{\partial T^i}{\partial x_j^i}} \right) + \overline{v_T} \overline{\frac{v}{Q}} \end{aligned} \quad (A3-8)$$

Term I-II:

Die gesuchte Transportgleichung für die Temperaturschwankungsquadrate innerhalb der Maschen erhält man durch Einsetzen von (A3-5) und (A3-8) in die Definitionsgleichung (A3-2):

$$\begin{aligned}
 I \quad \overline{\frac{\partial E_T'}{\partial t}} &= - \delta_j' (\overline{u_j'} \overline{E_T'}) && \text{II} \\
 &- \overline{u_j' T'} \delta_j' \overline{E_T'} && \text{III} \\
 &+ \delta_j' \left\{ \overline{a} \frac{\partial \overline{E_T'}}{\partial x_j'} - \overline{u_j' E_T'} \right\} \\
 &+ \delta_j' \left\{ \overline{a'} \frac{\partial E_T'}{\partial x_j'} + \overline{a' \frac{\partial}{\partial x_j'} (T' T')} \right\} - \overline{v'} \delta_j' \left(\overline{a' \frac{\partial T'}{\partial x_j'}} \right) && \text{IV}^a \\
 &+ \overline{v a} \delta_j' \overline{\frac{E_T'}{T'}} \delta_j' \overline{\frac{E_T'}{T'}} - \overline{v E_T'} && \text{IV}^b \\
 &&& \text{Ia} \quad \text{Ib}
 \end{aligned} \tag{A3-9}$$

Die Bedeutungen der Terme dieser Transportgleichung können wie folgt zugeordnet werden:

- I zeitliche Änderung der gemittelten Schwankungsenergie
- II Konvektion
- III Produktion
- IV Diffusion
- V Dissipation: ~~A~~ gesamt, ~~B~~ Grobstrukturanteil

Der Term IVb wird in dieser Arbeit, wegen der Einschränkung auf konstante Stoffwerte, nicht berücksichtigt. Er wird identisch Null. Damit stimmt die Gleichung (A3-9) formal überein mit (2-31), bis auf wenige Änderungen, die sich aus der unterschiedlichen physikalischen Bedeutung und der Anwendung von Differenzenformeln ergeben.

Anhang 4: Beziehungen zwischen den Korrelationen R_{TT} und dem Energiespektrum $E_T(k)$ bei isotoper Turbulenz

Bei der Berechnung der Feinstrukturkonstanten C_{T2} ist die Kenntnis von Temperaturkorrelationen R_{TT} von Temperaturen an zwei verschiedenen Orten erforderlich (z.B. in 3-36):

$$R_{TT}(\underline{x}, \underline{\tau}) = \langle T(\underline{x} + \frac{\underline{\tau}}{2}) T(\underline{x} - \frac{\underline{\tau}}{2}) \rangle \quad (A4-1)$$

Diese Korrelationen sind für inkompressible Fluide alleine aus den Invarianzbedingungen der Isotropie berechenbar und sind damit rein kinematischer Natur.

A4.1 Definitionen

Für eine isotrope Strömung gilt wegen der Invarianz bezüglich Translation:

$$R_{TT}(\underline{x}, \underline{\tau}) \equiv R_{TT}(\underline{\tau}) \quad (A4-2)$$

Die Fourier-Transformierte dieser Zweipunkte-Korrelation ist das dreidimensionale Energiespektrum E_{TT} in Abhängigkeit vom Wellenzahlenvektor \underline{k} [Hinze 1959]:

$$E_{TT}(\underline{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} R_{TT}(\underline{\tau}) \exp(-\sqrt{-1} \underline{k} \cdot \underline{\tau}) d\underline{\tau} \quad (A4-3)$$

Das zugehörige eindimensionale Spektrum E_{T1} hat folgendes Aussehen:

$$E_{T1}(k_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{TT}(\tau_1) \exp(-\sqrt{-1} k_1 \tau_1) d\tau_1 \quad (A4-4)$$

Die Umkehrung davon ist:

$$R_{TT}(\tau_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{T1}(k_1) \exp(\sqrt{-1} k_1 \tau_1) dk_1 \quad (A4-5)$$

Für $\tau_1 = 0$ erhält man als Spezialfall direkt die Temperaturschwankungsenergie:

$$R_{TT}(0) = \int_0^{\infty} E_{T1}(k_1) dk_1 = \langle T'^2 \rangle \quad (A4-6)$$

Das dreidimensionale skalare Spektrum $E_T(k)$ folgt aus dem dreidimensionalen Spektrum $E_{TT}(k)$ durch Integration über alle Wellenzahlen \underline{k} , deren Betrag gleich k ist:

$$E_T(k) = 4\pi k^2 E_{TT}(k) \quad (A4-7)$$

Damit ist das Spektrum $E_T(k_1)$ wegen (A4-6) aus dem experimentell bestimmbareren Spektrum $E_{T1}(k_1)$ berechenbar:

$$E_T(k_1) = -k_1 \frac{\partial E_{T1}(k_1)}{\partial k_1} \quad (A4-7a)$$

Verwendet man Polarkoordinaten, dann können (A4-3) und (A4-5) wesentlich vereinfacht werden $r = |\underline{x}|$:

$$E_{TT}(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} R_{TT}(r) dr \quad (A4-8)$$

Umgekehrt gilt:

$$R_{TT}(r) = 4\pi \int_0^\infty k^2 \frac{\sin(kr)}{kr} E_{TT}(k) dk \quad (A4-9)$$

Da man anstelle von $E_{TT}(k)$ vorteilhafter $E_T(k)$ verwendet, folgt mit (A4-7)

$$R_{TT}(r) = \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} E_T(k) dk \quad (A4-10)$$

Damit ist nun R_{TT} einzig Funktion des dreidimensionalen skalaren Energiespektrums $E_T(k)$.

A4.2 Zusammenhang zwischen der Dissipation der Temperaturschwankungen und dem Spektrum

In der Erhaltungsgleichung für die Temperaturfluktuationen $1/2 T'^2$ nach (3-24) bzw. (A3-9) tritt die Dissipation $\sqrt{\epsilon_{T42}}$ auf. Der zeitliche Mittelwert von

$$\langle \epsilon_{T42} \rangle = \left\langle a \frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right\rangle \quad (A4-11)$$

kann bei isotropem Temperaturfeld über R_{TT} aus dem Spektrum $E_T(k)$ berechnet werden. Nach [Hinze 1959] kann (A4-11) umgeschrieben werden:

$$\langle \varepsilon_{T1/2} \rangle = \langle a \rangle \frac{-\partial^2 R_{TT}(t=0)}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{A4-12})$$

Da bei isotroper Turbulenz wegen der Invarianz gegenüber Rotation gilt:

$$\left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_3} \right)^2 \right\rangle \quad (\text{A4-13})$$

kann mit (A4-10) die Temperaturdissipation bei Lokal isotropie berechnet werden:

$$\langle \varepsilon_{T1/2} \rangle = -3 \langle a \rangle \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{\sin(kr)}{kr} E_T(k) \right] \Big|_{r=0} dk \quad (\text{A4-14})$$

Partielle Differentiation des Integranden, Reihenentwicklung für r um Null und der Grenzübergang für $r \rightarrow 0$ führen auf

$$\langle \varepsilon_{T1/2} \rangle = \langle a \rangle \int_0^\infty k^2 E_T(k) dk \quad (\text{A4-15})$$

bzw. auf

$$\langle \varepsilon_T \rangle = 2 \langle a \rangle \int_0^\infty k^2 E_T(k) dk \quad (\text{A4-16})$$

wenn man von der Transportgleichung für $\langle T'^2 \rangle$ ausgeht.

A4.3 Kolmogorov-Spektrum für Temperaturfluktuationen

Das wesentliche Ergebnis der letzten beiden Abschnitte ist, daß bei isotroper Turbulenz die Korrelationen R_{TT} und die Dissipation ε_T dann berechenbar sind, wenn der Verlauf des dreidimensionalen skalaren Spektrums $E_T(k)$ bekannt ist.

Da die Temperatur eine passive Größe ist und die Temperaturfluktuationen durch die Geschwindigkeitsfluktuationen verursacht werden, ist es naheliegend, daß auch für das Temperaturspektrum ein ähnliches Spektrum gilt, wie für die Energie der Geschwindigkeitsfluktuationen $E(k)$.

A4.3.1 Energiespektrum E(k)

Wie die Spektren E(k) bei kleinen, mittleren und hohen Wellenzahlen verlaufen, soll hier nicht näher besprochen werden, da dies an vielen Stellen nachgelesen werden kann, z.B. bei [Hinze 1959, Tennekes, Lumley 1973, Schumann 1973a, Lörcher 1976]. Bei der Herleitung von Feinstrukturmodellen wird üblicherweise [Lilly 1967, Schumann 1973a] nur ein bestimmter Bereich aus dem Spektrum herausgegriffen, nämlich der Bereich, der durch die Maschennetze nicht oder nur teilweise aufgelöst wird. Glücklicherweise reicht bei der heutigen Computerkapazität das Auflösungsvermögen der verwendeten Maschennetze bis zu Wellenzahlen [Lilly 1967]

$$k_{\text{Netz}} = \frac{\pi}{h} \tag{A4-17}$$

die im sogenannten Trägheitsbereich oder "inertial subrange" genannten Bereich liegen [Lörcher 1976]. Der Verlauf der Spektren in diesem Bereich wird dadurch gekennzeichnet, daß der Zerfall der großen Wirbel (kleine Wellenzahl k) zu kleineren (große Wellenzahl) nur durch Trägheitskräfte geprägt ist. Kolmogorov [1941] hat dafür über eine Dimensionalanalyse folgende Abhängigkeit gefunden:

$$E(k) = \alpha \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \tag{A4-18}$$

mit den Definitionen

$$\int_0^{\infty} E(k) dk = \frac{1}{2} \langle u_i'^2 \rangle \tag{A4-19}$$

$$\langle \epsilon \rangle = f \left(\frac{1}{2} \langle u_i'^2 \rangle \right)$$

Der Gültigkeitsbereich

$$\frac{1}{L} \ll k \ll \frac{1}{\eta} \tag{A4-20}$$

(mit L = integraler Längenmaßstab, η = Kolmogorov-Länge nach (2-42)) läßt erwarten, daß das Kolmogorov-Spektrum (A4-18) nur für hohe Reynolds-Zahlen Re gültig ist. Lörcher [1976] hat den Gültigkeitsbereich für das Kolmogorov-Spektrum experimentell für eine Kanalströmung ermittelt. Nach seinen Ergebnissen ist bei allen Reynolds-Zahlen größer $1 \cdot 10^4$ ein $k^{-5/3}$ -Verlauf im Spektrum zu finden.

Die Kolmogorov-Konstante α in (A4-18) kann heute als recht gut bekannt angesehen werden. Ihr Wert wurde in vielen verschiedenen Strömungsarten ex-

perimentell ermittelt. Nach der in Tab. 4 gegebenen, sicherlich unvollständigen Literaturübersicht darf man wohl mit

$$\alpha = 1,5 \quad (\text{A4-21})$$

rechnen. Townsend [1976] gibt in seiner kurzen Übersicht für die Konstante

$$\alpha_1 = \frac{18}{55} \alpha \quad (\text{A4-22})$$

des eindimensionalen Energiespektrums den Wert $\alpha_1 = 0,5 \pm 0,03$, was dem hier gewählten Wert $\alpha = 1,5$ nicht widerspricht.

A4.3.2 Energiespektrum $E_T(k)$

Für das Temperatur-"Energie"-Spektrum gilt bei Prandtl-Zahlen um eins im Trägheitsbereich ein dem Kolmogorov-Geschwindigkeitsspektrum ähnliches Spektrum. Corrsin [1951a] und Obukhov [1949] haben unabhängig voneinander folgenden Ansatz gemacht:

$$E_T(k) = \beta \langle \varepsilon_T \rangle \langle \varepsilon \rangle^{-\frac{1}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (\text{A4-23})$$

mit den Definitionen:

$$\int_0^{\infty} E_T(k) dk = \langle T'^2 \rangle \quad (\text{A4-24})$$

$$\langle \varepsilon_T \rangle = f(\langle T'^2 \rangle) = 2 \langle \varepsilon_{T/2} \rangle = 2 f\left(\frac{1}{2} \langle T'^2 \rangle\right)$$

Die Existenz dieses Spektrums wurde bei genügend hohen Reynolds-Zahlen mehrfach experimentell bestätigt, z.B. von Paquin, Pond [1971], Boston, Burling [1972], Kaimal u.a. [1972]. Nicht ausreichend bekannt ist dagegen der Wert der Konstanten β .

β wird oft als "Kolmogorov-Konstante für den Transport skalarer Größen", seltener auch als "Batchelor-Konstante" [Leslie 1973] bezeichnet. Die bis heute angegebenen Werte streuen um über eine Größenordnung (siehe Tab. 4). Ursache ist dabei nur zum Teil die unterschiedliche Definition der Dissipation, öfter jedoch führt die im Vergleich zur Geschwindigkeitsmeßtechnik noch nicht ausgereifte Temperatur- oder Konzentrationsmeßtechnik und die Wahl wenig geeigneter Meßobjekte zu stark schwankenden Angaben. Weiterhin wird meistens die Konstante β_1 für das eindimensionale Spektrum und nicht die für das dreidimensionale angegeben. Es gilt jedoch für Spektren mit $k^{-5/3}$ -Verlauf wegen (A4-7a):

$$\beta_1 = \frac{3}{5} \beta \quad (\text{A4-25})$$

Am Beginn dieser Rechnungen wurde gemäß der Übersicht in Tab. 4 der Wert

$$\beta = 1,3 \quad (\text{A4-26})$$

gewählt. Daß dieser hier benutzte Wert nicht willkürlich aus dem breiten Streuband der Experimente entnommen wurde zeigt die Empfehlung, die Monin und Yaglom [1975] aus ihrer Übersicht ableiten für β den Wert 1.2 zu verwenden.

Für Fluide mit Prandtl-Zahlen um eins ist der Gültigkeitsbereich von (A4-23) etwa gleich dem von (A4-18). Man spricht hier vom "inertial convective subrange". Neben Fluiden mit $Pr=1$ interessieren in dieser Arbeit auch Fluide mit $Pr \ll 1$. Bei diesen Fluiden wird entsprechend der hohen Leitfähigkeit der Gültigkeitsbereich zu kleineren Wellenzahlen hin eingengt. Dies wird qualitativ durch die theoretischen Arbeiten von Ogura [1958], Batchelor u.a. [1959], Howells [1960], Corrsin [1964], Pao [1965], Kraichnan [1968], Gibson [1968], van Atta [1974] und durch die experimentellen Arbeiten von Rust, Sesonske [1966], Granatstein u.a. [1966], Clay [1973], Fuchs [1973], Genin u.a. [1974], Papailiou, Lykoudis [1974a, 1974b], Sviridov u.a. [1975a], Bunschi, Seifritz [1975] wiedergegeben. Allerdings ist man sich nur darüber einig, daß die Spektren schon bei kleineren Wellenzahlen gegen Null gehen, als bei größeren Prandtl-Zahlen. Man ist sich aber nicht darüber einig wie, d.h. z.B. mit welcher Steigung, die Spektren im sogenannten "inertial diffusive subrange" gegen Null gehen (Abb. 7). Die Mutmaßungen und Postulate reichen von k^{-3} -Verläufen, über $k^{-13/3}$, $k^{-17/3}$ und k^{-7} bis zu Exponentialverläufen.

Wesentlich für die Anwendung auf die direkte numerische Simulation von Fluiden mit kleinen Prandtl-Zahlen sind jedoch zwei grundlegende Eigenschaften, die alle Theorien und Versuche bestätigen:

- 1) Der inertial diffusive subrange beginnt bei einer Wellenzahl $1/\eta_T$ (2-43), die wesentlich kleiner ist als $1/\eta$ (2-42), siehe Abb. 7.
- 2) Die Steigung im inertial diffusive subrange ist wesentlich steiler als im inertial convective subrange.

Beide Eigenschaften bewirken, daß mit abnehmender Prandtl-Zahl die Spektren der Temperaturschwankungen an hohen Wellenzahlen verarmen. Damit wird der durch das Maschennetz nicht aufgelöste Anteil an Temperaturschwankungen im-

mer kleiner. D.h. auch, daß das Feinstrukturmodell immer weniger Einfluß haben darf. Da das Feinstrukturmodell in C_{T2} (3-31) wegen $a=1/Pe_T=1/(Re_T \cdot Pr)$ schon eine starke Prandtl-Abhängigkeit beinhaltet, und diese auch zufriedenstellende Ergebnisse liefert (siehe Kap. 6), wird hier darauf verzichtet, eine der oben angegebenen Theorien zur Berücksichtigung der Prandtl-Abhängigkeit der Spektren einzuführen. Es wird in dieser Arbeit lediglich das Spektrum (A4-23) benutzt.

A4.4 Korrelationen R_{TT} für Kolmogorov-Spektrum

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe des Kolmogorov-Spektrums (A4-23) die Temperaturkorrelation $R_{TT}(r)$ aus (A4-10) berechnet.

Die Korrelation $R_{TT}(r)$ ist unter Vorgabe eines Spektrums $E_T(k)$ dann aus (A4-10) zu berechnen, wenn das Integral für $k = 0$ einen endlichen Wert annimmt. Für das Kolmogorov-Spektrum der Temperaturschwankungen trifft das nicht zu, so daß nur $R_{TT}(r) - R_{TT}(0)$ berechnet werden kann. Es gilt dann:

$$R_{TT}(r) - R_{TT}(0) = \int_0^{\infty} E_T(k) \left[\frac{\sin(kr)}{kr} - \frac{\sin(kr)}{kr} \right]_{r=0} dk \quad (A4-27)$$

Sollen jedoch beliebige Spektren verwendet werden, dann wird $\sin(kr)/kr$ für kleine (kr) vorteilhaft in einer Reihe entwickelt [Bronstein, Semendjajew 1969]

$$\frac{\sin(kr)}{kr} \approx 1 - \frac{(kr)^2}{3!} + \frac{(kr)^4}{5!} - \frac{(kr)^6}{7!} + \frac{(kr)^8}{9!} \dots \quad (A4-28)$$

In (A4-27) eingesetzt erhält man dann:

$$R_{TT}(r) - R_{TT}(0) \approx \int_0^{\infty} E_T(k) \left[-\frac{(kr)^2}{6} + \frac{(kr)^4}{120} - \frac{(kr)^6}{5040} + \frac{(kr)^8}{362880} \dots \right] dk \quad (A4-29)$$

Setzt man für $E_T(k)$ das Kolmogorov-Spektrum für die Temperaturfluktuationen ein, dann kann das Integral direkt berechnet werden aus (A4-27):

$$R_{TT}(r) - R_{TT}(0) = \beta \langle \epsilon_T \rangle \langle \epsilon \rangle^{-1/3} \int_0^{\infty} \frac{\sin(kr)}{r k^{8/3}} - \frac{\sin(kr)}{r k^{8/3}} \Big|_{r=0} dk \quad (A4-30)$$

Variablensubstitution und partielle Integration führt über die Hilfsformel [Bronstein, Semendjajew 1969, Gröbner, Hofreiter 1973]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{2/3}} dx = \frac{1}{2} \Gamma(1/3) \approx \frac{1}{2} 2,678938 \quad (\text{A4-31})$$

zu dem Ergebnis:

$$R_{TT}(r) - R_{TT}(0) = -\frac{9}{20} \Gamma(1/3) \beta \langle \epsilon_T \rangle \langle \epsilon \rangle^{-1/3} r^{2/3} \quad (\text{A4-32})$$

Damit ist R_{TT} nur abhängig von einer einzigen empirischen Konstanten, β .

Aus (A4-32) kann man wegen $r = |\underline{\Delta x}|$ die für skalare Größen bei isotroper Turbulenz einleuchtende Symmetriebedingung ableiten:

$$R_{TT}(\underline{\Delta x}) = R_{TT}(-\underline{\Delta x}) \quad (\text{A4-33})$$

Anhang 5: Einfluß realer Energiespektren auf Grob- und Feinstruktur-
energie

Im Gegensatz zu dem nur über einen engen Wellenzahlenbereich gültigen Kolmogorov-Spektrum nach (A4-18,20) wird als reales Spektrum (s. Abb. 7) eine Kombination des Spektrums von von Kàrmàn [1948] und Pao [1965] angesehen:

$$E(k) = \underbrace{\alpha \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3}}_{\text{Kolmogorov}} \underbrace{\frac{(kL)^{17/3}}{\{1 + (kL)^2\}^{17/6}}}_{\text{Kàrmàn}} \underbrace{\exp\left\{-\frac{3}{2}\alpha (ky)^{4/3}\right\}}_{\text{Pao}} \quad (\text{A5-1})$$

Die Kàrmàn-Korrektur berücksichtigt die Abweichungen vom Kolmogorov-Spektrum bei niedrigen Wellenzahlen. Sie gibt zwar, besonders in Wandnähe nicht den exakten Verlauf des Spektrums wieder, der nach Bremhorst, Bullock [1970], Hájalić, Launder [1972], Tchen [1973], Ueda, Hinze [1975] und Lörcher [1976] einen "production subrange" mit einer k^{-1} -Abhängigkeit zeigen sollte, sie ist aber in bezug auf das Integral über alle Wellenzahlen unterhalb des Kolmogorov-Spektrums zusammen mit den experimentellen Ergebnissen von Lörcher [1976] die zur Zeit bestmögliche Approximation. Er gibt für die Kàrmàn-Länge L für alle Wandabstände folgende Interpolationsformal an:

$$\hat{L} / \delta = 8.468 \cdot 10^{-3} Re^{0.44} \quad (\text{A5-2})$$

Die Pao-Korrektur mit der Kolmogorov-Länge η nach (2-42) berücksichtigt das Verschwinden der Energie bei hohen Wellenzahlen durch die viskose Dissipation bei kleinen Wirbeln. Anstelle der Pao-Korrektur könnten ebenso die Spektren nach Heisenberg [1948], Kesic u.a. [1970], Lin [1972], Tchen [1973] und Uberio, Narain [1974] benutzt werden. Da die vorhergesagten Steigungen der Spektren einiger der genannten Theorien in Widerspruch zu den in sich ebenso widersprüchlichen Experimenten stehen, z.B. den Experimenten von Gibson, Schwarz [1963], Wang, Nickerson [1972], Polyayev u.a. [1973], Kao [1974], Gibson u.a. [1974], wird hier wegen der zufriedenstellenden Erfahrungen von Trusov [1971], Helland [1974] und Warsi, Mertaugh [1974] bei der Berechnung der Dissipation über das Pao-Spektrum, die Pao-Korrektur gewählt.

A5.1 Einfluß auf C_2

Der Einfluß des realen Energiespektrums (A5-1) auf die Konstante C_2 wird nach der Näherungsmethode von Lilly [1967] und Schumann [1974] untersucht, d.h. es wird die Einschränkung auf isotrope Maschennetze angenommen und folgende Näherungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \langle \delta \overline{E'} \rangle &\approx \int_{\pi/h}^{\infty} E(k) dk \\ \langle \frac{1}{2} \overline{D_{ij}^2} \rangle &\approx 2 \int_0^{\pi/h} k^2 E(k) dk \end{aligned} \tag{A5-3}$$

Für das Kolmogorov-Spektrum (A4-18) können beide Integrale analytisch integriert werden:

$$\begin{aligned} \langle \delta \overline{E'} \rangle &\approx \alpha \langle \varepsilon \rangle^{2/3} \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{-2/3} \\ \langle \frac{1}{2} \overline{D_{ij}^2} \rangle &\approx \alpha \langle \varepsilon \rangle^{4/3} \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{4/3} \end{aligned} \tag{A5-4}$$

Setzt man dies in C_2 nach (3-80) ein und vernachlässigt $\frac{ij}{C}$ und den ohnehin sehr kleinen Subtrahenden im Zähler, dann erhält man eine grobe Näherung für C_2 für Kolmogorov-Spektren:

$$C_2' \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3 \alpha} \right)^{3/2} = 0.0943 \tag{A5-5}$$

Benutzt man in (A5-3) anstelle des Kolmogorov-Spektrums das reale Spektrum nach (A5-1), und führt die Integrale numerisch aus, dann kann damit ein C_2'' für reale Spektren in Abhängigkeit von L und η , bzw. nach Normierung mit h , von h/L und h/η berechnet werden. Bezieht man die Ergebnisse auf C_2 , dann erhält man einen Korrekturfaktor für das exakte C_2 für Kolmogorov-Spektren:

$$C_{2 \text{ Real}} \approx C_2 \cdot C_2''/C_2' \tag{A5-6}$$

Verschiedene Werte des Korrekturfaktors sind in Abb. 8 und Tab. 9 parametrisch wiedergegeben. Der Faktor ist von der Größenordnung eins. Er nimmt mit zunehmendem h/L zu, was der zunehmenden Abweichung des Kàrmàn-Spektrums vom Kolmogorov-Spektrum bei abnehmendem L entspricht, und mit zunehmendem h/η ab, was wegen (2-42) und der Normierung (2-12), und also wegen

$$\eta = \hat{\eta} / \hat{D} = \left(\varepsilon Re_z^3 \right)^{-1/4} \tag{A5-7}$$

der Annäherung des Pao-Spektrums an das Kolmogorov-Spektrum bei zunehmender Reynolds-Zahl entspricht.

Die numerischen Simulationen dieser Arbeit liegen nach (A5-2) in einem h/L -Bereich von

$$h/L \approx 0.05 \div 0.1 \quad (\text{A5-8})$$

und nach (A5-7) und (3-56) in einem h/η -Bereich von etwa:

$$h/\eta \approx 50 \div 270 \quad (\text{A5-9})$$

Mit diesen Grenzen ergibt sich das erfreuliche Ergebnis, daß der Korrekturfaktor kaum von h/L abhängig ist und nur gering in den Grenzen

$$1.25 > C_2''/C_2' > 1.15 \quad (\text{A5-10})$$

variiert. Ob diese Änderung von ca. 20% einen Einfluß auf die simulierten Felder hat und in welche Richtung dieser Einfluß führt, ist bei dem vorliegenden System von nichtlinearen, gekoppelten Differentialgleichungen schwer abschätzbar. Es ist z.B. denkbar, daß eine Erhöhung von C_2 wegen (3-70) zu einer Dämpfung der Grobstrukturschwankungen, und diese ihrerseits über (3-92) und (3-93) zu einer Absenkung der Feinstrukturenergie führen, so daß letztlich die ϵ_{gr} nach (3-70), und damit auch die simulierten Grobstrukturfelder unverändert bleiben, aber daß dabei die Ergebnisse für die Feinstrukturenergie zu niedrig sind. Dem widerspricht teilweise das Auftreten von C_2 im Produktionsterm von (3-93). Eine grobe Abschätzung des Einflusses von C_2 , in Wechselwirkung mit C_3 , wird im Abschnitt A5.3 besprochen.

A5.2 Einfluß auf C_3

Zur Bestimmung des Einflusses der Abweichungen des realen Spektrums nach (A5-1) vom Kolmogorov-Spektrum (A4-18) auf die Dissipationsmodellkonstante C_3 wird von deren Definitionsgleichung (3-94) ausgegangen. Es werden ebenso die von Lilly [1967] eingeführten Näherungen (A5-3) benutzt. Für C_3 erhält man damit die Näherung:

$$C_3 \approx \frac{h}{\sigma_2^2} \cdot \frac{\langle \epsilon \rangle}{\left\{ \int_{\eta/h}^{\infty} E(k) dk \right\}^{3/2}} \quad (\text{A5-11})$$

Benutzt man, wie in der exakten Formulierung nach Kapitel 3.4.1, für $E(k)$ das Kolmogorov-Spektrum (A4-18), dann wird wegen (A5-4) folgendes Näherungsergebnis aus (A5-11) erreicht ($\delta_2=1$):

$$C_3' \approx \pi \left(\frac{2}{3 \alpha} \right)^{3/2} = 0,931 \quad (\text{A5-12})$$

Ersetzt man in (A5-11) das Spektrum $E(k)$ durch das reale Spektrum (A5-1), dann gelangt man zu der Näherung C_3'' für reale Spektren durch numerische Auswertung des Integrals im Nenner von (A5-11). Der Korrekturfaktor C_3''/C_3' erlaubt so aus C_3 nach (3-94) ein $C_{3\text{Real}}$ abzuschätzen:

$$C_{3\text{Real}} \approx C_3 C_3''/C_3' \quad (\text{A5-13})$$

Die numerische Auswertung für verschiedene h/η und h/L -Werte ergibt den in Abb. 9 und Tab. 10 dargestellten Verlauf. Die Abb. 9 zeigt die Abhängigkeit von h/L und h/η . Das Verhältnis C_3''/C_3' wächst mit zunehmendem h/L , d.h. z.B. bei abnehmender Maschennetauflösung oder bei Abnahme von L , und es wächst bei Abnahme von h/η , d.h. z.B. bei zunehmender Maschennetauflösung oder bei abnehmender Reynolds-Zahl. In dem hier nach (A5-8,9) maßgeblichen Bereich ist es jedoch fast nur abhängig von h/η . Dies ist bedingt durch die Abhängigkeit der Dissipation von der Form des Spektrums bei hohen Wellenzahlen, auf die L praktisch keinen Einfluß hat. D.h. in allen in dieser Arbeit betrachteten Fällen ist der Dissipationskorrekturfaktor nur von h und η , respektive der Reynolds-Zahl, abhängig. Er variiert in den Grenzen:

$$2 > C_3''/C_3' > 1,25 \quad (\text{A5-14})$$

Diese Änderung ist recht erheblich, so daß alleine schon dadurch vermutet werden muß, daß speziell das Dissipationsmodell Ansatzpunkt zur Erweiterung für inhomogene Strömungen sein sollte. Wie stark diese Änderungen die simulierten Grobstrukturfelder beeinflusst, ist ebenso schwierig argumentativ abzuschätzen, wie der Einfluß von C_2''/C_2' , obwohl C_3 "nur" im Dissipationsmodell der Energiegleichung vorkommt.

A5.3 Wirkung von C_2 und C_3

Welchen Einfluß die beiden Konstanten C_2 und C_3 , und damit ihre Korrekturfaktoren, auf den Energieinhalt in der Grobstruktur und in der Feinstruktur haben, wird kurz über stark vereinfachte Bilanzen für beide Energien abge-

schätzt. Als Vereinfachung wird dabei die Einschränkung auf stationäre Verhältnisse, auf grobe Maschennetze und auf die einzig wesentlichen Terme Produktion und Dissipation eingeführt.

Die Bilanz für die Grobstrukturenergie \overline{vE}' (\overline{E}' steht wegen (3-92) für \overline{E}'') kann durch Modifikation von (2-29) hergeleitet werden. Es ist

$$\frac{\partial \overline{vE}'}{\partial t} = 0 = - \langle \overline{u}_i' \overline{u}_j' \rangle \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle}{\partial x_j} - \mu \left\langle \left(\frac{\partial \overline{u}_i'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle \quad (\text{A5-15})$$

Darin ist μ ein Mittelwert über die neun Feinstrukturfähigkeiten ij_μ nach (3-70). Für die Grobstrukturschubspannungen $\langle \overline{u}_i' \overline{u}_j' \rangle$ wird angenommen, daß sie durch die Beiträge von $i=j'$, d.h. durch die Grobstrukturenergie bestimmt werden:

$$- \langle \overline{u}_i' \overline{u}_j' \rangle \sim \overline{vE}' \quad (\text{A5-16})$$

Und für die Grobstrukturdissipation wird wegen (A5-3) und aus Dimensionsgründen angenommen, daß gilt:

$$\left\langle \left(\frac{\partial \overline{u}_i'}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle \sim \overline{vE}' / h^2 \quad (\text{A5-17})$$

Einsetzen dieser Approximationen und von μ (3-70) ergibt für (A5-15):

$$0 \approx \overline{vE}' \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u}_i \rangle - C_2 h^{-1} \overline{vE}'^{1/2} \overline{vE}' \quad (\text{A5-18})$$

Die Bilanz für die Feinstrukturenergie \overline{vE}'' kann ausgehend von (3-93) zusammen mit der Näherung (A5-17) und der Annahme $C_{20} \approx 1$ (3-94) sofort angegeben werden:

$$0 \approx C_2 h^{-1} \overline{vE}'^{1/2} \overline{vE}' - C_3 h^{-1} \overline{vE}'^{3/2} \quad (\text{A5-19})$$

Aus beiden Bilanzen kann jetzt durch einfache arithmetische Operationen die Abhängigkeit der Grob- und Feinstrukturenergie von C_2 und C_3 abgeleitet werden. Aus (A5-18) erhält man:

$$\overline{vE}' \approx \left(\frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle}{\partial x_i} \cdot \frac{h}{C_2} \right)^2 \sim 1/C_2^2 \quad (\text{A5-20})$$

Einsetzen in (A5-19) liefert das entsprechende Ergebnis für die Grobstrukturenergie:

$$\sqrt{E'} \approx \frac{C_3}{C_2} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i} \cdot \frac{h}{C_2} \right)^2 \sim C_3 / C_2^3 \quad (\text{A5-21})$$

Es muß hier angemerkt werden, daß bei der Herleitung dieser Proportionalitäten die Abhängigkeit von h nur aus Dimensionsgründen eingeführt wurde und der Einfachheit halber auf eine genauere Wiedergabe z.B. von (A5-16,17) entsprechend (A5-4), verzichtet wurde. Entsprechend sind auch die Ergebnisse nicht bezüglich der h -Abhängigkeit interpretierbar.

Nun zur Interpretation der Ergebnisse bezüglich der C_2 - und C_3 -Abhängigkeit. Beide Ergebnisse (A5-20) und (A5-21) müssen als überraschend bezeichnet werden, denn (A5-20) besagt, daß die Feinstrukturenergie $\sqrt{E'}$ nur von C_2 abhängt, und zwar derart, daß bei Vergrößerung von C_2 , d.h. Vergrößerung des Produktionstermes, $\sqrt{E'}$ kleiner wird. Erklärbar wird dieser Effekt, wenn man das plausible Ergebnis für die Grobstrukturenergie betrachtet (A5-21), das besagt, daß $\sqrt{E'}$ mit zunehmendem C_2 , d.h. zunehmender Feinstrukturzähigkeit nach (3-70), kleiner wird. Wesentlich für die Feinstrukturenergie ist dabei, daß $\sqrt{E'}$ sehr stark, entsprechend $1/C_2^3$, von C_2 beeinflusst wird. Damit wird es möglich, daß die Vergrößerung des Produktionstermes der Feinstrukturenergiegleichung über die starke Dämpfung der Grobstrukturschwankungen letztlich über $\frac{1}{3} \bar{D}^2$ in (3-93) zu einer Absenkung der Feinstrukturenergie entsprechend $1/C_2^2$ führt.

Berücksichtigt man hier das Ergebnis des Abschnittes A5.1, nämlich daß z.B. bei einer Verringerung der Reynolds-Zahl $C_{2\text{Real}}$ ansteigt, und daß damit nach (A5-20,21) beide Energien abfallen, dann scheint dies insofern zu einem Widerspruch zu führen, wie die Erfahrung zeigt (siehe z.B. Comte-Bellot [1965], Durst [1968], Rehme [1975a,b]), daß in der hier gewählten Normierung nach (2-12) die gesamte Schwankungsenergie nur sehr schwach oder überhaupt nicht von der Reynolds-Zahl abhängt. Daß dies dennoch kein Widerspruch ist, liegt einzig an der Wirkung von C_3 .

Die Dissipationsmodellkonstante C_3 hat nach den Ergebnissen (A5-20) und (A5-21) alleine eine Auswirkung auf die Grobstrukturenergie, nicht aber auf die Feinstrukturenergie, in deren Gleichung (3-93) es vorkommt. Offensichtlich führt die Vergrößerung von C_3 , d.h. der Dissipation, über die Vergrößerung der Grobstrukturenergie entsprechend (A5-21) zu einer gleichgroßen Erhöhung des Produktionstermes, so daß letztlich, im zeitlichen Mittel, die Feinstrukturenergie davon unberührt bleibt.

Der oben angedeutete Widerspruch, daß die gesamte normierte Schwankungsenergie entgegen experimentellen Erfahrungen stark bei abnehmender Reynolds-Zahl absinkt, wird unter Berücksichtigung der Ergebnisse für C_{3Real} im Abschnitt A5.2 behoben. Denn diese Ergebnisse besagen, daß bei fallender Reynolds-Zahl, d.h. nach (A5-7) bei fallendem h/η , C_{3Real} wesentlich stärker ansteigt als C_{2Real} (vgl. Abb. 8 mit Abb. 9). Damit läßt der schwache Anstieg von C_2 zusammen mit dem kräftigen Anstieg von C_3 nach (A5-21) die Grobstrukturenergie weitestgehend unverändert.

Der aufgezeigte Widerspruch im Falle der Berücksichtigung von realen Spektren einzig in C_2 zeigt damit, daß eine Erweiterung der Feinstrukturenergiegleichung für inhomogene Strömungen nur dann sinnvoll ist, wenn sowohl der Produktionsterm, als auch der Dissipationsterm erweitert werden. Die Feinstrukturenergiegleichung erweist sich als der wesentliche Ansatzpunkt, um Inhomogenitätseffekte besser zu berücksichtigen.

Anhang 6: Feinstrukturanteil der Temperaturschwankungsenergie

Bei der Berechnung der Temperatur - rms- Werte aus den numerisch simulierten Temperaturfeldern ist die Kenntnis der nicht aufgelösten Temperaturschwankungsenergie $\overline{v_{E_T}^2}$ erforderlich, um die durch die Grobstruktur aufgelösten Schwankungen entsprechend ergänzen zu können:

$$\sqrt{\langle T'^2 \rangle} = \sqrt{\langle (v_T - \langle v_T \rangle)^2 \rangle} + \langle \overline{v_{E_T}^2} \rangle \quad (A6-1)$$

Für $\overline{v_{E_T}^2}$ wird in TURBIT eine zeit- und ortsabhängige Gleichung integriert. Um eine zusätzliche Gleichung für $\overline{v_{E_T}^2}$ ersparen zu können, bietet sich die Näherung an, $\overline{v_{E_T}^2}$ aus $\overline{v_{E'}^2}$ zu berechnen:

$$\langle \overline{v_{E_T}^2} \rangle = \langle \overline{v_{E'}^2} \rangle \cdot \left\{ \frac{\langle \overline{v_{E_T}^2} \rangle}{\langle \overline{v_{E'}^2} \rangle} \right\} \quad (A6-2)$$

Das unbekannte Verhältnis der beiden Feinstrukturenergien kann für $Pr = 1$ durch alleinige Zugrundelegung der entsprechenden Kolmogorov-Spektren (3-39,52) abgeschätzt werden:

$$\frac{\langle \overline{v_{E_T}^2} \rangle}{\langle \overline{v_{E'}^2} \rangle} = \frac{\int_{\eta/k}^{\infty} \beta \langle \epsilon_T \rangle \langle \epsilon \rangle^{-11/3} k^{-5/3} dk}{\int_{\eta/k}^{\infty} \alpha \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} dk} = \frac{\beta \langle \epsilon_T \rangle}{\alpha \langle \epsilon \rangle} \quad (A6-3)$$

Das Verhältnis der beiden Dissipationen kann über die Theorie isotroper Turbulenz nicht aus den Spektren berechnet werden. Es kann aber aus der zeitlich gemittelten Erhaltungsgleichung für T'^2 (2-31) und $u_z'^2$ (2-29) unter Vernachlässigung der diffusiven und konvektiven Terme berechnet werden, d.h. aus der Bilanz (3-57)

$$\text{Produktion} = \text{Dissipation,}$$

indem man nämlich die Produktion berechnet. Damit ergibt sich:

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \mu_z \rangle \left| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial x_3} \right|^2 = \ell^2 \left| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial x_3} \right|^3 \quad (A6-4)$$

Der Geschwindigkeitsgradient wird aus dem logarithmischen Wandgesetz (3-17) berechnet:

$$\langle \epsilon \rangle = \ell^2 \left| \frac{1}{\kappa \cdot y} \right|^3 \quad (A6-5)$$

Das analoge Vorgehen führt bei der Temperaturdissipation über den Ansatz für die Produktion:

$$\langle \varepsilon_T \rangle = 2 \langle \varepsilon_{T/2} \rangle = 2 \alpha_L \left| \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_3} \right|^2 = 2 \ell \ell_H \left| \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} \right| \left| \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_3} \right|^2 \quad (A6-6)$$

und über das logarithmische Wandgesetz der Temperatur (Anhang 2) zu dem Ergebnis:

$$\langle \varepsilon_T \rangle = 2 \ell \ell_H \left| \frac{1}{XY} \right| \left| \frac{1}{X_H Y_H} \right|^2 \quad (A6-7)$$

Die Bezeichnung Y_H soll hier darauf hinweisen, daß, z.B. bei einer adiabaten Wand, Y_H nicht der Wandabstand zur nächstliegenden Wand ist, sondern entsprechend der Wahl der Profillänge \hat{Y}_T in (3-20) der Abstand zur beheizten oder gekühlten Wand.

Das Ergebnis für (A6-3) ist damit:

$$\left. \frac{\langle \sqrt{\varepsilon_T'} \rangle}{\langle \sqrt{\varepsilon'} \rangle} \right|_{Pr=1} = \frac{\beta}{\alpha} 2 \frac{\ell_H |XY|^2}{\ell |X_H Y_H|^2} \quad (A6-8)$$

Darin sind ℓ und ℓ_H die Mischungswege nach (3-16,14) und (3-22).

Für glatte Wände und symmetrische thermische Randbedingungen kann aus (A6-8) wegen (3-20) sehr einfach das Verhältnis der Feinstrukturanteile abgeschätzt werden:

$$\frac{\langle \sqrt{\varepsilon_T'} \rangle}{\langle \sqrt{\varepsilon'} \rangle} \approx 2 \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\kappa}{\kappa_H} = 1,49 \quad (A6-9)$$

Berücksichtigt man weiterhin die unterschiedlichen Definitionen der beiden Energien (siehe Anhang 4, A4.3), dann kommt man zu dem Ergebnis, daß bei $Pr = 1$ und kleinen Rauigkeiten die durch das Maschennetz nicht aufgelöste Temperaturschwankungsenergie nur rund 75% der nicht aufgelösten Geschwindigkeitsschwankungsenergie beträgt. D.h. das Auflösungsvermögen der Maschennetze ist für Temperaturschwankungen besser, als für Geschwindigkeitsschwankungen.

Die Verallgemeinerung von (A6-3) für molekulare Prandtl-Zahlen $Pr \lesssim 1$ wird über das Verhältnis der Kolmogorov-Längen nach (2-44) angenähert. Als endgültiges Ergebnis erhält man:

$$\frac{\langle \sqrt{\varepsilon_T'} \rangle}{\langle \sqrt{\varepsilon'} \rangle} = 2 \frac{\beta}{\alpha} \frac{\ell_H}{\ell} \frac{|XY|^2}{|X_H Y_H|^2} Pr^{3/4} \quad (A6-10)$$

In allen Maschen, in denen $C_{T2} = 0$ ist, d.h. wo kein Feinstrukturanteil mehr existiert, wird auch (A6-10) zu Null gesetzt.

Nomenklatur

Allgemeine Kennzeichnung einer beliebigen Größe Y:

$\overline{v_Y}$	Mittelwert über ein Maschenvolumen
$\overline{j_Y}$	Mittelwert über eine Maschenoberfläche mit Normalen in x_j -Richtung
$\overline{Y^j}$	arithmetischer Mittelwert mit Nachbarmasche
\tilde{Y}^k	Mittelwert mit Nachbarmasche, gewichtet mit Maschenweiten
Y'	Schwankungen um den Zeitmittelwert $Y' = Y - \langle Y \rangle$ oder Flächenmittelwert $Y' = Y - \overline{j_Y}$, transformierte Größe
$\overline{v_{Y^r}}$	Mittelwert über die nicht aufgelöste Feinstruktur einer Masche
$\langle Y \rangle$	zeitlicher Mittelwert
$\overline{v_{\langle Y \rangle}}$	Mittelwert über das gesamte Strömungsvolumen
\hat{Y}	dimensionsbehaftete Größe
\underline{Y}	Vektor (Y_1, Y_2, Y_3)
Y_{ii}	$\sum_{i=1}^3 Y_{\overline{i}\overline{i}}$ bei doppelten rechts untenstehenden Indizes
$\frac{\partial Y}{\partial x_j}$	partielle Ableitung von Y nach x_j
$\delta_j Y$	zentraler Differenzenquotient von Y in x_j -Richtung
$\overline{\delta}_j$	Parabelnäherung für die partielle Ableitung

Symbole

a	Temperaturleitzahl molekular, $^j a_t$ isotrop, $^j a_t^*$ inhomogen
A_{ij}	Konstanten des Rotta-Pressure-Strain-Modells
A_W	Konstante in der van Driest'schen Dämpfungsfunktion
B_T	Konstante im logarithmischen Wandgesetz für Temperatur
B_W	Konstante in der Na- und Habib'schen Dämpfungsfunktion
C_j	Feinstrukturkonstanten des Impulsmodells
C_{Tj}	Feinstrukturkonstanten des Temperaturmodells
C_{iT}	Konstanten des Launder-Pressure-Scrambling-Modells
c_f	Reibbeiwert

c_p	spezifische Wärme
D	Kanalweite $D = R_2 - R_1$
D_{ij}^2	Deformationsgeschwindigkeitsquadrat, differentiell
$\overline{D_{ij}^2},_{ij}D^2$	Deformationsgeschwindigkeitsquadrat, Differenzenform
D_{lk}	maschennetzabhängiger Anteil von $\overline{D_{ij}}$
${}_j D_{Ti}^2$	Deformationstemperaturquadrat, Differenzenform
D_T^*	Flächenintegral
DTi	maschennetzabhängiger Anteil von ${}_j D_{Ti}$
E	Energie
$E(k)$	dreidimensionales skalares Energiespektrum
$E_{ij}(k)$	eindimensionales Spektrum von u_i, u_j
$E(h^+)$	Konstante im logarithmischen Wandgesetz für Geschwindigkeit
$ENERG_j$	Flächen- ($j = 2$) bzw. Volumenintegral ($j = 3$)
$f(h^n)$	Dämpfungsfunktionen in den inhomogenen Modellen
$f(h^+)$	Faktor im erweiterten van Driest'schen Ansatz
${}_j F$	Querschnittsfläche der Masche mit Normalen in x_j -Richtung
h	charakteristische Maschenweite, Rauigkeitshöhe
IM	Zahl der Maschen in x_1 -Richtung (Hauptströmungsrichtung)
JM	Zahl der Maschen in x_2 -Richtung (parallel zur Wand, senkrecht zu x_1)
KM	Zahl der Maschen in x_3 -Richtung (senkrecht zur Wand)
K	Maschennummer
K_j	Flächengewichtsfunktion
k	dreidimensionale Wellenzahl
k_1	eindimensionale Wellenzahl in x_1 -Richtung, $k_1 = 2\pi n / \langle u_1 \rangle$
k_{Netz}	Auflösungsgrenze des Netzes
L	Karman-Länge = Korrekturlänge in $E(k)$
$L_{ij,k}$	Korrelationslänge von R_{ij} in k -Richtung
l	Mischweglänge
$\text{Min}(a,b)$	Minimum von a und b ($\text{Min}(a,b) = a$ für $a < b$ und umgekehrt)

n	Exponent, Frequenz
Nu	Nusselt-Zahl
p	turbulenter Druck
P_x	Druckgradient in x_j -Richtung
Pe_τ	Peclet-Zahl $Pe_\tau = Re_\tau \cdot Pr$
Pr	molekulare Prandtl-Zahl $pr = \nu/a$
Pr_t	turbulente Prandtl-Zahl
PU	Pressure-Strain-Term
\dot{q}	Wärmestrom
\dot{Q}	volumetrische Wärmequelle
r	radiale Koordinage (x_3 -Richtung), Abstand zweier Punkte $r = \underline{\Delta x} $
R_i	radiale Koordinate der Wände $i = 1, 2$
R_{ij}	Zweipunktekorrlation $i, j = 1, 2, 3, T, E, p$
Re_τ	Reynolds-Zahl $Re = \langle u_{\tau 0} \rangle (R_2 - R_1) / \nu$
Re	Reynolds-Zahl $Re = \sqrt{\langle u_1 \rangle} (R_2 - R_1) / \nu$
St	Stanton-Zahl
t	Zeit
T	Temperatur
T^+	dimensionslose Temperatur $(T - T_w) / T^*$
T^*	"natural temperature", oder "friction temp.", oder "heat flux temp.", $T^* = \hat{q}_w / \hat{\rho} \hat{c}_p \hat{u}_\tau$
TG	Wert der Temperaturfeld-Galilei-Transformation
u_j	Geschwindigkeitskomponente in x_j -Richtung
u^+	dimensionslose Geschwindigkeit $u^+ = u_1 / u_\tau$
u_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$
V	Volumen einer Masche, Hauptströmungsgeschwindigkeit
VG	Wert der Geschwindigkeitsfeld-Galilei-Transformation
x_j	Koordinate (Definition siehe Abb. 1)

Δx_j	Maschenweite in x_j -Richtung, Abstand in x_j -Richtung
X_j	Periodenlänge in x_j -Richtung
Y	Wandabstand
\hat{Y}	Profillänge
Y^+	dimensionsloser Wandabstand $Y^+ = \hat{Y} \cdot Re_\tau / \hat{D}$
z	axiale Koordinate
α	Kolmogorov-Konstante (1.5)
β	Batchelor-Konstante (1.3)
Γ	Gamma-Funktion
δ_{ij}	Kronecker Delta
ϵ	Dissipation, Eddy Diffusivity
η	Kolmogorov-Länge
κ	Kármán-Konstante (0.4), Steuerexponent für kartesische oder zylindrische Koordinaten
κ_H	Analogen zu κ für Wärmeaustausch (0.465)
μ	turbulente Zähigkeit, ${}^{ij}\mu$ isotrop., μ^* inhomogen
ν	kinematische molekulare Zähigkeit
ρ	spezifische Dichte
γ_1, γ_2	Korrekturfaktoren im Impulsmodell
γ_T	Korrekturfaktor im Temperaturmodell
τ	Schubspannung, Koordinate
\emptyset	Periodenlänge in \hat{y} -Richtung
φ	azimutaler Winkel
\mathcal{S}_{ij}	Flächenintegral der Gewichtsfunktionen $K_i \cdot K_j$
ψ	Potential
ω	Winkelgeschwindigkeit

Indizes

o	Normierungsgrößen
1	Innenwand, zu den eindimensionalen Energiespektren gehörig
2	Außenwand
1/2	aus Transportgleichung für $T'^2/2$
A	Austritt
E	Eintritt
eff	effektiv, molekularer + turbulenter Anteil
flat	Flachheit (flatness)
ges	gesamt, Grobstruktur- + Feinstrukturanteil
h	hydraulisch
H	Wärmeaustausch
i,j	Koordinatenrichtung
KMH	KM/2, Kanalmitte
M	Impulsaustausch (momentum)
max	maximal
ni	Zeitindizes, $i = 0, 1, 2$
Real	für reales Spektrum nach Kármán-Kolmogorov-Pao
rms	root-mean-square
SGS	Feinstruktur (sub grid scale)
skew	Schiefe (skewness)
t	turbulent
T	Temperatur
W	Wand

Literatur

Van Atta, C.W. (1974) Influence of fluctuations in dissipation rates on some statistical properties of turbulent scalar fields, Atmospheric and Oceanic Physics 10, 443-446

Ball, H.D. (1972) Experimental investigation of eddy diffusivities of air in turbulent annular flow, Ph.D. Kansas St. Univ.

Barrow, H. (1957) Fluid flow and heat transfer in an annulus with a heated core tube, Proc. IME 169, 1113-1124

Barthels, H. (1967) Darstellung des Wärmeübergangs in konzentrischen Ringspalten unter Benutzung der Analogie zwischen Impuls und Wärmeaustausch, Jül-506-RB

Batchelor, G.K., Howells, I.D., Townsend, A.A. (1959) Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid, J. Fluid Mech. 5, 134-139

Baumann, W., Roth, A. (1976a) Experimentelle Untersuchungen an künstlichen Rauigkeiten im Übergangsbereich glatt-rauh, PSB-Vierteljahresbericht 1/76, KFK 1276/1, 127-6 - 127-10

Baumann, W., Roth, A. (1976b) Strömungstechnische Untersuchungen an künstlichen Rauigkeiten im Übergangsbereich glatt-rauh, PSB-Vierteljahresbericht 3/76, KFK 1276/3, im Druck

Baumann, W. (1976c) Persönliche Mitteilungen, 28.4. + 12.11.76

Benkert, J., Mika, C., Raes, K.H., Stegemann, D., de Carlos, J.E., Melches, I., Perez-Navarro, A., Verdaguer, F., Zurro, B. (1975) Flow-velocity-measurements by correlation of thermocouple-signals, submitted to Nuclear Technology

Blinco, P.H., Simons, D.B. (1975) Turbulent structure near smooth boundary, J. of the Eng. Mech. Division EM3, 241-255

Bobkov, V.P., Ibragimov, M.Kh., Subbotin, V.I. (1967) Statistische Daten über turbulente Temperaturschwankungen in der Strömung, Zhidkie metally, Moskau, 53-71, KFK-tr-372

Bobkov, V.P., Beschastnov, S.P., Gribanov, Yu.I., Ibragimov, M.Kh., Karpov, P.K. (1970) Statistical investigation of the temperature field during turbulent flow of water in a pipe, High Temp. 8, 760-765

Boston, N.E.J., Burling, R.W. (1972) An investigation of high-wavenumber temperature and velocity spectra in air, J. Fluid Mech. 55, 473-492

Boussinesq, J. (1877) Theorie de l'écoulement tourbillant, Mém. prés. Acad. Sci. XXIII, 46, Paris

Bremhorst, K., Bullock, K.J. (1970) Spectral measurements of temperature and longitudinal velocity fluctuations in fully developed pipe flow, Int. J. Heat Mass Transfer 13, 1313-1329

- Bremhorst, K., Walker, T.B. (1973a) Spectral measurements of turbulent momentum transfer in fully developed pipe flow, *J. Fluid Mech.* 61, 173-186
- Bremhorst, K., Bullock, K.J. (1973b) Spectral measurements of turbulent heat and momentum transfer in fully developed pipe flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* 16, 2141-2154
- Brighton, J.A., Jones, J.B. (1964) Fully developed turbulent flow in annuli, *Trans. ASME, D. (J. Basic Eng.)* 86, 835-844
- Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A. (1969) *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Zürich
- Brundrett, E., Burroughs, P.R. (1967) The temperature inner law and heat transfer for turbulent air flow in vertical square duct, *Int. J. Heat Mass Transfer* 10, 1139-1142
- Buleev, N.I. (1964) Theoretical model for turbulent transfer in three-dimensional fluid flow, *Third U.N. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy A/Conf.28/P/329*, USSR
- Bunshi, H., Seifritz, W. (1975) A fast-response thermocouple for temperature fluctuation measurements in sodium coolants, *Nucl. Technol.* 27, 523-525
- Cavers, S.D. Hsu, N.T., Schlinger, W.G. Sage, B.H. (1953) Temperature gradients in turbulent gas streams: Behavior near boundary in two-dimensional flow, *Ind. Eng. Chem.* 45, 2139-2145
- Cebeci, T. (1973) A model for eddy conductivity and turbulent Prandtl number, *J. of Heat Transfer* 95, 227-234
- Chen, Che Pen (1973) Détermination expérimentale du nombre de Prandtl turbulent près d'une paroi lisse, *Int. J. Heat Mass Transf.* 16, 1849-1862
- Chorin, A.J. (1968) Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comp.* 22, 745-762
- Clark, J.A. (1968) A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow, *J. Basic Eng.* 90, 455-467
- Clay, J.P. (1973) Turbulent mixing of temperature in water, air and mercury, Ph. D. Dissert., Univ. of Calif. San Diego
- Clinch, J.M. (1969) Measurements of the wall pressure field at the surface of a smooth-walled pipe containing turbulent water flow, *J. Sound Vib.* 9, 398-419
- Comte-Bellot, G. (1965) Écoulement turbulent entre deux parois parallèles, *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, No. 419
- Corrsin, S. (1951a) On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, *J. of Applied Physics* 22, 469-473

- Corrsin, S. (1951b) The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, *J. Aeronaut. Sci.* 18, 417-423
- Corrsin, S. (1952) Heat transfer in isotropic turbulence, *J. Appl. Phys.* 23, 113-118
- Corrsin, S. (1961) Turbulent flow, *American Scientist* 49, 300-324
- Corrsin, S. (1964) Further generalization of Onsager's cascade model for turbulent spectra, *Phys. Fluids* 7, 1156-1159
- Davies, F. (1969) Eddy viscosity and eddy conductivity a statistical approach and experimental verification, Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Dis. No. 4107
- Deardorff, J.W. (1970) A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 41, 453-480
- Deardorff, J.W. (1971) On the magnitude of the subgrid scale eddy coefficient, *J. of Comp. Physics* 7, 120-133
- Deardorff, J.W. (1972a) Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers, *J. of Atmosph. Sci.* 29, 91-115
- Deardorff, J.W. (1972b) Theoretical expression for the countergradient vertical heat flux, *J. Geophys. Res.* 77, 5900-5904
- Deardorff, J.W. (1973a) Three-dimensional numerical modeling of the planetary boundary layer, Workshop in Micrometeorol., Amer. Meteorol. Soc., Ed.: D.A.Haugen, 271-311
- Deardorff, J.W. (1973b) The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence, *J. of Fluids Eng.* 95, 429-438
- Deardorff, J.W. (1974a) Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer, *Boundary-Layer Meteorology* 7, 81-106
- Deardorff, J.W. (1974b) Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer, *Boundary-Layer Meteorology* 7, 199-226
- Deardorff, J.W. (1974c) Heat flux profiles from a sub-mesoscale boundary layer model, Seminarvortrag am NCAR, 21.11.1974, nicht veröffentlicht
- Deardorff, J.W., Peskin, R.L. (1970) Lagrangian statistics from numerically integrated turbulent shear flow, *The Phys. of Fluids* 13, 584-595
- Deardorff, J.W., Willis, G.E. (1974) Computer and laboratory modeling of the vertical diffusion of nonbuoyant particles in the mixed layer, *Advances in Geophysics* 18B, 187-200, Academic Press
- Dipprey, D.F., Sabersky, R.H. (1963) Heat and momentum transfer in smooth and rough tubes at various Prandtl numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer* 6, 329-353

- Donaldson, C. du P. (1973) Construction of a dynamic model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants, Workshop on Micrometeorology, Amer. Meteorol. Soc. ed: D.A.Haugen, 313-392
- Drake, R.L., Coyle, P.D., Anderson, D.P. (1974) The effects of nonlinear eddy coefficients on rising line thermals, J. of Atmosph. Sc. 31, 2046-2057
- van Driest, E.R. (1956) On turbulent flow near a wall, J. Aeronaut. Sci. 23, 1007-1011
- Dütting, S. (1976) Darstellung eines numerisch simulierten turbulenten Strömungsfeldes mit Hilfe von mitbewegten Punkten, Diplomarbeit, Inst. für Reaktortechnik, Universität Karlsruhe
- Durst, F. (1968) On turbulent flow through annular passages with smooth and rough core, M. Sc. Thesis Imp. College London
- Dwyer, O.E., Hlavac, P.J., Nimmo, B.G. (1976) Eddy diffusivity of heat transfer in the radial direction for turbulent flow of mercury in annuli, eingereicht bei Int. J. Heat Mass Transfer
- Eckelmann, H. (1974) The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel flow, J. Fl. Mech. 65, 439-459
- Elliott, J.A. (1972) Microscale pressure fluctuations measured within the lower atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech. 53, 351-383
- Emmons, H.W. (1970) Critique of numerical modeling of fluid mechanics phenomena, Annual Rev. Fluid Mech. 2, 15-36
- Fox, D.C., Deardorff, J.W. (1972) Computer methods for simulation of multidimensional, nonlinear, subsonic, incompressible flow, J. of Heat Transfer, 337-346
- Freymuth, P., Uberoi, M.S. (1971) Structure of temperature fluctuations in the turbulent wake behind a heated cylinder, The Physics of Fluids 14, 2574-2580
- Fuchs, H. (1973) Wärmeübergang an strömendes Natrium: Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Temperaturprofile und turbulente Temperaturschwankungen bei Rohrgeometrie, EIR-Ber. Nr. 241, Würenlingen
- Gärtner, D. (1974) Theor. Untersuchung des Wärmetransports bei erzwungener turbulenter Ringspaltströmung und örtlich beliebig veränderlichen Randbedingungen zweiter Art, Dissertation D 83, TU-Berlin
- Genin, L.G., Krasnoshchekova, T.E., Manchkha, S.P., Sviridov, V.G. (1974) Statistical characteristics of temperature fluctuations in a turbulent flow of mercury, High Temp. 12, 473-479
- Gibson, C.H. (1968) Fine structure of scalar fields mixed by turbulence: 1. Zero-gradient points and minimal gradient surfaces, 2. Spectral theory, Phys. Fluids 11, 2305-2327
- Gibson, C.H., Schwarz, W.H. (1963) The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields, J. Fluid Mech. 16, 365-385

- Gibson, C.H., Stegen, G.R., Williams, R.B. (1970) Statistics of the fine structure of turbulent velocity and temperature fields measured at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.* 41, 153-167
- Gibson, C.H., Vega, L.A., Williams, R.B. (1974) Turbulent diffusion of heat and momentum in the ocean, *Adv. in Geophys.* 18A, 353-370
- Gowen, R.A., Smith, J.W. (1967) The effect of the Prandtl number on temperature profiles for heat transfer in turbulent pipe flow, *Chem. Eng. Sci.* 22, 1701-1711
- Gowen, R.A., Smith, J.W. (1968) Turbulent heat transfer from smooth and rough surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer* 11, 1657-1673
- Granatstein, V.L., Buchsbaum, S.J., Bugnolo, D.S. (1966) Fluctuation spectrum of a plasma additive in a turbulent gas, *Physical Review Letters* 16, 504-507
- Grant, H.L., Hughes, B.A., Vogel, W.M., Moilliet, A. (1968) The spectrum of temperature fluctuations in turbulent flow, *J. Fluid Mech.* 34, 423-442
- Gröbner, W., Hofreiter, N. (1973) *Integraltafel, 2. Teil: Bestimmte Integrale*, Springer, Wien, 5. Aufl.
- Grötzbach, G. (1972) Messung der Temperaturverteilung im Totwasserbereich lokaler Blockaden in einem Brennelementmodell, Diplomarbeit, Inst. für Reaktortechnik, Universität Karlsruhe
- Grötzbach, G. (1974) Untersuchung der Austauschkoefizienten für Impuls und Enthalpie in turbulenter Kanalströmung, PSB-Vierteljahresbericht 3/74, KFK 1274/3, 129-1 - 129-9
- Grötzbach, G. (1976) Erste Ergebnisse der direkten numerischen Simulation von Temperaturfeldern bei turbulenter Natriumströmung, PSB-Vierteljahresbericht 2/76, KFK 1276/2, 129-6 - 129-11
- Grötzbach, G., Schumann, U. (1974) Untersuchung der Austauschkoefizienten für Impuls und Enthalpie in turbulenter Kanalströmung, PSB-Vierteljahresbericht 2/74, KFK 1274/2, 129-1 - 129-3
- Grötzbach, G., Lörcher, G., Schumann, U. (1974) Untersuchung der Austauschkoefizienten für Impuls und Enthalpie in turbulenter Kanalströmung, PSB-Vierteljahresbericht 1/74, KFK 1274/1, 129-1 - 129-5
- Grötzbach, G., Lörcher, G., Schumann, U. (1975) Anwendung und experimentelle Absicherung der direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen, Reaktortagung, Nürnberg, 8.-11.4.1975, ZAED, 145-148
- Gurvich, A.S., Zubkovskii, S.L. (1966) Evaluation of structural characteristics of temperature pulses in the atmosphere, *Izv. Acad. Sci, USSR, Atmos. Oceanic Phys.* 2, 118-120
- Hanjalić, K., Launder, B.E. (1972) Fully developed asymmetric flow in a plane channel, *J. Fluid Mech.* 51, 301-335

- Harlow, F.H., Hirt, C.W. (1969) Generalized transport theory of anisotropic turbulence, Los Alamos-Bericht LA-4086
- Heisenberg, W. (1948) Zur statistischen Theorie der Turbulenz, Zeitschrift für Physik 124, 628-657
- Helland, K. (1974) Energy transfer in high Reynolds number turbulence, Ph.D., University of California, San Diego
- Hinze, J.O. (1959) Turbulence, Mc Graw Hill, New York
- Hinze, J.O. (1973) Experimental investigation on secondary currents in the turbulent flow through a straight conduit, Appl. Sci. Res. 28, 453-465
- Hinze, J.O. (1975) Turbulence, Second Edition, Mc Graw Hill, New York
- Hirt, C.W. (1968) Heuristic stability theory for finite difference equations, J. Comp. Phys. 2, 339-355
- Howells, I.D. (1960) An approximate equation for the spectrum of a conserved scalar quantity in a turbulent fluid, J. Fluid Mech. 9, 104-106
- Hsu, N.T., Sage, B.H., Sato, K. (1956) Temperature gradients in turbulent gas streams: Effect of flow conditions upon eddy conductivity, Ind. Engng. Chem. 48, 2218-2223
- Hussain, A.K.M.F., Reynolds, W.C. (1975) Measurements in fully developed turbulent channel flow, J. Fluid Engng., 568-580
- Ibragimov, M.Kh., Rabotyashkin, Yu.M., Sabelev, G.I., Sidorov, V.I., Subbotin, V.I. (1967) Wärmetransport bei turbulenter Strömung in quadratischen Kanälen, Zhidkie metally, 82-102, KFK-tr-375
- Ibragimov, M.Kh., Subbotin, V.I., Taranov, G.S. (1971) Velocity and temperature fluctuations and their correlations in the turbulent flow of air in pipes, Int. Chem. Eng. 11, 659-665
- Jayatilleke, C.L.V. (1969) The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sub-layer to momentum and heat transfer, Progress in Heat Mass Transfer, Ed. U.Grigull, E.Hahne, 1, 193-329, Perg. Press N.Y.
- Johnk, R.E., Hanratty, T.J. (1962) Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe, I. The fully developed heat-transfer region, II. The thermal entrance region, Chem. Eng. Sci. 17, 867-890
- Johnson, D.S. (1959) Velocity and temperature fluctuation measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature, J. Applied Mechanics, Trans. ASME, E 26, 325-336
- Jones, W.P., Launder, B.E. (1972) The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer 15, 301-314
- Jones, W.P., Launder, B.E. (1973) The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer 16, 1119-1130

- Kader, B.A., Yaglom, A.M. (1972) Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows, *Int. J. Heat Mass Transfer* 15, 2329-2351
- Kaimal, J.C., Wyngaard, J.C., Izumi, Y., Coté, O.R. (1972) Spectral characteristics of surface-layer turbulence, *Quart. J. Royal Meteorol. Soc.* 98, 563-589
- Kao, S.K. (1974) Basic characteristics of global scale diffusion in the troposphere, *Advances in Geophysics* 18B, 15-32, Academic Press
- von Kármán, Th. (1948) Progress in the statistical theory of turbulence, *J. of Marine Res.* 1, 252-264
- Kau, C.J., Peskin, R.L. (1972) Numerical simulation of turbulence and diffusion in three-dimensional flow, Rutgers Univ., New Brunswick, New Jersey, Tech. Rep. 101
- Kays, W.M., Leung, E.Y. (1963) Heat transfer in annular passages-hydrodynamically developed turbulent flow with arbitrarily prescribed heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* 6, 537-557
- Kesic, D.M., Cermak, J.E., Panchev, S. (1970) The spectrum of energy in turbulent shear flow, Colorado State Univ., Tech. Rep. 5
- Khabakhpasheva, Ye.M., Perepelitsa, B.V. (1973) Turbulent heat transfer in weak polymeric solutions, *Heat Transfer Sov. Res.* 5, 117-122
- Kirsch, D. (1974) Investigations on the flow and temperature distribution downstream of local coolant blockages in rod bundle subassemblies, *Nucl. Engng. Des.* 31, 266-279
- Kolmogorov, A.N. (1941) The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *C.R. Acad. Sci. URSS*, 301-305
- Kolovandin, B.A., Vatutin, I.A. (1972) Statistical transfer theory in non-homogeneous turbulence, *Int. J. Heat Mass Transf.* 15, 2371-2383
- Kolovandin, B., Meola, C., Napolitano, L.G. (1973) A correlation model of nonhomogeneous turbulence and its application to channel flows, *Aerotec. Missili and Spazio* 52, 332-339
- Kraichnan, R.H. (1966) Dispersion of particle pairs in homogeneous turbulence, *The Physics of Fluids* 9, 1937-43
- Kraichnan, R.H. (1968) Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence, *The Physics of Fluids* 11, 945-953
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M. (1944) *Fluid mechanics*, Übers. aus dem Russ., Perg. Press, Oxford 1963
- Laufer, J. (1951) Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, NACA, Technical Report 1053

- Laufer, J. (1954) The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA, Technical Report 1174
- Launder, B.E. (1975) On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum, J. Fluid Mech. 67, 569-581
- Launder, B.E., Priddin, C.H. (1973) A comparison of some proposals for the mixing length near a wall, Int. J. Heat Mass Transfer 16, 700-702
- Launder, B.E., Spalding, D.B. (1972) Lectures in mathematical models of turbulence, Academic Press, London
- Launder, B.E., Spalding, D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 3, 269-289
- Launder, B.E., Reece, G.J., Rodi, W. (1975) Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, J. Fluid Mech. 68, 537-566
- Lawn, C.J. (1970) Application of the turbulence energy equation to fully developed flow in simple ducts, CEGB Report RD/B/R1575 a,b,c
- Lawn, C.J. (1971) The determination of the rate of dissipation in turbulent pipe flow, J. Fluid Mech. 48, 477-505
- Lawn, C.J., Elliott, C.J. (1971) Fully developed turbulent flow through concentric annuli, CEGB Report RD/B/N1878
- Lawn, C.J., White, R.S. (1972) The turbulence structure of heated pipe flow, CEGB Report RD/B/N2159
- Lee, Y. (1964) Turbulent flow and heat transfer in concentric and eccentric annuli, Ph.D. thesis, Univ. of Liverpool
- Leinemann, K. (1972) Programme zur graphischen Darstellung von ebenen und räumlichen Vektorfeldern, KFK 1637
- Leonard, A. (1973) On the energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows, Stanford Univ., Stanford/California, No. TF-1
- Leonard, A. (1974) Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows, Advances in Geophysics 18A, 237-248
- Leslie, D.C. (1973) Review of developments in turbulence theory, Rep. progr. Phys. 36, 1365-1424
- Lilly, D.K. (1967) The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments, Proc. of the IBM Sc. Comp. Symp. on Env. Sci., IBM-Form No. 320-1951, 195-210
- Lin, J.T. (1972) Velocity spectrum of locally isotropic turbulence in the inertial and dissipation ranges, Phys. Fluids 15, 205-207
- Lörcher, G. (1976) Laser-Doppler-Messungen von Energiedichtespektren in turbulenter Kanalströmung, eingereicht als Dissertation an der Universität Karlsruhe

- Lumley, J.L. (1970) Stochastic tools in turbulence, Acad. Press, New York
- Meyder, R. (1975) Turbulent velocity and temperature distribution in the central subchannel of rod bundles, Nucl. Engng. Des. 35, 181-189
- Monin, A.S., Yaglom, A.M. (1971, 1975) Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence, Vol. 1 + 2, MIT-Press, London
- Mulhearn, P.J. (1975) On the structure of pressure fluctuations in turbulent shear flow, J. Fluid Mech. 71, 801-813
- Na, T.Y., Habib, I.S. (1973) Heat transfer in turbulent pipe flow based on a new mixing length model, Appl. Sci. Res. 28, 302-314
- Navier, C.L.M.H. (1822) Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, Mém. Acad. Sci. 6, 389 ff.
- Nikuradse, J. (1932) Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren, VDI-Forsch.heft Nr. 356
- Nikuradse, J. (1933) Strömungsgesetze in rauhen Röhren, VDI-Forsch.heft Nr. 361
- Nishihara, H., Ohtsubo, A. (1969) Measurement of temperature noise in an out-of-pile heat transfer loop, J. Nuclear Energy 23, 99-111
- Obukhov, A.M. (1946) Turbulence in a thermally inhomogeneous medium, Trudy Inst. Teor. Geofiz., Akad. Nauk SSSR 1, 95-115
- Obukhov, A.M. (1949) The structure of the temperature field in turbulent flow (russ.), Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Geo. + Geophys. 13, 58-69
- Ogura, Y. (1958) Temperature fluctuations in an isotropic turbulent flow, J. of Meteorology 15, 539-546
- Orszag, S.A., Israeli, M. (1974) Numerical simulation of viscous incompressible flows, Ann. Rev. of Fluid Mech. 6, 281-318
- Orszag, S.A., Pao, Y.H. (1974) Numerical computation of turbulent shear flows, Advances in Geophysics 18A, 225-236
- Page, F. Jr., Corcoran, W.H., Schlinger, W.G., Sage, B.H. (1952) Temperature and velocity distributions in uniform flow between parallel plates, Ind. Eng. Chem. 44, 419-424
- Page, F. Jr., Schlinger, W.G., Breaux, D.K., Sage, B.H. (1952) Point values of eddy conductivity and viscosity in uniform flow between parallel plates, Ind. Engng. Chem. 44, 424-430
- Panofsky, H.S. (1969) The spectrum of temperature, Radio Science 4, 1143-1146
- Pao, Y.H. (1965) Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers, The Phys. of Fluids 8, 1063-1075

- Papailiou, D.D., Lykoudis, P.S. (1974a) Turbulent free convection flow, Int. J. Heat Mass Transfer 17, 161-172
- Papailiou, D.D., Lykoudis, P.S. (1974b) Magneto-fluid-mechanics free convection turbulent flow, Int. J. Heat Mass Transfer 17, 1181-1189
- Paquin, J.E., Pond, S. (1971) The determination of the Kolmogoroff constants for velocity, temperature und humidity fluctuations from second- and third-order structure functions, J. Fluid Mech. 50, 257-269
- Patterson, G.K., Ewbank, W.J., Sandborn, V.A. (1967) Radial pressure gradient in turbulent pipe flow, Phys. Fluids 10, 2082-2084
- Perry, A.E., Abell, C.J. (1975) Scaling laws for pipe-flow turbulence, J. Fluid Mech. 67, 257-71
- Peskin, R.L. (1974) Numerical simulation of lagrangian turbulent quantities in two and three dimensions, Advances in Geophysics 18A, 141-163
- Phelps, G.T., Pond, S. (1971) Spectra of the temperature and humidity fluctuations and of the fluxes of moisture and sensible heat in the marine boundary layer, J. Atmosph. Sci. 28, 918-928
- Pimenta, M.M., Moffat, R.J., Kays, W.M. (1975) The turbulent boundary layer: an experimental study of the transport of momentum and heat with the effect of roughness, Stanf. Univ., Stanford, Rep. HMT-21
- Polyayev, V.M., Bashmakov, I.V., Vlasov, D.I., Gerasimov, I.M. (1973) Hot-wire anemometer investigation of turbulent boundary layers at a permeable plate with injection, Heat Transf. Sov. Res. 5, 65-71
- Prandtl, L. (1925) Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, ZAMM 5, 136-139
- Prandtl, L. (1945) Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz, Nachr. der Akad. Wiss. Göttingen, Math.phys. van den Hoeck & Ruprecht, reprinted in: Gesam. Abhandlungen zur angew. Mechanik, Hydro- + Aerodynamik, by L. Prandtl, Berlin 1961, 874 ff.
- Ramm, H. (1975) Theoretisches Modell zur Beschreibung des Impuls- und Energietransports in turbulenter Kanalströmung, Technische Universität Berlin, TUBIK 31
- Rehme, K. (1974) Turbulent flow in smooth concentric annuli with small radius ratios, J. Fluid Mech. 64, 263-287
- Rehme, K. (1975a) Turbulence measurements in smooth concentric annuli with small radius ratios, J. Fluid Mech. 72, 189-206
- Rehme, K. (1975b) Turbulente Strömung in konzentrischen Ringspalten, KFK 2099
- Reinecke, H.H. (1974) Numerische Berechnung der thermohydraulischen Vorgänge in einer Kernschmelze, Dissertation, Technische Universität Hannover, Inst. für Verfahrenstechnik

- Reynolds, O. (1894) On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criteria, Phil. Trans. Roy. Soc., London A 186, 123 ff.
- Reynolds, W.C. (1976) Computation of turbulent flows, Annual Review of Fluid Mech. 8, 183-208
- Rodi, W. (1970) Basic equations for turbulent flow in cartesian and cylindrical coordinates, Imp. Coll. London, Dep. of Mech. Eng. BL/TN/A/36
- Rodi, W., Spalding, D.B. (1970) A two-parameter model of turbulence, and its application to free jets, Wärme- u. Stoffübertr. 3, 85-95
- Rotta, J.C. (1951) Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz (1. + 2. Mitteilung), Z. f. Phys. 129, 547-572; 131; 51-77
- Rotta, J.C. (1972) Turbulente Strömungen, B.G. Teubner, Stuttgart
- Rust, J.H., Sesonske, A. (1966) Turbulent temperature fluctuations in mercury and ethylene glycol in pipe flow, Int. J. Heat Mass Transfer 9, 215-227
- Sabot, J., Comte-Bellot, G. (1976) Intermittency of coherent structures in the core region of fully developed turbulent pipe flow, J. Fluid Mech. 74, 767-796
- Schemm, C.E. (1974) A three-dimensional numerical study of turbulence in homogeneous and convectively unstable fluids, Ph.D. Thesis, Princeton Univ.
- Schlichting, H. (1965) Grenzschicht-Theorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe
- Schon, J.P., Mathieu, J., Baille, A., Solal, J., Comte-Bellot, G. (1974) Experimental study of diffusion processes in unstable stratified boundary layers, Adv. in Geophysics 18B, 265-272, Academic Press
- Schumann, U. (1971) PLØTHL - Ein Fortran IV Unterprogramm zur Darstellung von Funktionen von zwei unabhängigen Variablen durch ihre Höhenlinien auf einem Plotter, KFK 1486
- Schumann, U. (1973a) Ein Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen, KFK 1854
- Schumann, U. (1973b) Results of a numerical simulation of turbulent channel flows, Proc. of the Int. Meet. on Reactor Heat Transfer, Karlsruhe, Oct. 9-11, 230-249
- Schumann, U. (1973c) Abschätzung der Feinstrukturkonstanten für die numerische Simulation der turbulenten Temperaturschwankungen, unveröffentlicht
- Schumann, U. (1974) Berücksichtigung der Abweichungen vom Kolmogorov-Spektrum im TURBIT-Feinstrukturmodell, unveröffentlicht

- Schumann, U. (1974a) Dynamische Datenblock-Verwaltung in FORTRAN, KFK-Ext. 8/74-2
- Schumann, U. (1975a) Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli, J. of Comp. Phys. 18, 376-404
- Schumann, U. (1975b) Numerical investigation of the wall pressure fluctuations in channel flows, Nucl. Eng. and Des. 32, 37-47
- Schumann, U. (1975c) Linear stability of finite difference equations for three-dimensional flow problems, J. of Comp. Phys. 18, 465-470
- Schumann, U., Patterson Jr., G.S. (1975) Numerical study of pressure and velocity fluctuations in nearly isotropic turbulence, eingereicht bei J. Fluid Mech.
- Schumann, U., Sweet, R.A. (1976) A direct method for the solution of Poisson's equation with Neumann boundary conditions on a staggered grid of arbitrary size, J. Comp. Phys. 20, 171-182
- Shaanan, S., Ferziger, J.H., Reynolds, W.C. (1975) Numerical simulation of turbulence in the presence of shear, Stanford Univ., Stanford, Cal., Rep. No. TF-6
- Shlanchauskas, A.A. (1973) Structure of turbulent transfer at a wall, Heat Transf. Sov. Res. 5, 170-176
- Simpson, R.L., Whitten, D.G., Moffat, R.J. (1970) An experimental study of the turbulent Prandtl number of air with injection and suction, Int. J. Heat Mass Transfer 13, 125-143
- Slanciauskas, A., Drizius, M.R., Zukauskas, A. (1973) Temperature fluctuations in the wall region during turbulent flow of a viscous liquid along a plate, Heat Transf. Sov. Res. 5, 74-83
- Slanciauskas, A., Pedisius, A., Zukauskas, A. (1973) Universal profiles of the temperature and turbulent Prandtl number in the boundary layer on a plate in a stream of fluid, Heat Transf. Sov. Res. 5, 63-73
- Smagorinsky, J.S. (1963) General circulation experiments with the primitive equations, Mon. Weather Rev. 91, 99-164
- Smidt, D. (1976) Reaktortechnik Bd. 1 u. 2, G. Braun, Karlsruhe, 2. Auflage
- Spaggs, L.D., Street, R.L. (1975) Three-dimensional simulation of thermally-influenced hydrodynamic flows, Stanford Univ., PB-247090/4
- Squire, H.B. (1951) The friction temperature: a useful parameter in heat transfer analysis, Proc. Gen. Discussion on Heat Transfer, London, 11.-13. Sept. (ASME), 185-186
- Stokes, G.G. (1845) On the theories of the internal friction of fluids in motion, Trans. Cambridge Phil. Soc. 8, 287-305

- Sviridov, V.G., Genin, L.G., Krasnoshchekova, T.E., Manchkha, S.P. (1975) Structure of temperature perturbations in turbulent flow of mercury in a round tube, High Temp. 13, 123-126
- Sviridov, V.G., Genin, L.G., Krasnoshchekova, T.E., Manchkha, S.P. (1975) "Energy" balance of temperature pulsations in the turbulent flow of mercury in a circular tube, High Temp. 13, 324-329
- Sweet, R.A. (1973) Direct methods for the solution of Poisson's equation on a staggered grid, J. Comp. Physics 12, 422-428
- Szablewski, W. (1976) Turbulente Scherströmungen, Schriftenreihe des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik, Heft 21, Akademie Verlag Berlin
- Taccoen, L. (1967) Contribution a l'etude des echanges thermiques en ecoulement turbulent dans un tube lisse application aux metaux liquides, Int. J. Heat Mass Transfer 10, 1649-1660
- Tanimoto, S., Hanratty, T.J. (1963) Fluid temperature fluctuations accompanying turbulent heat transfer in a pipe, Chem. Eng. Sci. 18, 307-311
- Taylor, G.I. (1935) Statistical theory of turbulence, Proc. Royal Soc. A 151, 421-464
- Tchen, C.M. (1973) Repeated cascade theory of homogeneous turbulence, Phys. of Fluids 16, 13-30
- Tennekes, H., Lumley, J.L. (1973) A first course in turbulence, MIT-Press, Cambridge
- Townsend, A.A. (1976) The structure of turbulent shear flow, Cambridge University Press, sec. ed.
- Trusov, B.G. (1971) Determination of the connection between turbulence intensity and turbulent energy dissipation, Soviet Aeronautics 14, 43-47
- Uberoi, M.S., Kovasznay, L.S.G. (1952) On mapping and measurement of random fields, Quart. Appl. Math. 10, 375-393
- Uberoi, M.S., Narain, J.P. (1974) Generalized Heisenberg theory of turbulence, Z. f. Physik 269, 1-5
- Ueda, H., Hinze, J.O. (1975) Fine-structure turbulence in the wall region of a turbulent boundary layer, J. Fluid Mech. 67, 125-143
- Wang, H., Nickerson, E.C. (1972) Response of a turbulent boundary layer to lateral roughness discontinuities, Col. St. Univ., Fort Collins, Col., CER71-72HW-ECN51, THEMIS Rep. No. 18
- Warsi, Z.U.A., Mertaugh, L.J. (1974) Estimation of turbulent energy dissipation using available transfer theories, AIAA Jl. 12, 237-239

- Weinberg, D. (1975) Temperaturfelder in Bündeln mit Na-Kühlung, Thermo- und fluiddynamische Unterkanalanalyse der Schnellbrüter-Brennelemente und ihre Relation zur Brennstabmechanik; Seminar der KTG im DAtF, 11.3.1975, Bensberg, KFK 2232, 167-202
- Wieghardt, K. (1969) Theoretische Strömungslehre, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, B.G. Teubner, Stuttgart
- Willmarth, W.W., Wooldridge, C.E. (1962) Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer, J. Fluid Mech. 14, 187-210, Corrig. J. Fluid Mech. 21, 1965, 107-109
- Wyngaard, J.C., Coté, O.R. (1971) The budgets of turbulent kinetic energy and temperature variance in the atmospheric surface layer, J. Atmos. Sci. 28, 190-201
- Wyngaard, J.C., Coté, O.R. (1972) Cospectral similarity in the atmospheric surface layer, Quart. J.R. Met. Soc. 98, 590-603
- Wyngaard, J.C., Pao, Y.H. (1971) Some measurements of the fine structure of large Reynolds number turbulence, Statistical Models and Turbulence, Lecture Notes in Physics 12, 1972, 384-401, Springer-Verlag
- Yaglom, A.M., Kader, B.A. (1974) Heat and mass transfer between a rough wall and turbulent fluid flow at high Reynolds and Péclet numbers, J. Fluid Mech. 62, 601-623
- Yeh, T.T., van Atta, C.W. (1973) Spectral transfer of scalar and velocity fields in heated-grid turbulence, J. Fluid Mech. 58, 233-261
- Zarić, Z. (1975) Wall turbulence structure and convection heat transfer, Int. J. Heat Mass Transfer 18, 831-842
- Zimmerer, W. (1975) PLOTCP, Ein Fortran IV-Programm zur Erzeugung von Calcomp-Plot-Zeichnungen, KFK 2081

Tab. 1: Mindestmaschenzahlen für die Auflösung aller Geschwindigkeitsschwankungen [Leonard 1973] und Temperaturschwankungen nach (2-44)

Re	für $u_1' = u_1 - \bar{u} = 0$	für $T' = T - \bar{T} = 0$	
		Pr = 0.02	Pr = 0.007
10^4	$3 \cdot 10^7$	4500	425
$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^5$	14 200
$5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^7$	$2,8 \cdot 10^6$

Tab. 2: Modelle für das logarithmische Temperaturprofil
 $T^+ = 1/\kappa_H \ln y^+ + B_T(h^+, Pr)$

Autor, Jahr	Pr	h^+	κ_H	$B_T(h^+, Pr)$
Gowen, Smith 1967	0,02-14	0	0,4-0,6	$5 \ln\left(\frac{5Pr+1}{30}\right) + 8,55 + 5Pr$
Jayatilleke 1969	$\geq 0,7$	≥ 0	$\kappa/Pr_t = 0,44$	$Pr_t \left(\frac{1}{\kappa} \ln(E(h^+)) + P \right)$ mit $P = 9,24 \left(\left(\frac{Pr}{Pr_t} \right)^{3/4} - 1 \right) (1 + 0,28 \exp(-\frac{0,007 Pr_t}{Pr}))$ $Pr_t = 0,9$
Kader, Yaglom 1972	$\geq 0,7$ $\ll 1$	0 0	0,47 0,47	$12,5 Pr^{2/3} + 2,12 \ln Pr - 5,3$ $12,5 Pr^{2/3} + 2,12 \ln Pr - 1,5$
Dipprey, Sabersky 1963	0,7-10	> 70		$5,19 h^{+0,2} Pr^{0,44} - \frac{1}{\kappa_H} \ln h^+$
Yaglom, Kader 1974	0,7-10	> 100 0-100	0,47	$0,55 h^{+1/2} (Pr^{2/3} - 0,2) - \frac{1}{\kappa_H} \ln h^+ + 9,5$ lineare Interpolation

Tab. 3: Literaturangaben zu den Konstanten des logarithmischen Wandgesetzes der Temperatur $T^+ = 1/\kappa_H \ln y^+ + B_T(\text{Pr})$ für glatte Kanäle

Autor, Jahr	Pr	κ_H	$B_T(\text{Pr})$	Bemerkungen
Taccoen 1967	0,007	0,41	-12,8	Aus Abb.77 von Fuchs abgeschätzt
Fuchs 1973	0,007	0,4	-13,1	
Johnk, Hanratty 1962	0,7	0,45	3,3	
Gowen, Smith 1967	0,7	0,46	3,0	
Šlančiauskas u.a. 1973	0,71	0,55	3,8	
" 1973	3	0,51	20,0	
" 1973	5,35	0,5	31,5	
Chen 1973	6,5	0,465	52,0	
" 1973	6,6	0,45	49,6	
" 1973	7	0,47	50,9	
Gowen, Smith 1967	14,3	0,4	76,3	
Šlančiauskas u.a. 1973	64	0,47	194,0	
Kader, Yaglom 1972	versch.	0,47		
Diese Arbeit	alle	0,465		

Tab. 4: Literaturangaben zu den "Kolmogorov"-Konstanten der Energie- und Temperaturschwankungsquadratspektren

Autor, Jahr	α	β	Fluid	Typ	Bemerkungen
Gibson, Schwarz 1963	$1,34^{+0,06}$	$1,17^{+0,17}$	Wasser	Gitter	Übers.russ. Arbeiten
Gurvich, Zubkovskii 1966		1,45			
Kraichnan 1966	1,77	0,208		theoret.	
Gibson 1968		1,11-1,69		theoret.	
Grant u.a. 1968		$1,03^{+0,2}$	Wasser	Meer	
Panofsky 1969		1,20	Luft	Erdgrenzschicht	
Gibson u.a. 1970	2,11	3,90	Luft	"	f(Re)
Lawn 1971	$1,62^{+0,12}$		Luft	Rohr	
Paquin, Pond 1971	$1,74^{+0,31}$	$1,37^{+0,2}$	Luft	Erdgrenzschicht	
Wyngaard, Coté 1971	$1,59^{+0,12}$	$1,32^{+0,16}$	Luft	"	
Wyngaard, Pao 1971	$1,62^{+0,06}$		Luft	"	
Boston, Burling 1972	$1,56^{+0,28}$	2,7	Luft	"	
Kaimal u.a. 1972	$1,53^{+0,15}$	$1,37^{+0,13}$	Luft	"	
Clay 1973	1,22-1,83	$1,33-2,17$	Quecksilb.	Gitter	f(Re), hier Grenzwert f. $Re \rightarrow \infty$
		1,67-2	Wasser	Kugelnachlauf	
		1,8-1,93	Luft	Strahl	
Tchen 1973	1,58			theoret.	
Yeh, van Atta 1973	1,34	1,27	Luft	Gitter	
Helland 1974	1,51		Luft	Gitter	
		1,3	Luft	Strahl	
Diese Arbeit	1,5	1,3			

Tab. 5: Werte der geometrischen Anteile der Deformationstemperatur-
 quadrate, $DT_i = \sum_{j=1}^3 DT_{ij}$
 Ringspalt: $R_1/R_2=0.45$; $\Delta x_1=1/8$; $\Delta x_2/R_1 = 1/8$; $\Delta x_3=1/16$

	isotropes Netz	R_1	Ringspalt Mitte (K=7)	R_2
DT1	2.7985	2.6952	2.6288	2.4980
DT2	1.66285	1.6414	1.6250	1.5867

Tab. 6: Temperaturfeinstrukturkonstanten für $\alpha = 1.5$, $\beta = 1.3$,
 Ringspalt wie in Tab. 5

	Re	Pe_T	isotropes Netz	R_1	Ringspalt Mitte	R_2
$^1 c_T$	-	-	1.0	1.1704	1.0870	1.0142
$^2 c_T$	-	-	1.0	1.0652	1.2243	1.4305
$^3 c_T$	-	-	1.0	0.8286	0.7916	0.7605
$c_{T2}(\gamma_T = 1)$	$2,4 \cdot 10^5$	10^4	0.1807	0.1761	0.1736	0.1688
$Pr_{tSGS} = \frac{c_2}{c_{T2}}$	"	"	0.4118	0.4384	0.4614	0.5016
$c_{T2}(\gamma_T = 1)$	$7 \cdot 10^4$	70	$\Delta x_2/R_1 = 0.05$	0.09646	0.01947	0.12002
$Pr_{tSGS} = \frac{c_2}{c_{T2}}$	"	"		0.712	3.530	0.5781

x) $\gamma_1 = 1$, $\gamma_T = 1$, c_2 nach (3- 80)

Tab. 7: Werte für die beiden Formulierungen der Deformationsgeschwindigkeitsquadrate \overline{ijD}^2 , berechnet für isotrope Turbulenz

$$f = \alpha \cdot \Gamma(1/3) \cdot 18/55 \langle \epsilon \rangle^{2/3} \cdot h^{-4/3}$$

	$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$ = 1 : 1 : 1	$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$ = 1.25 : 0.5 : 0.5
$\langle \overline{12D}^2 \rangle / f$	8.771	9.309
$\langle \overline{13D}^2 \rangle / f$	11.316	10.752

Tab. 8: Feinstrukturkonstanten für isotrope Maschennetze

Konstanten	Volumenintegrale aus numerischer Näherungs- Integration lösungen [Schumann 1973a]		korrigierte Werte (numerisch integriert)
$c_2 (\gamma_1=1)$	0.143	0.107	0,0709
c_{20}	1.6301	1.778	0,8044
ii_c	-	0.338	1,474
ij_c	-	1.331	0,823

Tab. 9: Korrekturfaktor $C_2^H/C_2^L = f(h/\eta, h/L)$ für die Berücksichtigung gemessener Energiespektren in C_2

H/L	F/ETA	35.000	70.000	100.00	350.00	700.00	100005406
.1000E-02		1.2815	1.1742	1.1364	1.0583	1.0365	1.0015
.12589E-02		1.2816	1.1742	1.1364	1.0584	1.0367	1.0016
.15845E-02		1.2817	1.1743	1.1365	1.0584	1.0368	1.0016
.19953E-02		1.2818	1.1744	1.1366	1.0585	1.0369	1.0017
.25119E-02		1.2820	1.1746	1.1368	1.0587	1.0370	1.0018
.31623E-02		1.2822	1.1748	1.1370	1.0589	1.0372	1.0020
.39811E-02		1.2825	1.1751	1.1372	1.0591	1.0374	1.0022
.50119E-02		1.2830	1.1754	1.1376	1.0594	1.0377	1.0025
.63096E-02		1.2836	1.1759	1.1380	1.0598	1.0381	1.0029
.10000E-01		1.2857	1.1777	1.1397	1.0613	1.0396	1.0044
.12589E-01		1.2872	1.1790	1.1410	1.0625	1.0407	1.0054
.15845E-01		1.2892	1.1807	1.1426	1.0639	1.0421	1.0068
.19953E-01		1.2919	1.1830	1.1447	1.0659	1.0440	1.0087
.25119E-01		1.2955	1.1861	1.1476	1.0685	1.0466	1.0112
.31623E-01		1.3003	1.1901	1.1515	1.0720	1.0500	1.0144
.39811E-01		1.3067	1.1955	1.1566	1.0767	1.0545	1.0189
.50119E-01		1.3152	1.2027	1.1635	1.0829	1.0606	1.0246
.63096E-01		1.3266	1.2124	1.1726	1.0912	1.0687	1.0324
.10000		1.3620	1.2424	1.2011	1.1170	1.0939	1.0567
.12589		1.3892	1.2655	1.2230	1.1369	1.1133	1.0753
.15849		1.4259	1.2966	1.2525	1.1636	1.1394	1.1005
.19953		1.4756	1.3388	1.2926	1.2000	1.1748	1.1346
.25119		1.5438	1.3967	1.3476	1.2498	1.2234	1.1813
.31623		1.6383	1.4769	1.4237	1.3187	1.2906	1.2460
.39811		1.7713	1.5898	1.5307	1.4156	1.3951	1.3369
.50119		1.9625	1.7515	1.6845	1.5546	1.5206	1.4671
.63096		2.2451	1.9911	1.9115	1.7594	1.7201	1.6587
1.0000		3.3673	2.9369	2.8068	2.5676	2.5063	2.4121
1.2589		4.5291	3.9031	3.7239	3.3976	3.3121	3.1822
1.5849		6.5949	5.6214	5.3370	4.8669	4.7356	4.5376
1.9953		10.458	8.7871	8.3050	7.6079	7.3815	7.0428

Tab. 10: Korrekturfaktor $C_3^0/C_3^1 = f(h/n, h/L)$ für die Berücksichtigung gemessener Energiespektren in C_3

H/L	H/ETA	1.0900	20.000	100.00	350.00	700.00	1.0000E+11
10000E-02							
12589E-02							
15849E-02							
19953E-02							
25119E-02							
31623E-02							
39811E-02							
50119E-02							
63096E-02							
10000E-01							
12589E-01							
15849E-01							
19953E-01							
25119E-01							
31623E-01							
39811E-01							
50119E-01							
63096E-01							
10000							
12589							
15849							
19953							
25119							
31623							
39811							
50119							
63096							
10000E+09	63125E+09	3.7972	1.5167	1.5167	1.1923	1.1162	1.99999
12589E+09	63126E+09	3.7972	1.5167	1.5167	1.1922	1.1162	1.99997
15849E+09	63128E+09	3.7973	1.5167	1.5167	1.1923	1.1162	1.0000
19953E+09	63126E+09	3.7972	1.5167	1.5167	1.1922	1.1162	1.99998
25119E+09	63127E+09	3.7973	1.5167	1.5167	1.1923	1.1162	1.99999
31623E+09	63127E+09	3.7973	1.5167	1.5167	1.1923	1.1162	1.0000
39811E+09	63127E+09	3.7973	1.5167	1.5167	1.1923	1.1162	1.0000
50119E+09	63128E+09	3.7973	1.5168	1.5168	1.1923	1.1162	1.0000
63096E+09	63127E+09	3.7973	1.5167	1.5167	1.1923	1.1162	1.0000
10000E+09	63129E+09	3.7974	1.5168	1.5168	1.1923	1.1162	1.0000
12589E+09	63131E+09	3.7974	1.5168	1.5168	1.1923	1.1162	1.0000
15849E+09	63133E+09	3.7975	1.5168	1.5168	1.1923	1.1162	1.0000
19953E+09	63137E+09	3.7976	1.5168	1.5168	1.1923	1.1163	1.0001
25119E+09	63142E+09	3.7978	1.5169	1.5169	1.1924	1.1163	1.0001
31623E+09	63151E+09	3.7980	1.5169	1.5169	1.1924	1.1163	1.0001
39811E+09	63167E+09	3.7985	1.5171	1.5171	1.1925	1.1164	1.0002
50119E+09	63187E+09	3.7991	1.5173	1.5173	1.1926	1.1165	1.0003
63096E+09	63223E+09	3.8051	1.5176	1.5176	1.1929	1.1167	1.0004
10000E+09	63370E+09	3.8044	1.5188	1.5188	1.1937	1.1175	1.0011
12589E+09	63512E+09	3.8086	1.5200	1.5200	1.1945	1.1183	1.0017
15849E+09	63739E+09	3.8152	1.5219	1.5219	1.1959	1.1194	1.0027
19953E+09	64099E+09	3.8256	1.5250	1.5250	1.1980	1.1213	1.0043
25119E+09	64673E+09	3.8423	1.5298	1.5298	1.2013	1.1243	1.0068
31623E+09	65591E+09	3.8687	1.5374	1.5374	1.2066	1.1291	1.0108
39811E+09	67063E+09	3.9107	1.5495	1.5495	1.2149	1.1366	1.0170
50119E+09	69451E+09	3.9776	1.5686	1.5686	1.2282	1.1485	1.0269
63096E+09	73364E+09	4.0846	1.5990	1.5990	1.2490	1.1672	1.0425
10000E+09	91160E+09	4.5340	1.7233	1.7233	1.3338	1.2432	1.1054
12589E+09	11141E+10	4.9880	1.8441	1.8441	1.4150	1.3157	1.1650
15849E+09	15026E+10	5.7417	2.0353	2.0353	1.5415	1.4280	1.2566
19953E+09	23184E+10	7.5187	2.3371	2.3371	1.7364	1.5998	1.3949
25119E+09	42498E+10	9.2418	2.8114	2.8114	2.0321	1.8578	1.5989
31623E+09	95498E+10	13.244	3.5525	3.5525	2.4723	2.2364	1.8908
39811E+09	26723E+11	20.729	4.7030	4.7030	3.1133	2.7773	2.2943
50119E+09	92635E+11	35.455	6.4853	6.4853	4.1293	3.5319	2.8339
63096E+09	38834E+12	65.988	9.2617	9.2617	5.3231	4.5670	3.5368

Tab. 11: Maschennetze

(K $\hat{=}$ kartesisch, Z $\hat{=}$ zylindrisch)

Netz	K7	K8	Z9	K2.2	Z2.2	K2.3
R_1/R_2	1	1	< 1	1	< 1	1
Δx_1	1/8	1/8	1/8	1/10	1/10	1/16
$\Delta x_2, \Delta \varphi$	1/8	3/16	$\pi/32$	1/8	$\pi/32$	1/16
Δx_3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16	1/16
IM	16	16	16	32	32	64
JM	8	16	16	16	32	32
KM	16	16	16	16	16	16
IM·JM·KM	2048	4096	4096	8192	16 384	32 768
X_1	2	2	2	3,2	3,2	4
X_2, ϕ	1	3	$\pi/2$	2	π	2

Tab. 12: Übersicht über die berechneten Fälle

	Netz	R_1/K_2	$Re/10^4$	$h_1^+(x_2)$	Pr	C_{II0}	Aufgeprägte Wandbed.			\dot{Q}	Problemlzeit	Zahl d. Zeitschritte	vorgebene Rechenzeit / min.
							$q_{w1}(x_2)$	T_{w1}	\dot{q}_{w2}				
Zupfändlichkeitsstudie, Luft	K7	1	30	0	0.7	0-3	-	0	0	2	6,54-9,43	1088	je 20
	K7	1	14	0	0.007	0	-	0	0	2	1,38-2,74	520	je 10
Hsu	K7	1	1,87	0	0.71	1	-	0	0	2	6,05	2128	40
Baumann	K7	1	19	465	7.	1	-	0	0	2	6,09-9,54	1500	30
Hinze	K8	1	8	180/0/180	0.7	1	-	0	0	2	2,42	1050	40
Dwyer	Z9	0,451	7	0	0.0214	0	1	-	-	0	4,31	1550	60
Rehme-Dwyer	Z9	0,1	7	0	0.0214	0	1	-	-	0	4,31-7,85	3000	125
\dot{q}_w (9)	Z9	0,25	2,3	0	0.007	0	0.5-1.5	-	-	0	4,15	4040	155
Hsu	K2.2	1	2,5	0	0.71	1	-	0	-	0	4	1875	150
Fuchs	K2.2	1	2,5	0	0.007	0	-	0	0	2	4-8,24	2350	180
K3	K2.3	1	25	0	0.7	1	1	-	-	0	3,98-8,21	3224	1080
Ball	Z2.2	0,25	2,5	0	0.7	1	1	-	-	0	4,51	2625	420
Dwyer	Z2.2	0,479	5	0	0.0214	0	1	-	-	0	5,21	2450	400
Weinberg	Z2.2	0,25	5	0	0.007	0	1	-	-	0	2,59	2775	445

$b_2^+ = 0$ in allen Fällen; tatsächliche Rechenzeit ca. 90% der vorgegebenen Rechenzeit

Tab. 13: Literaturübersicht zur Temperaturfeldauswertung im Plattenkanal und Ringspalt

Autor/Jahr	R_1/R_2	Wand	u - Profil	u' - Statistik	T - Profil	T' - Statistik	Fluid
Page 1952/52	1	glatt	x	- ξ_m	x	- ξ_H	Luft
Cavers 1953	1	glatt	x	-	x	- ξ_H	Luft
Hsu 1956	1	glatt	x	- ξ_m	x	- ξ_H	Luft
Ibragimov 1967	quadr.Kanal	glatt	-	-	x	x	Wasser, Hg
Khabakhpasheva 1973	quadr.Kanal	glatt	x	-	x	-	Wasser
Schon 1974	Platte	glatt	x	x	x	x	Luft
Pimenta 1975	Platte	rauh	x	x	x	x	Luft
Barrow 1957	.444	glatt	x	-	x	-	Luft
Y.Lee 1964	.613	glatt	x	- ξ_m	x	- ξ_H	Luft
	.387		x	- ξ_m	x	- ξ_H	
	.258		x	-	-	-	
	.0124		x	-	-	-	
Ball 1972	.25	glatt	x	- ξ_E	x	- ξ_H	Luft
Weinberg 1975	.25	glatt	x	-	-	-	Wasser
			-	-	x	x	Natrium
Dwyer 1976	.478	glatt	-	-	x	- ξ_H	Hg
	.36		-	-	-	-	
	.25		-	-	-	- ξ_H	

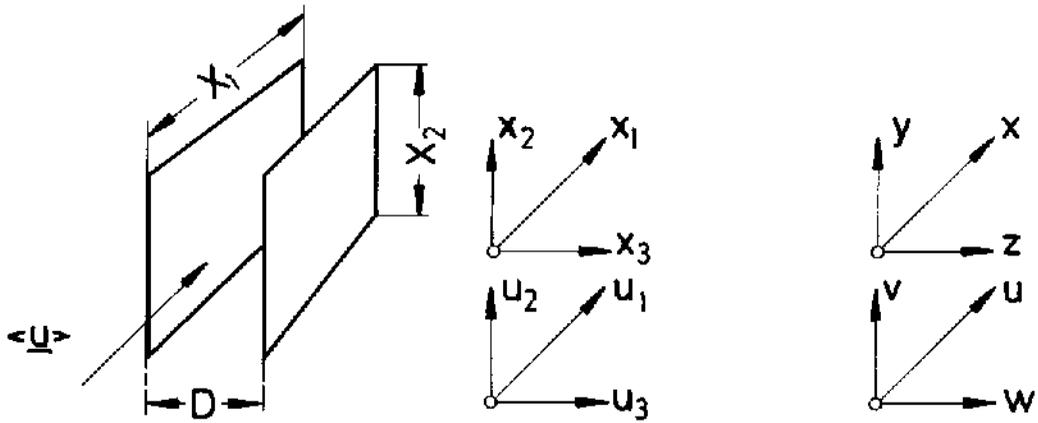
Tab. 14: Übersicht über einige integrale numerische Ergebnisse und über einige vergleichbare experimentelle Ergebnisse. In Klammern: Ergebnisse von empirischen Formeln

Fall	$Re \cdot 10^{-4}$	R_1/R_2	u_{max}	$u_{1max}^{-V} < u_1 >$	C_f	$Nu(Pr=0,7)$	$Nu(Pr=0,0214)$	$Nu(Pr=0,007)$
K7 Hsu	1,87	1	21,41	2,67	0,0228	43,5	-	-
K2.2 Hsu	2,5	1	21,85	2,45	0,0213	55,1	-	-
K2.2 Fuchs	2,5	1	21,85	2,45	0,0213	-	-	6,58
K2.3 K3	25	1	28,28	3,10	0,0126	343,9	-	-
Z9 \dot{q}_w (°)	2,3	0,25	22,21	2,99	0,0216	-	-	4,11
Z2.2 Ball	2,5	0,25	22,70	3,09	0,0208	50,6	-	-
Z2.2 Weinberg	5	0,25	23,71	2,78	0,01826	-	-	4,67
Z2.2 Dwyer	5	0,479	23,47	2,59	0,01835	-	7,20	-
Z9 Dwyer	7	0,451	24,84	3,11	0,0169	-	6,98	-
Z9 Rehme-Dwyer	7	0,1	25,17	3,31	0,0167	-	9,70	-
<hr/>								
Barrow 1957	2,19	0,444	21,5	-	0,022	42,8	-	-
Kays 1963	2,5	0,255	-	-	-	47,5 (53)	-	-
Brighton 1964	2,5	0,375	-	-	0,0201	-	-	-
Lee 1964	2,29	0,258	22,5	3,23	0,0241?	68,1	-	-
Barthels 1967	2,5	0,45	-	-	0,0229	59,3	-	-
"	5	0,479	-	-	0,0196	-	(7,06)	-
"	7	0,451	-	-	0,0182	-	(8,41)	-
Ball 1972	2,5	0,25	20,6	2,48	0,0245?	47 (52,8)	-	-
Rehme 1975	8,28	0,1	25,0	3,34	0,0177	-	-	-

Tab. 15: Vergleich der experimentellen \overline{f} [Baumann 1976c] und numerischen Ergebnisse für einen einseitig rauhen Plattenkanal

	Baumann	TURBIT-2	Abweichung
$u_{\text{glatt max}}^+$	24,72	25,7	+ 4%
$u_{\text{rauh max}}^+$	16,53	17,25	+ 4%
$u_{\text{max}}/\overline{u}_\tau$	19,82	20,3	+ 2,5%
C_f	0.0254	0.0267	+ 5,1%
$Y_{l \tau=0}$	0.722	0.7	- 3%
$Y_{l u_{\text{max}}}$	0.614	0.6	- 2,3%

Plattenströmung



Ringspaltströmung

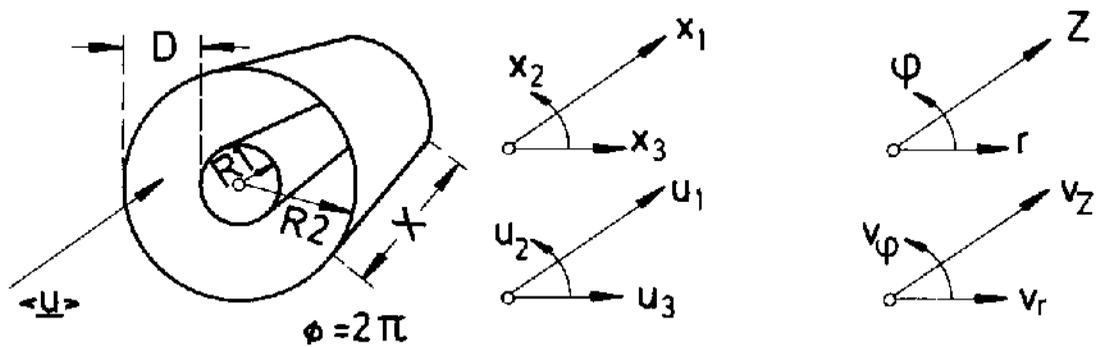


Abb. 1: Die betrachteten Kanalgeometrien

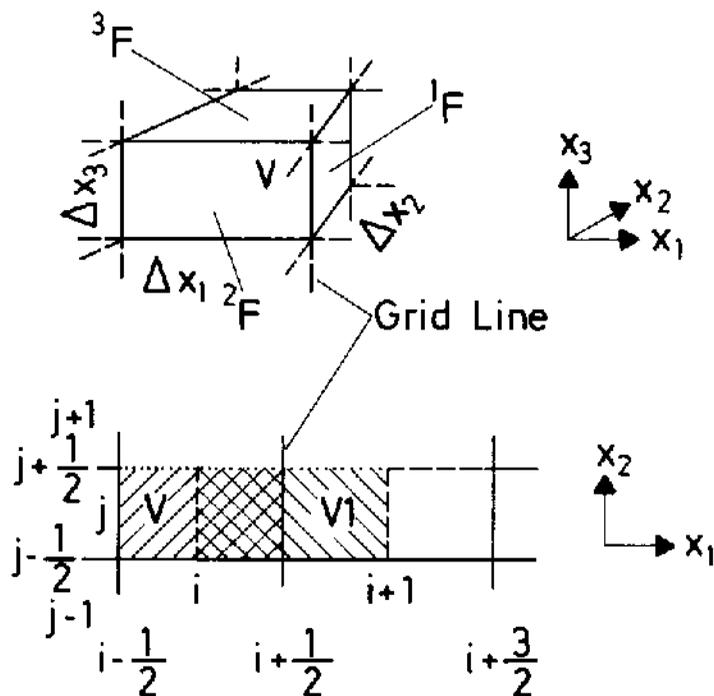


Abb. 2: Notation der Maschen-Randlinien, -Flächen und -Volumina

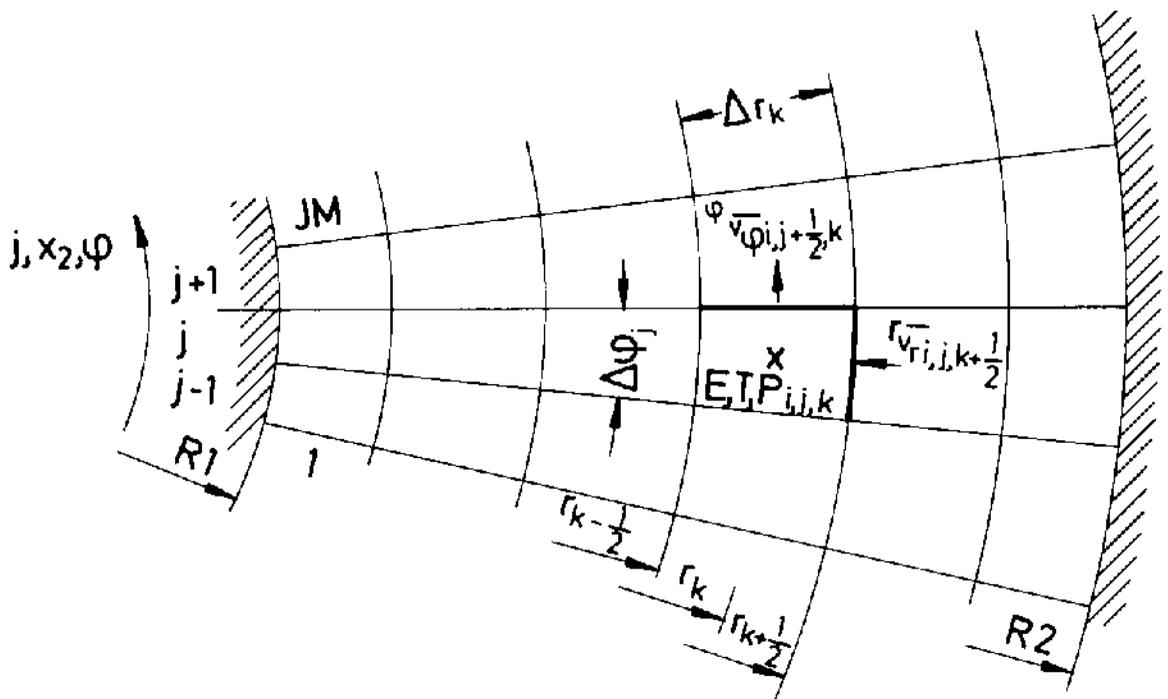
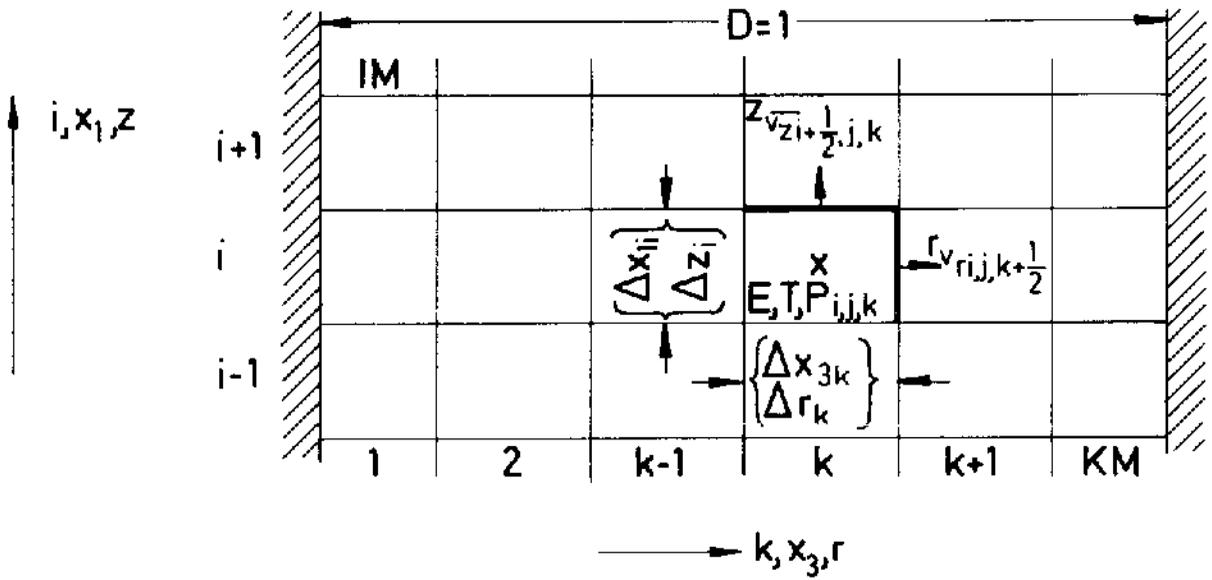


Abb. 3: Versetztes Maschennetz (staggered grid)

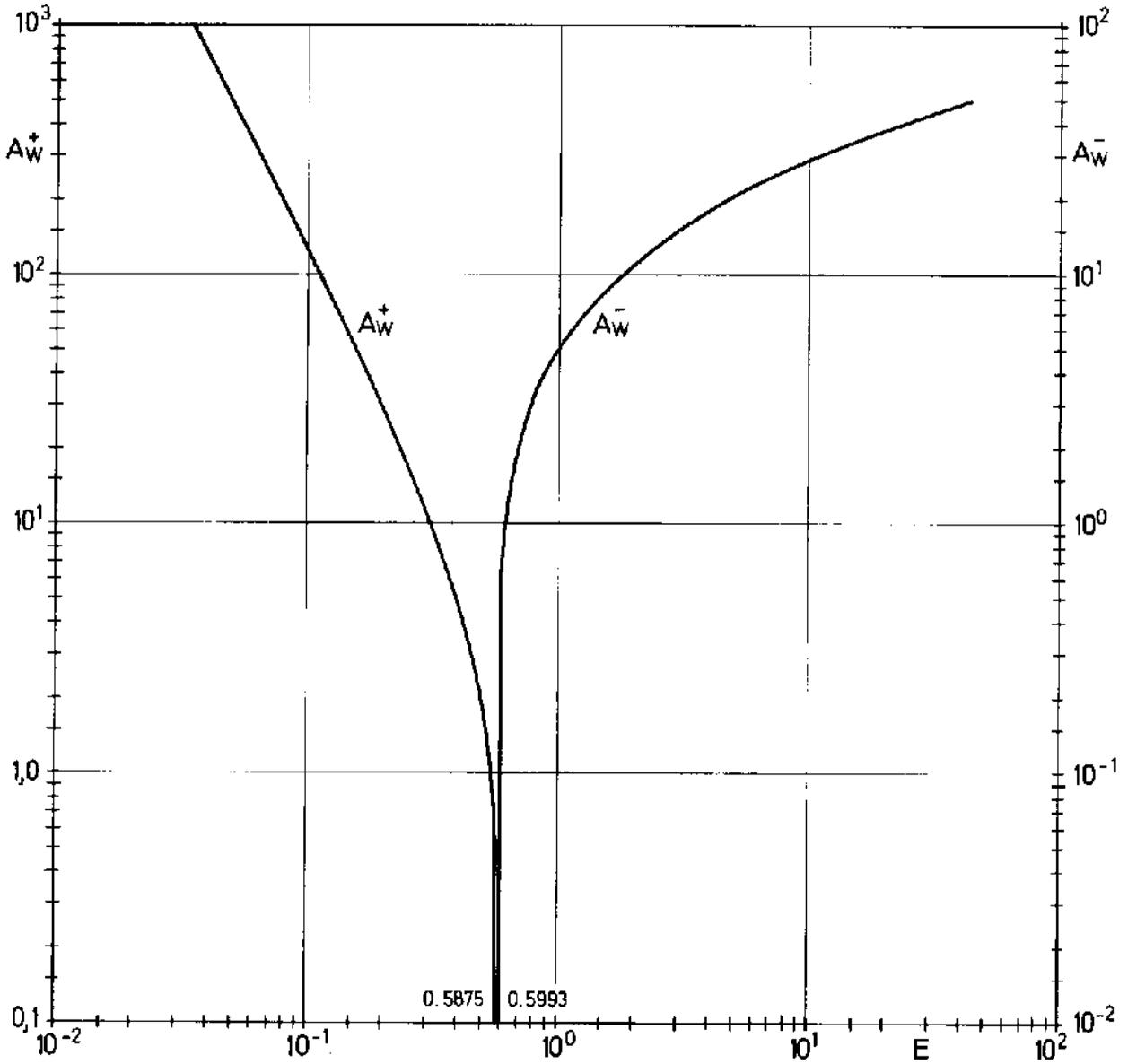


Abb. 4: Die modifizierte von Driest'sche Konstante A_w für verschiedene Rauigkeiten $E(h^+)$ [Grötzbach 1974]

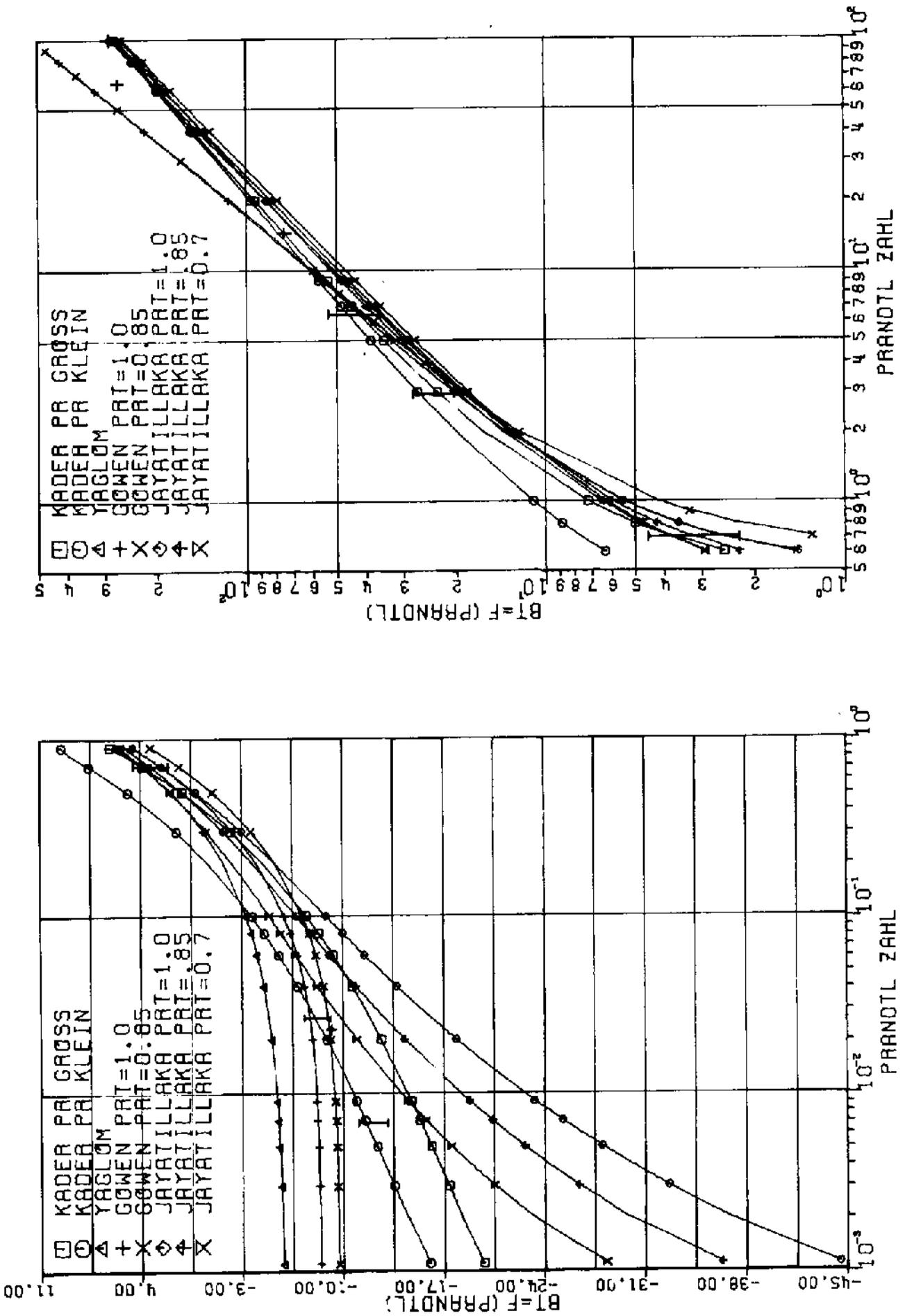


Abb. 5: $B_T(\text{Pr})$ PrT = turbulente Prandtl-Zahl, I Bereich vieler veröffentlichter Meßwerte

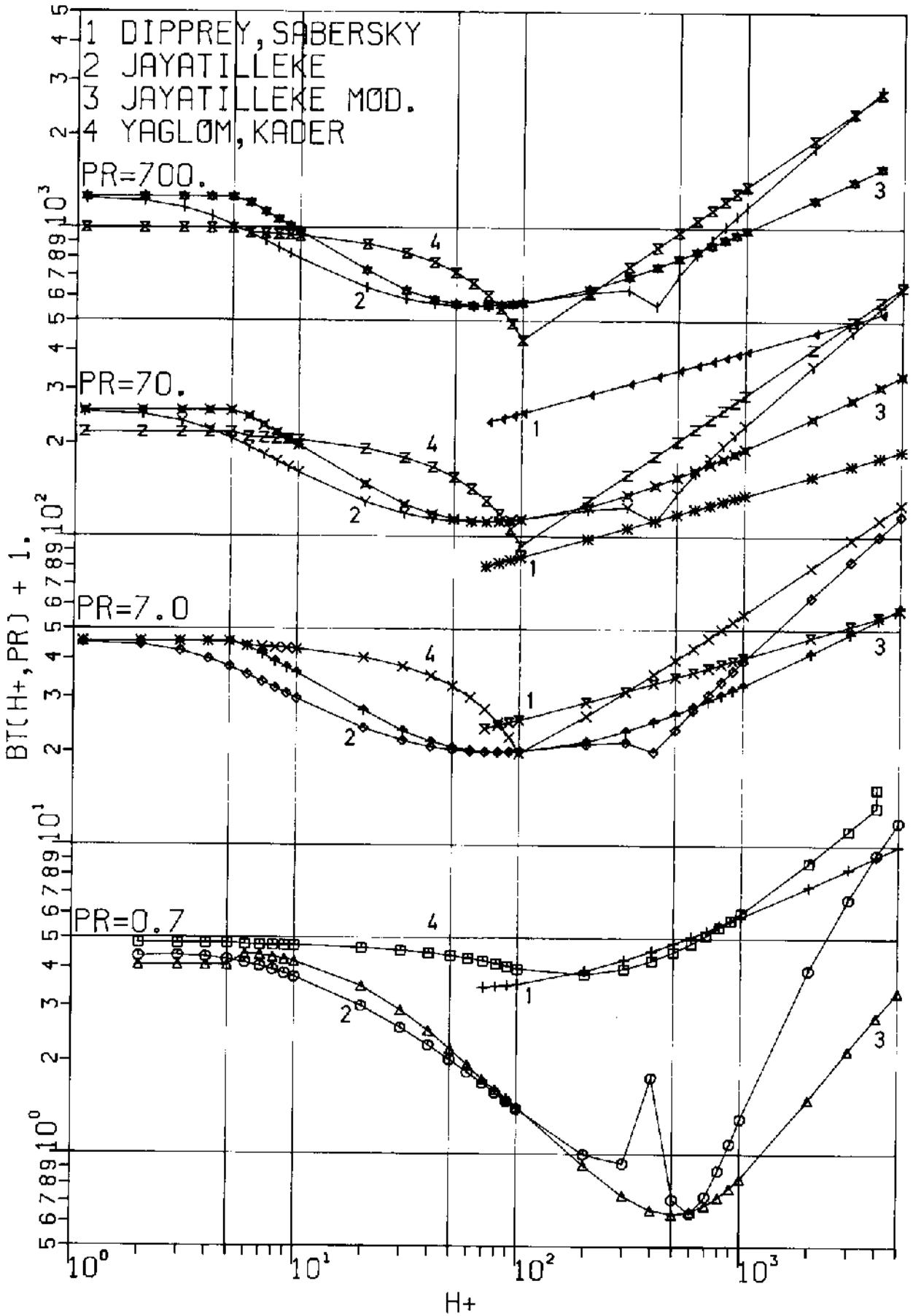


Abb. 6: $B_T(H^+, Pr) + 1$ für Sandrauigkeit

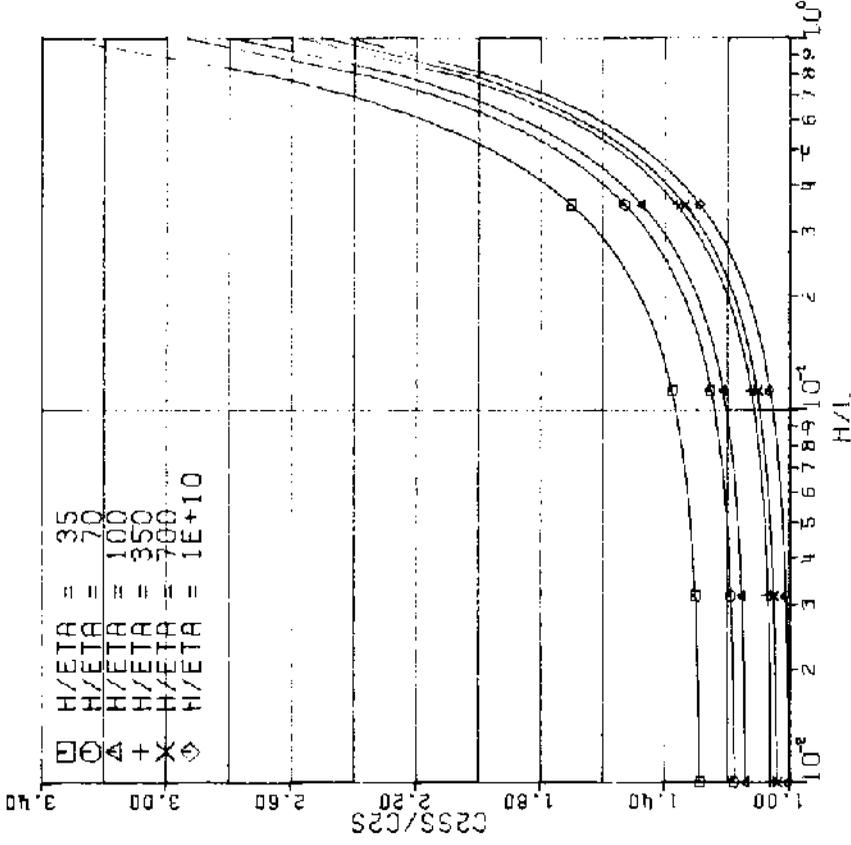


Abb. 8: Korrekturfaktor c_2''/c_2' für die Berücksichtigung gemessener Energiespektren in c_2

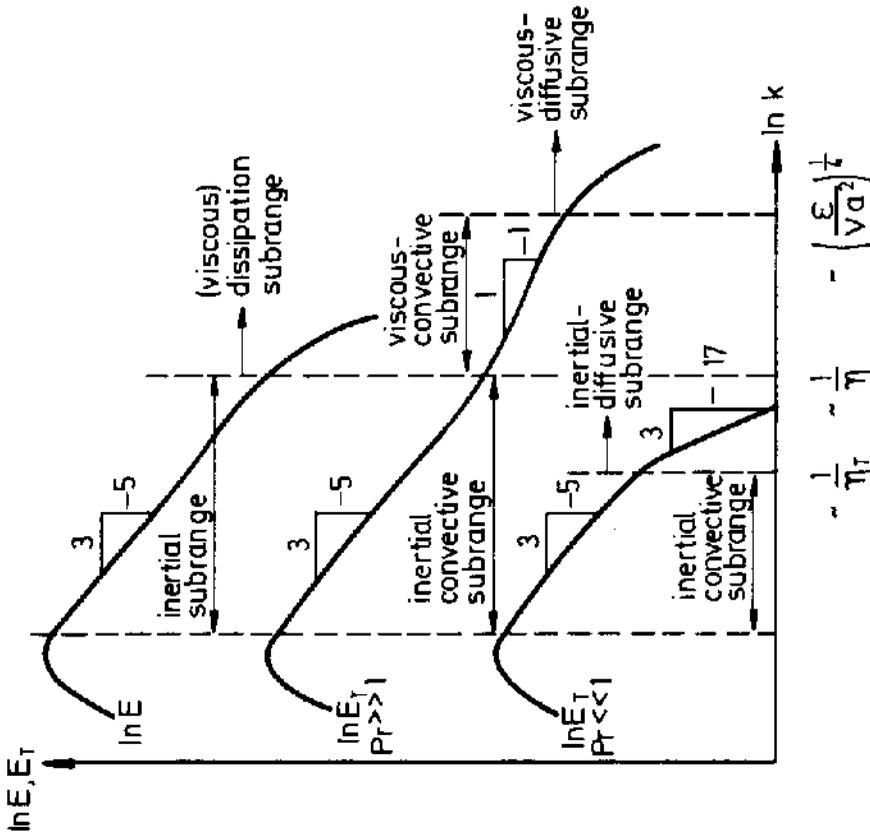


Abb. 7: Temperaturspektrum E_T für $Pr \ll 1$ und $Pr \gg 1$ im Vergleich zum Energiespektrum E

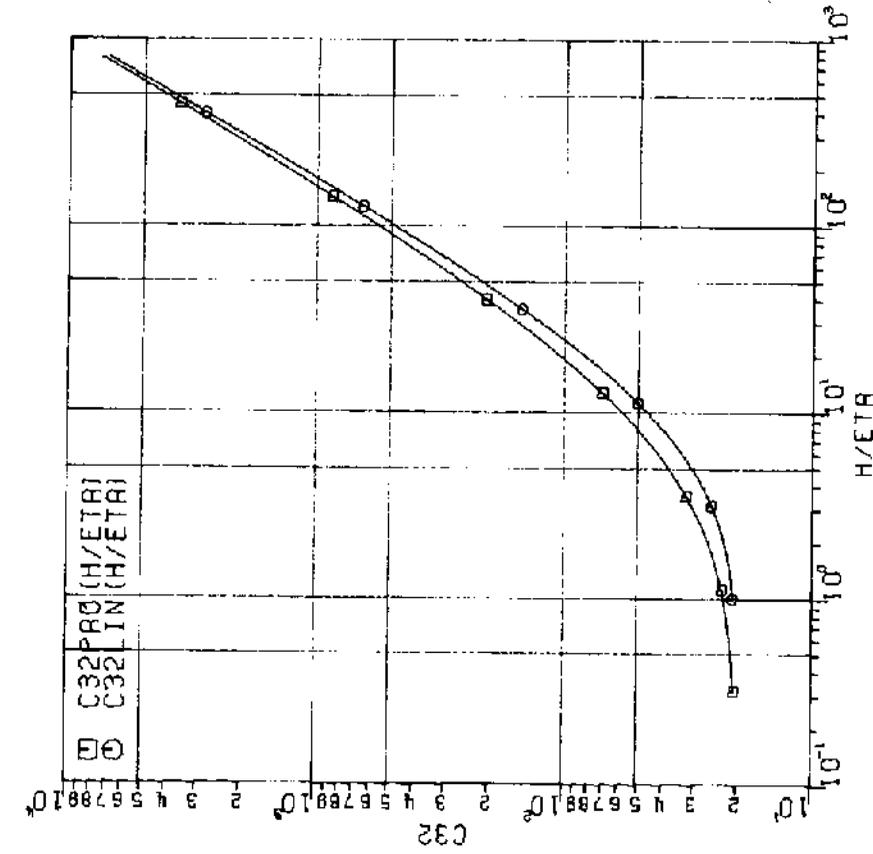


Abb. 10: Konstante c_{32} für das Pao- und Lin-Spektrum

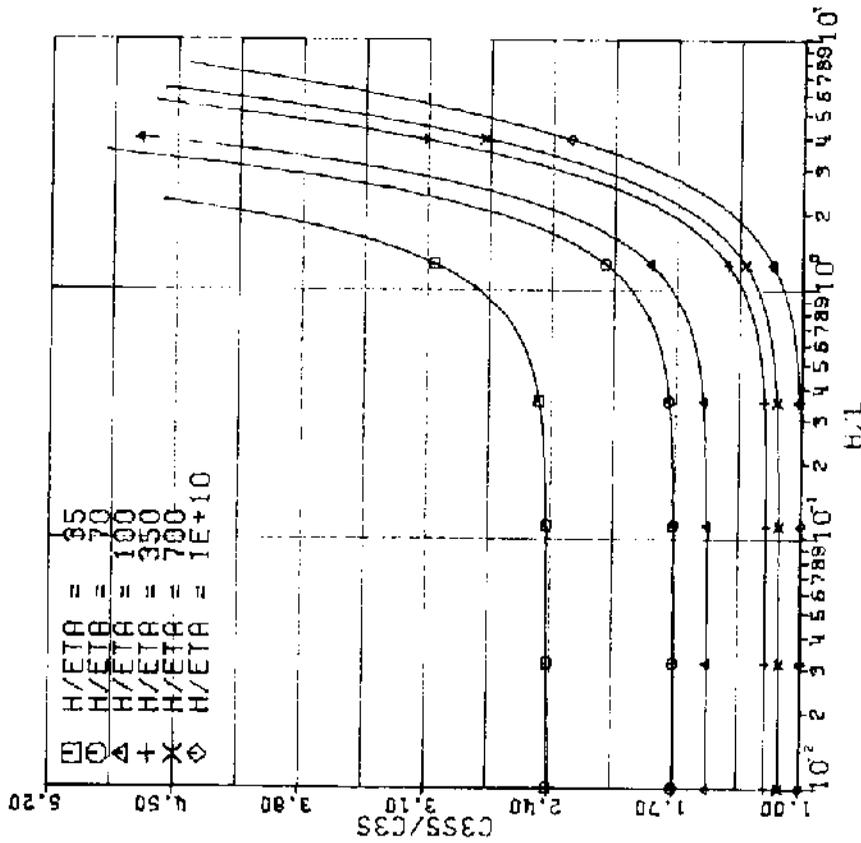


Abb. 9: Korrekturfaktor c_3''/c_3' für die Berücksichtigung gemessener Energiespektren in c_3

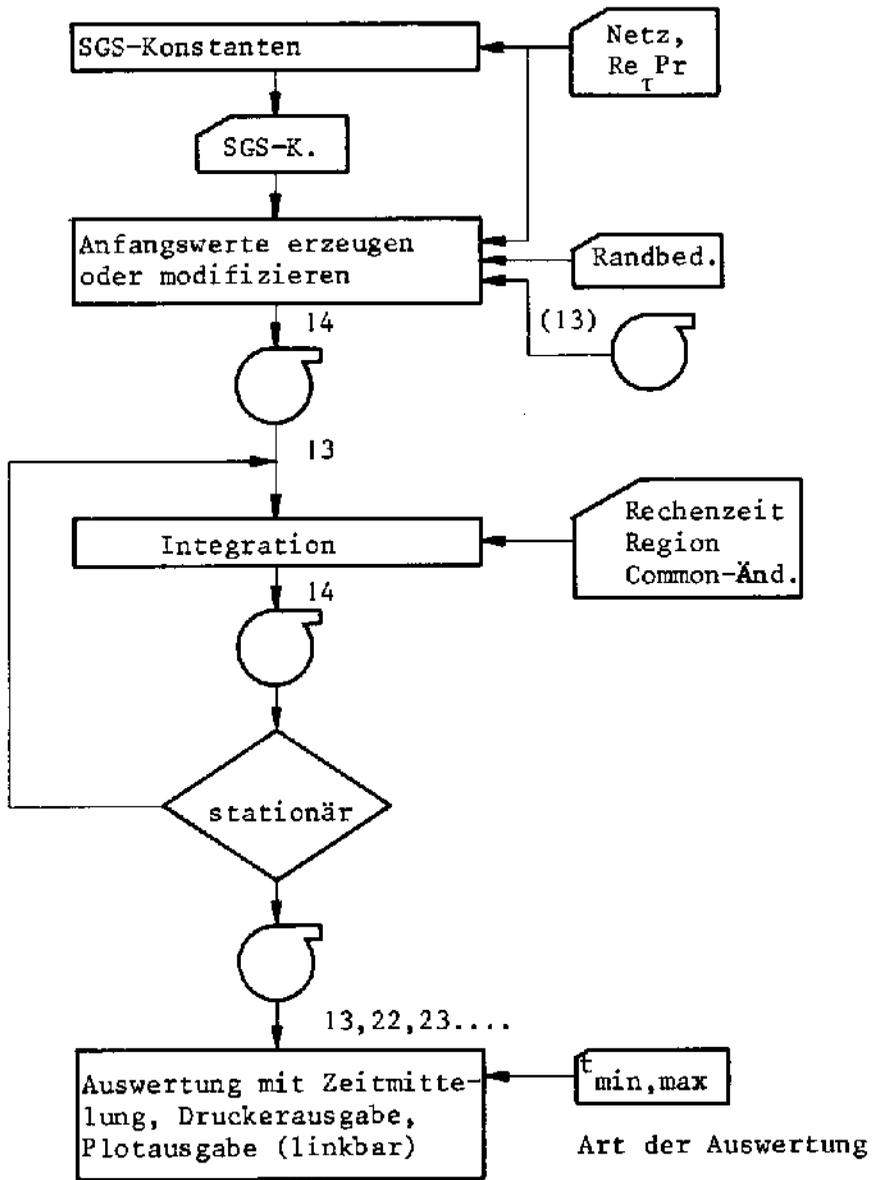


Abb. 11: Jobfolge von Feinstrukturkonstantenberechnung, Anfangswertbereitstellung, mehrmaliger Integration und Auswertung der Integrationsergebnisse (13...=File-Nummern)

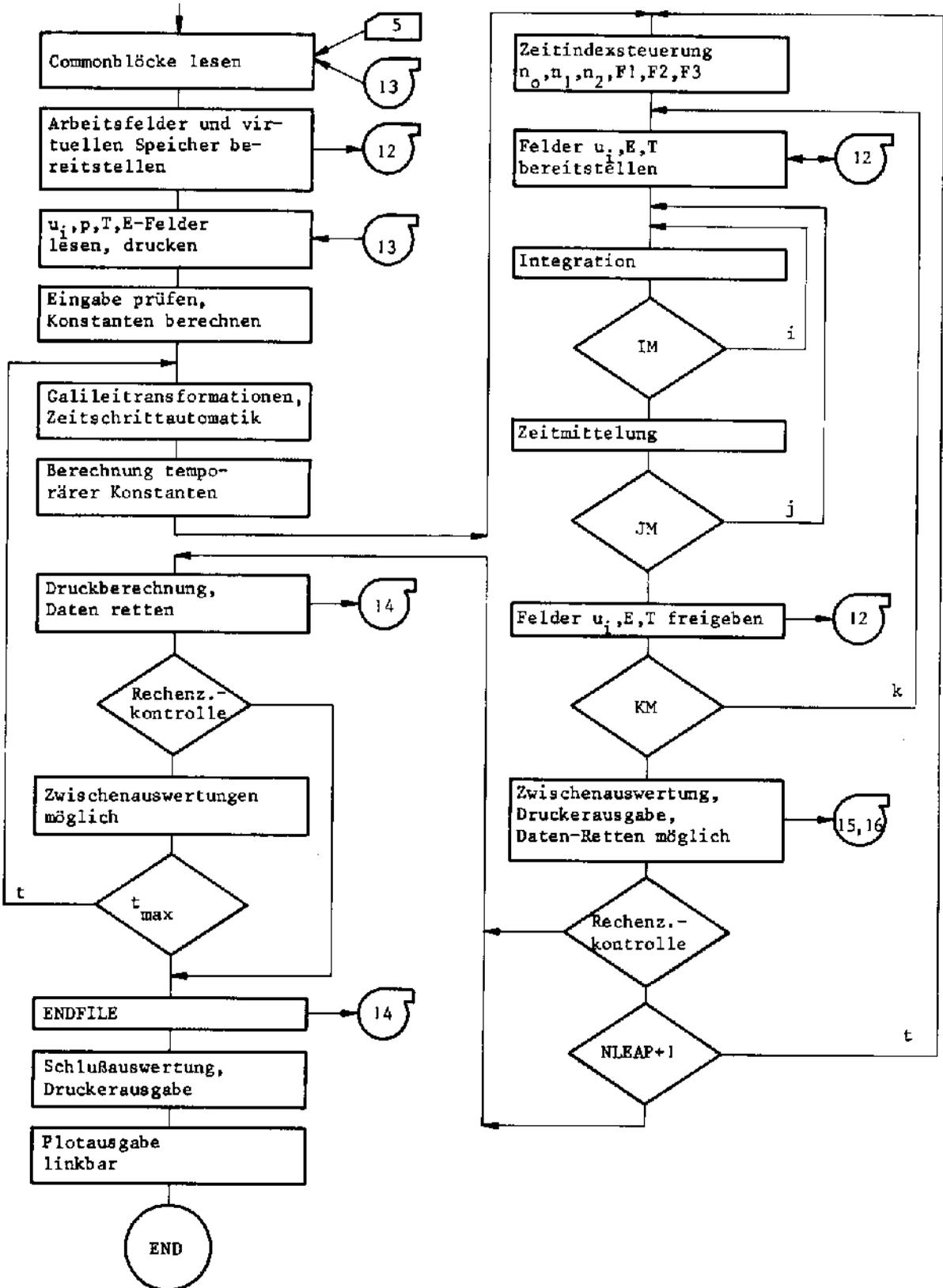


Abb. 12: Ablauf eines TURBIT-2-Integrationslaufes

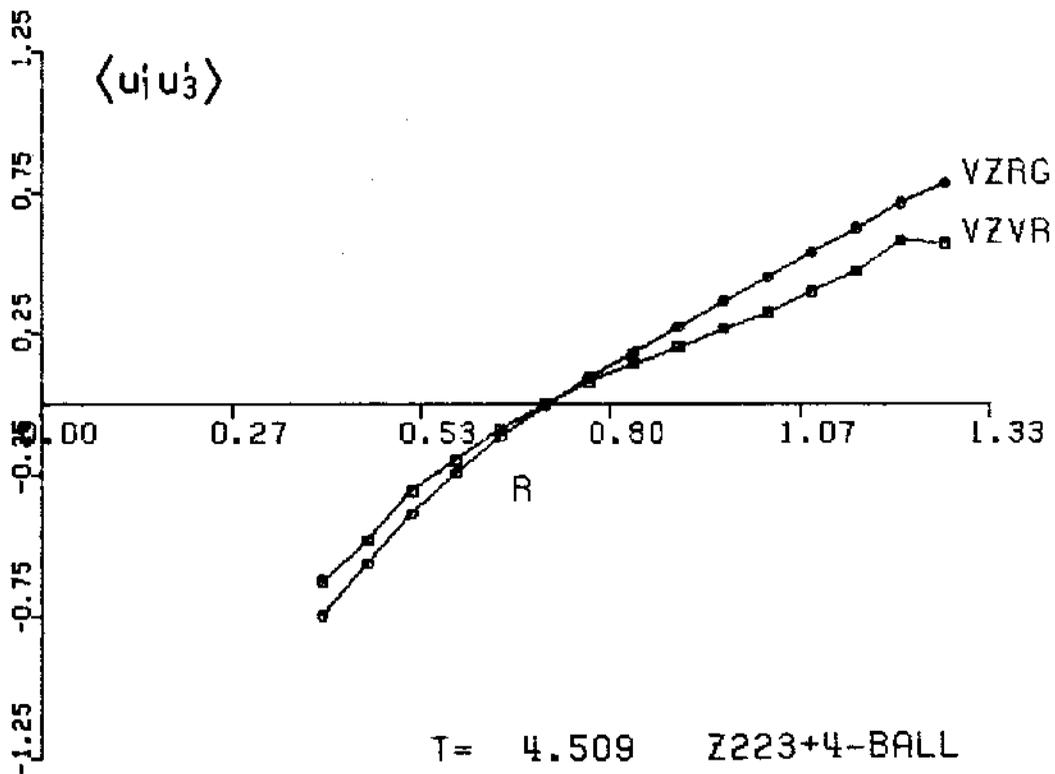
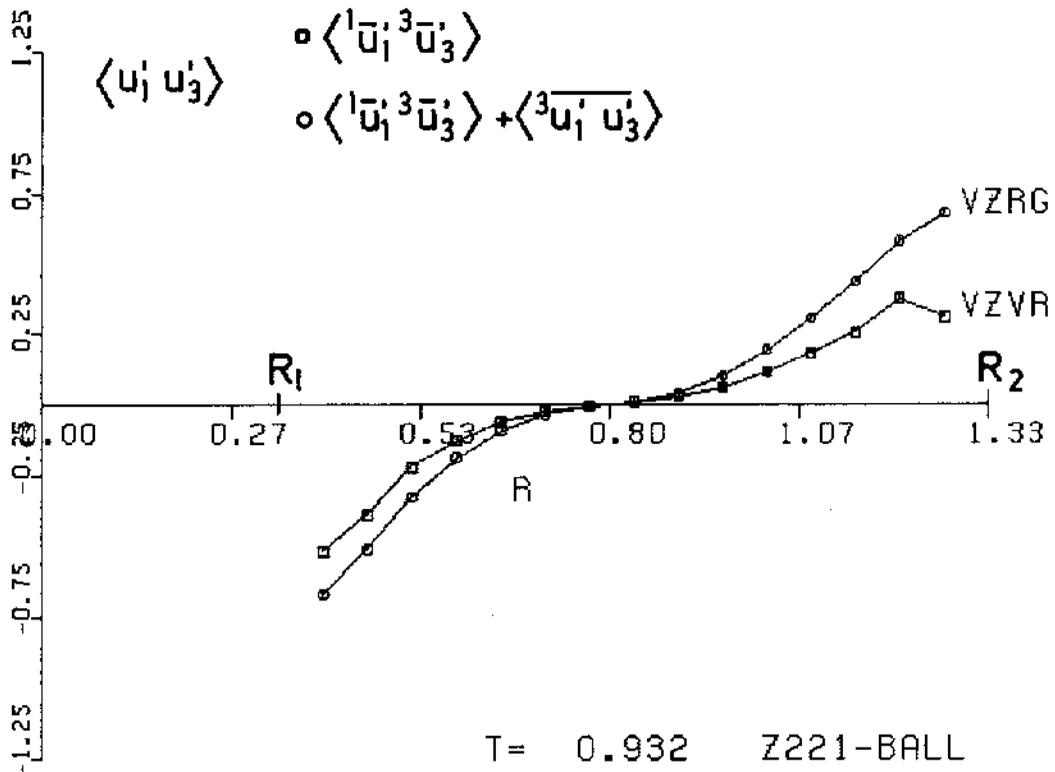


Abb. 13: Die turbulente Schubspannung als Einlaufkriterium, gemittelt von $t = 0-0.932$ und von $t = 2.887-4.509$

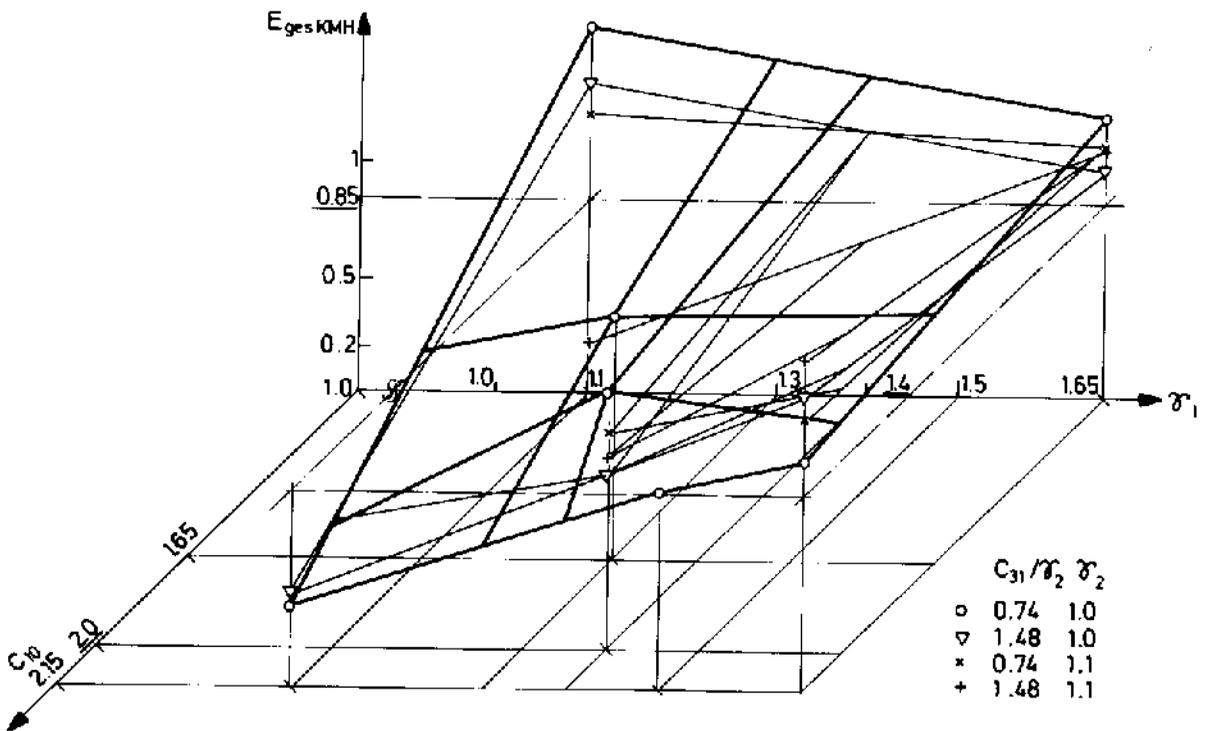
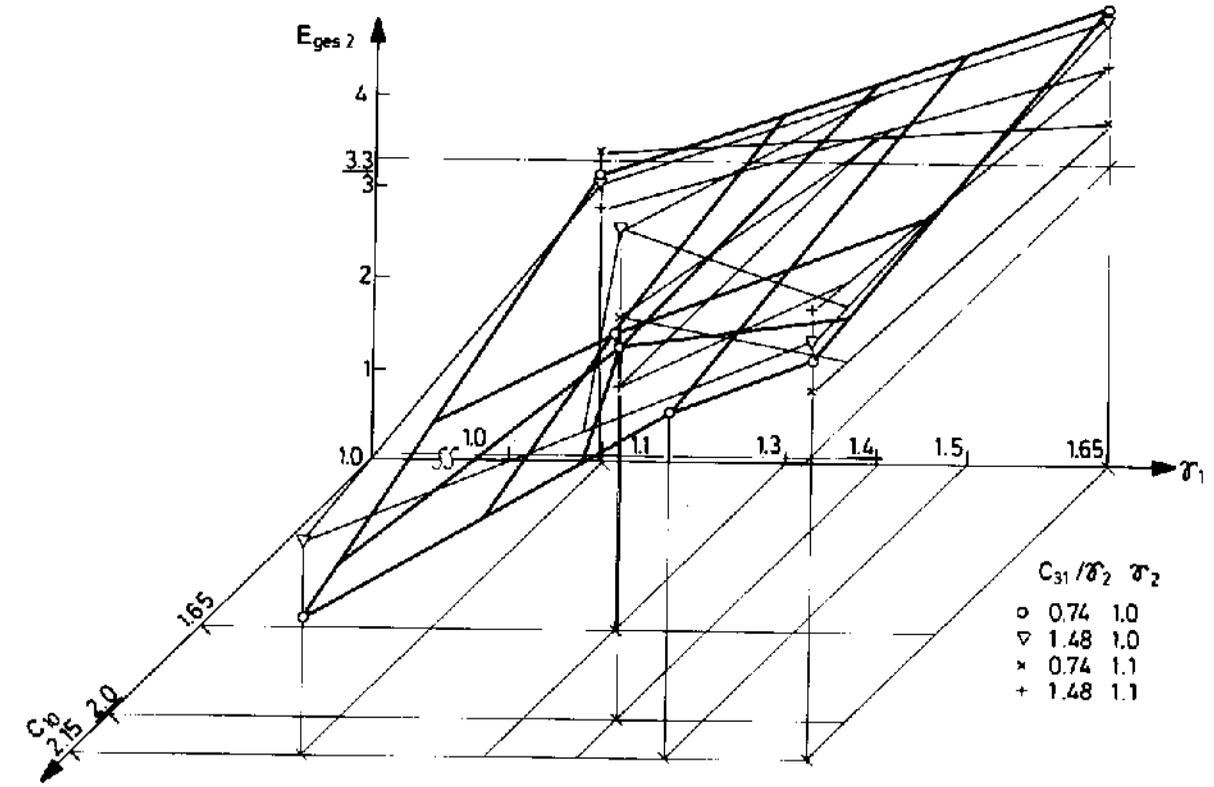


Abb. 14: Einfluß der Modellparameter auf die Energie in Wandnähe ($K=2$) und in Kanalmitte ($K=KM/2=KM/2$). Strichpunktierte Linien repräsentieren experimentelle Ergebnisse.

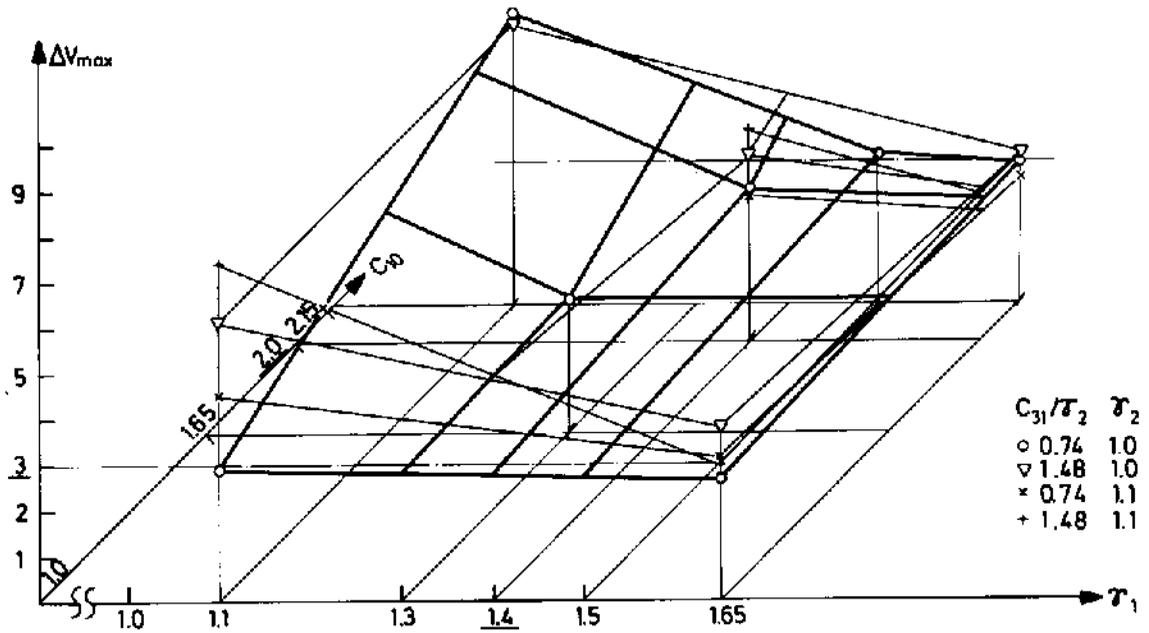


Abb. 15: Einfluß der Modellparameter auf das Geschwindigkeitsprofil. Strichpunktierte Linien repräsentieren experimentelle Ergebnisse.

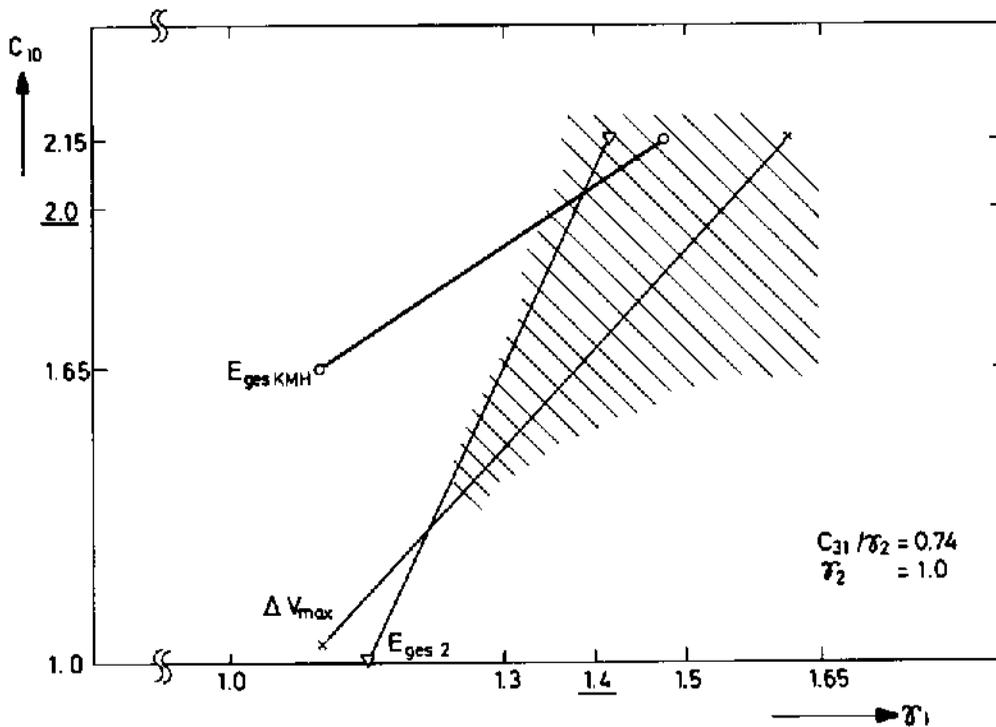


Abb. 16: Schnittlinien der numerischen und experimentellen Ergebnisse der Empfindlichkeitsstudie, zusammengefaßt in der γ_1 - C_{10} -Ebene. Die Schraffur kennzeichnet das ΔV_{\max} -Plateau von Abb. 15.

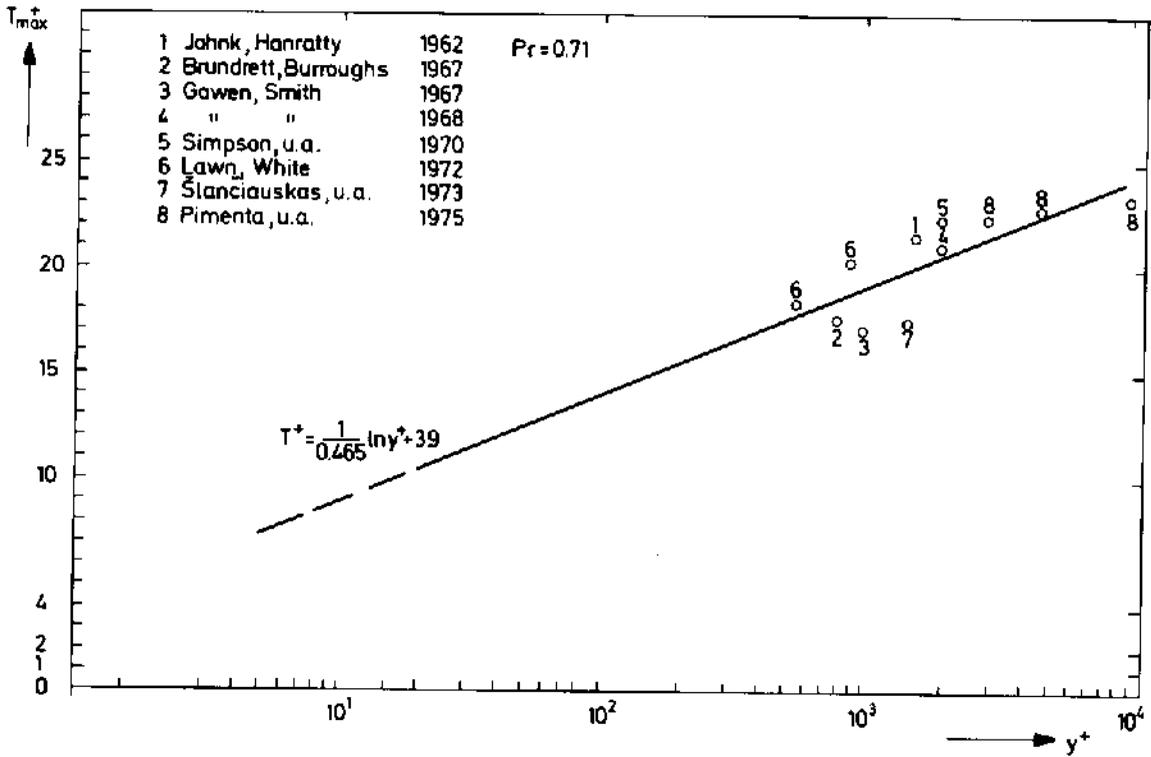


Abb. 17: Literaturübersicht zum Wert des Temperaturmaximums bei Luft

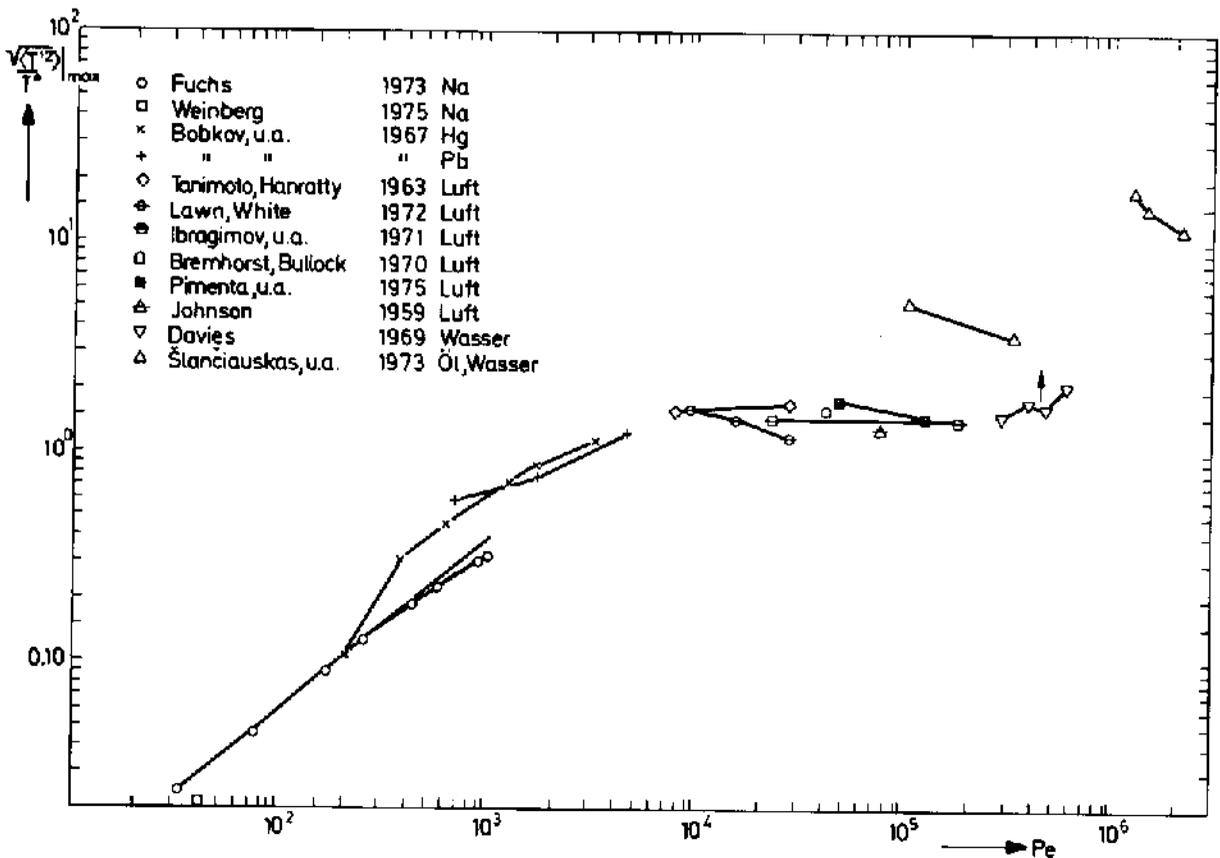


Abb. 18: Literaturübersicht zum Wert des Temperatur-rms-Wertmaximums

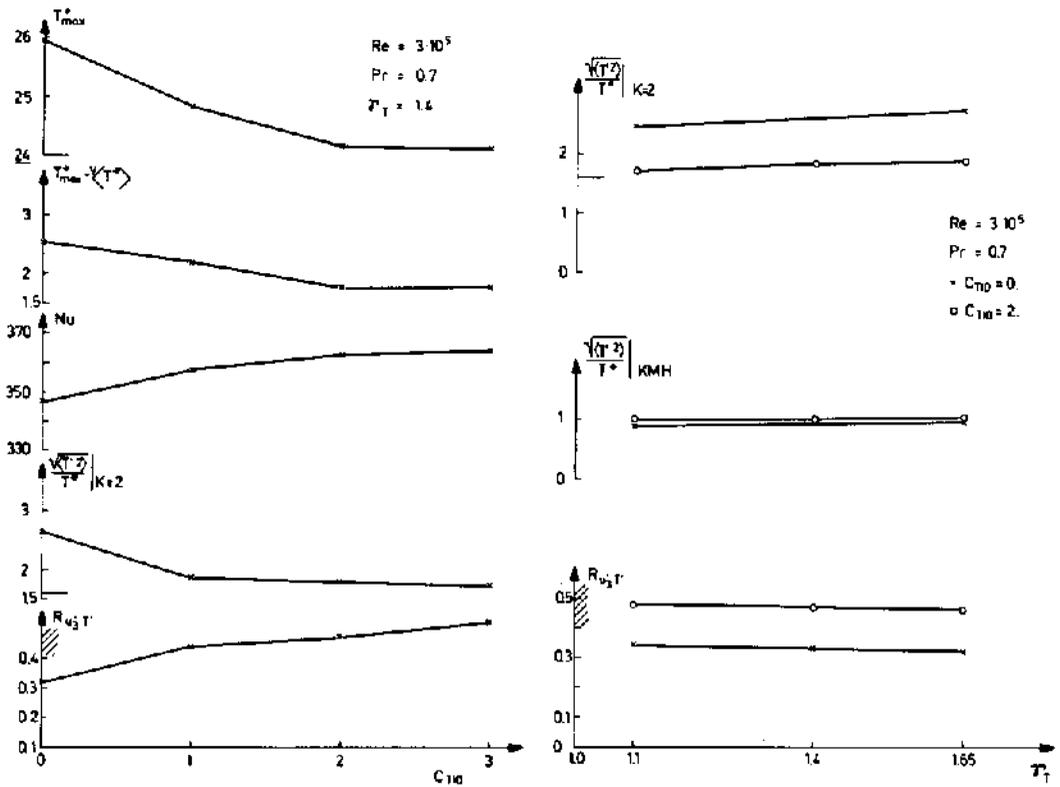


Abb. 19: Einfluß der Modellparameter auf das Temperaturfeld bei $Pr = 0.7$

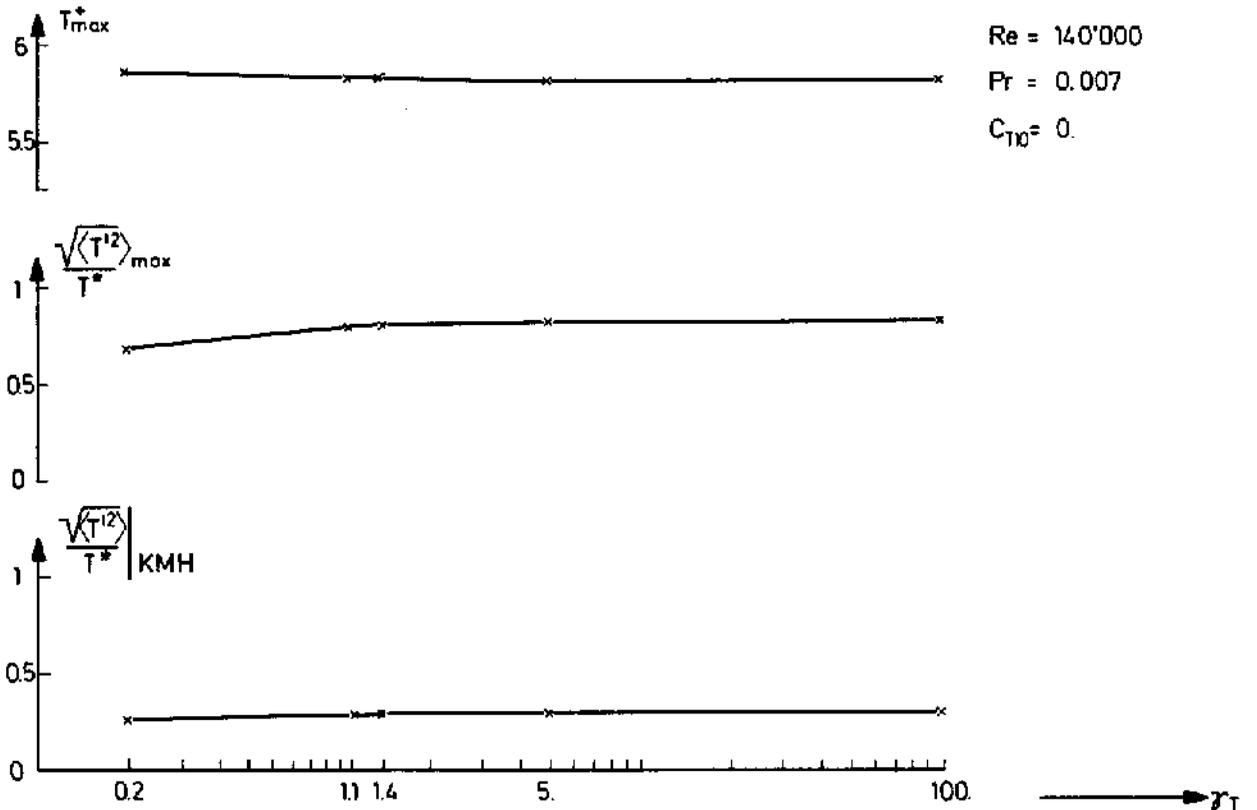


Abb. 20: Einfluß von γ_T auf das Temperaturfeld bei $Pr = 0.007$

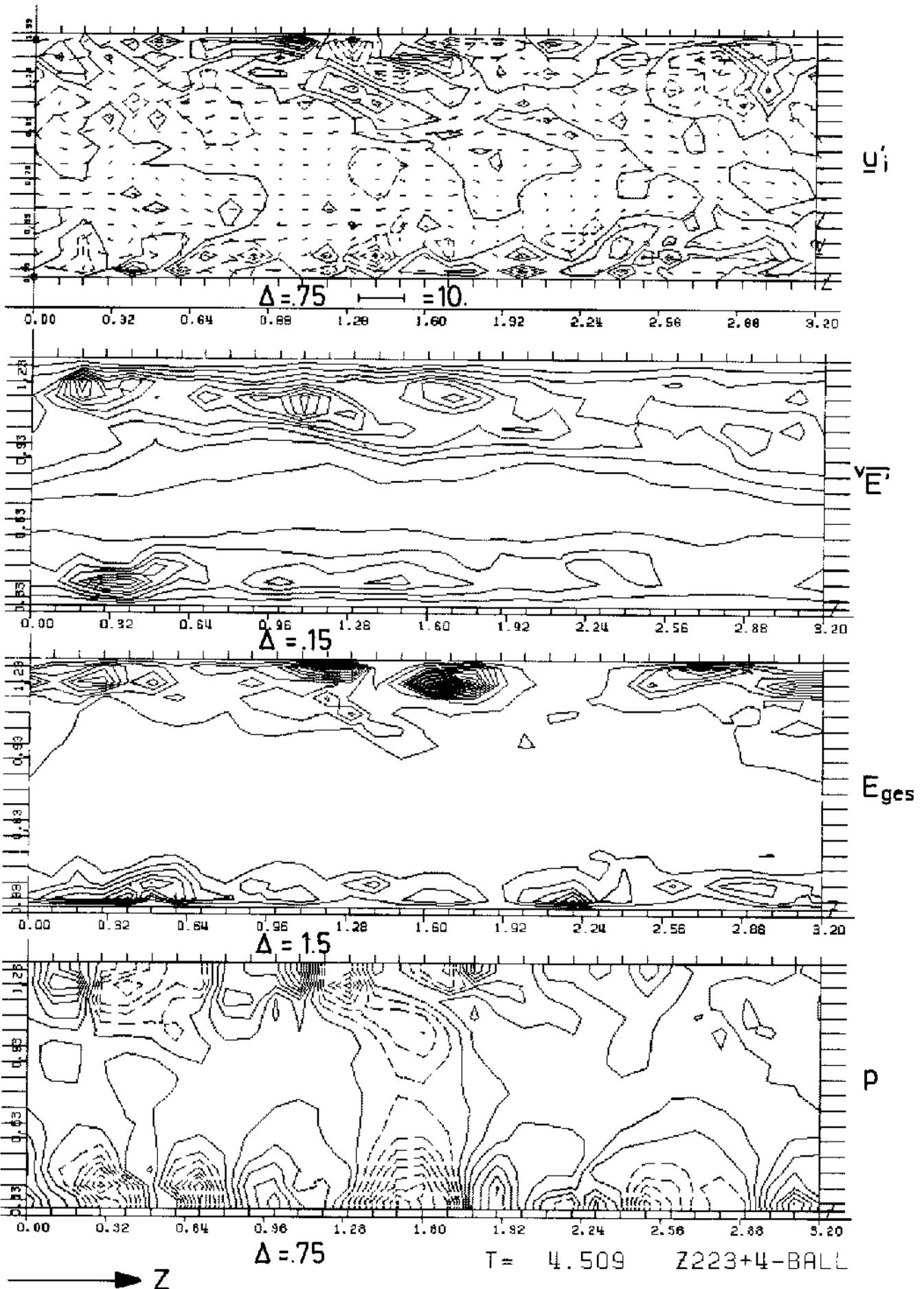
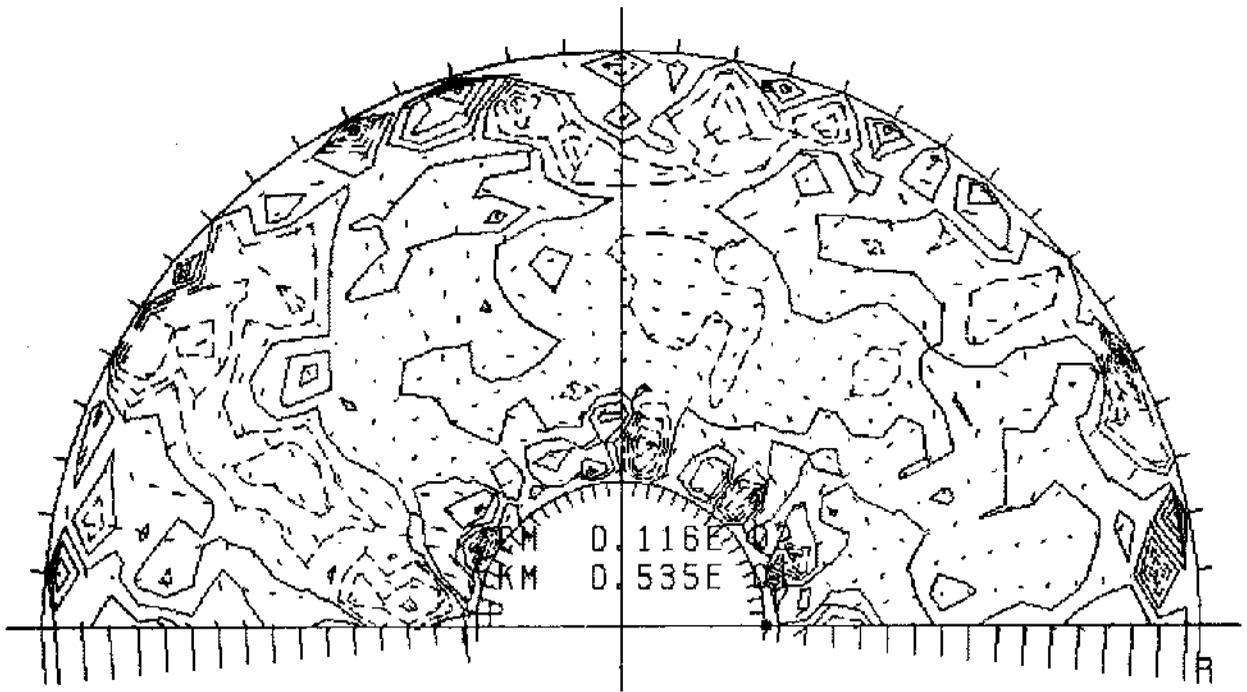
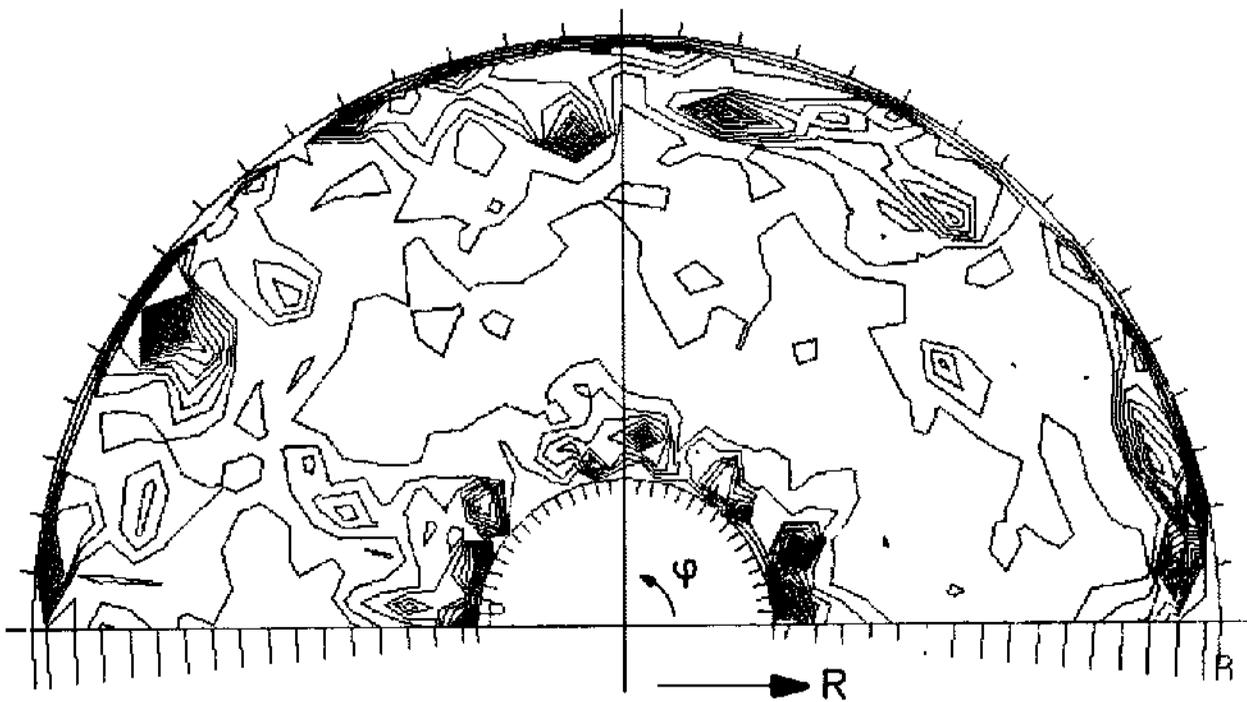


Abb. 21: Momentaufnahmen der Felder u_i'' , v_E'' , E_{ges} , p in derselben Ebene (J=4) des Ringspaltes Z2.2-Ball. Δ =Höhenlinieninkrement

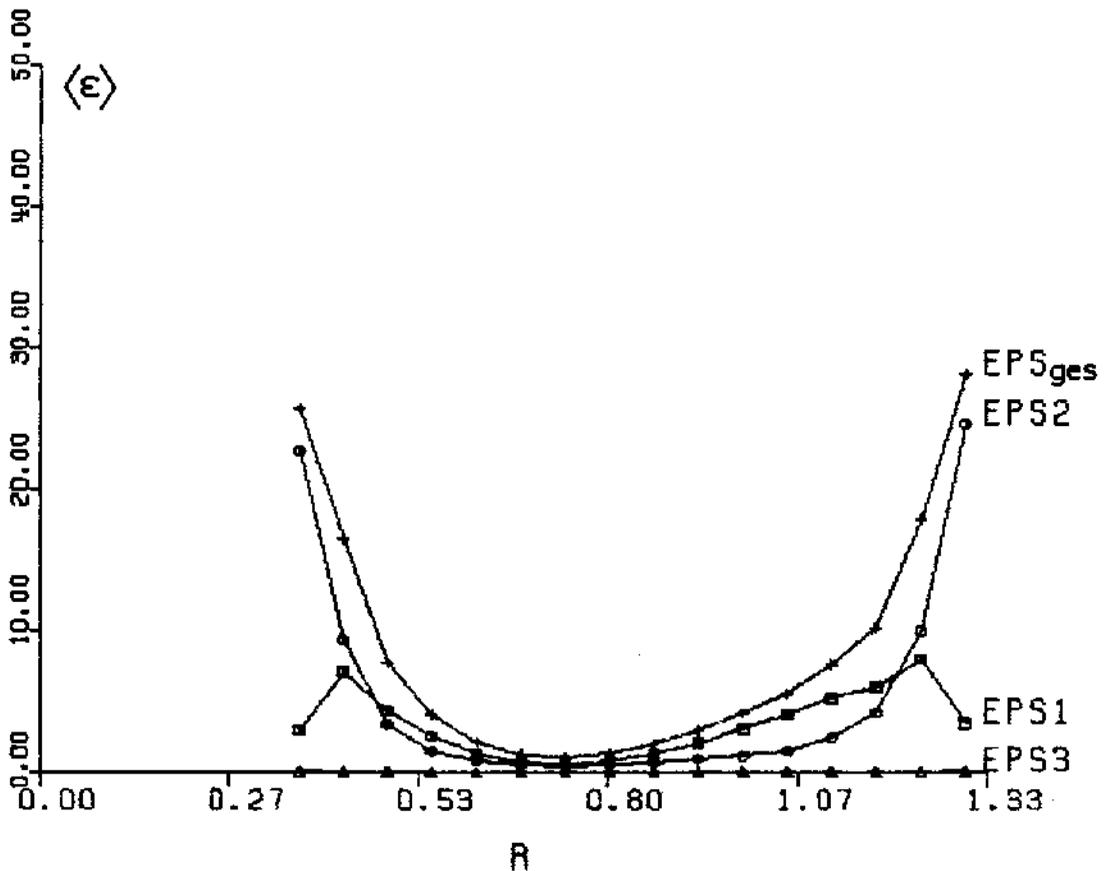
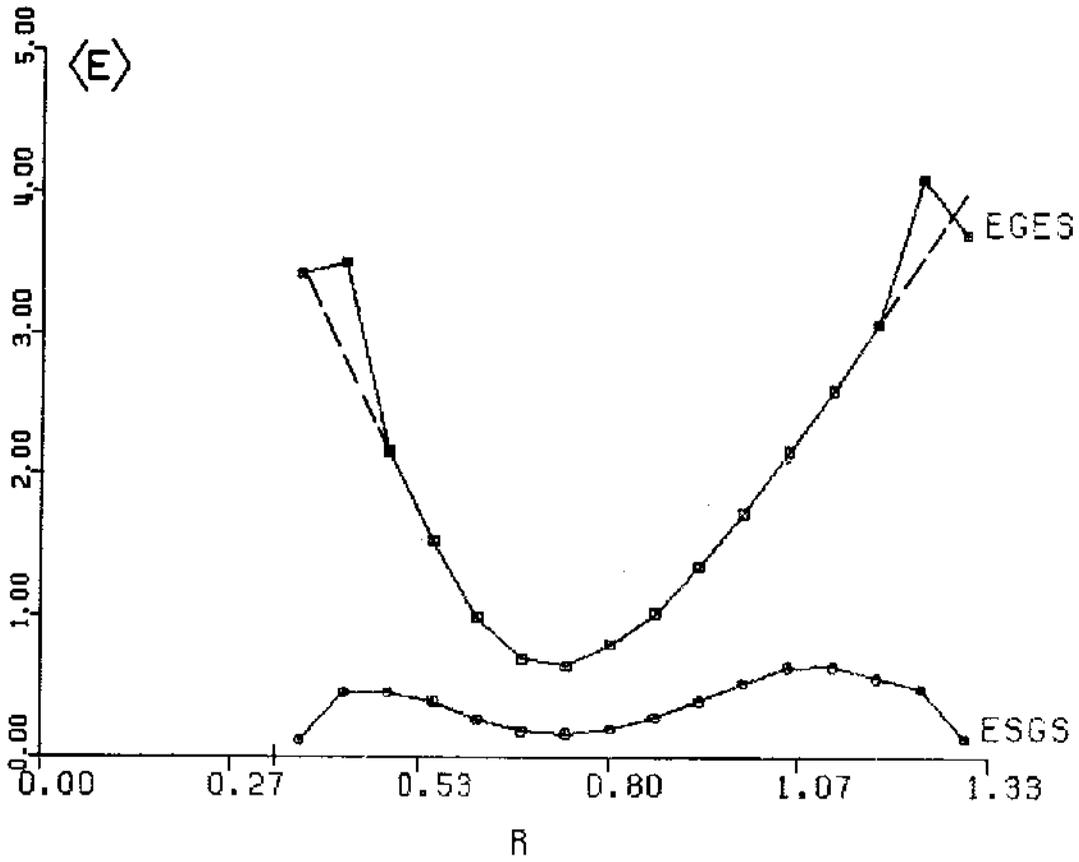


R-P-EBENE, I= 4 VZ', VP', VR' T= 4.509 $\Delta=1$ Z223+4-BALL



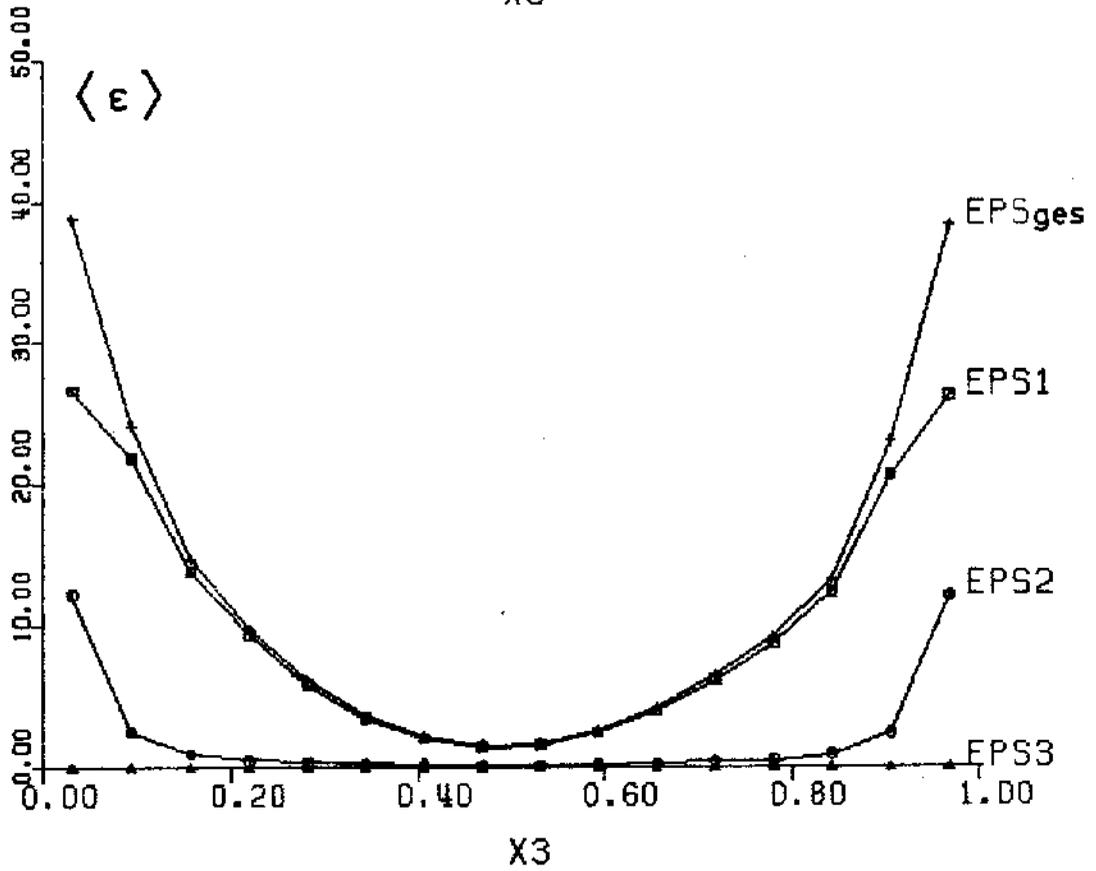
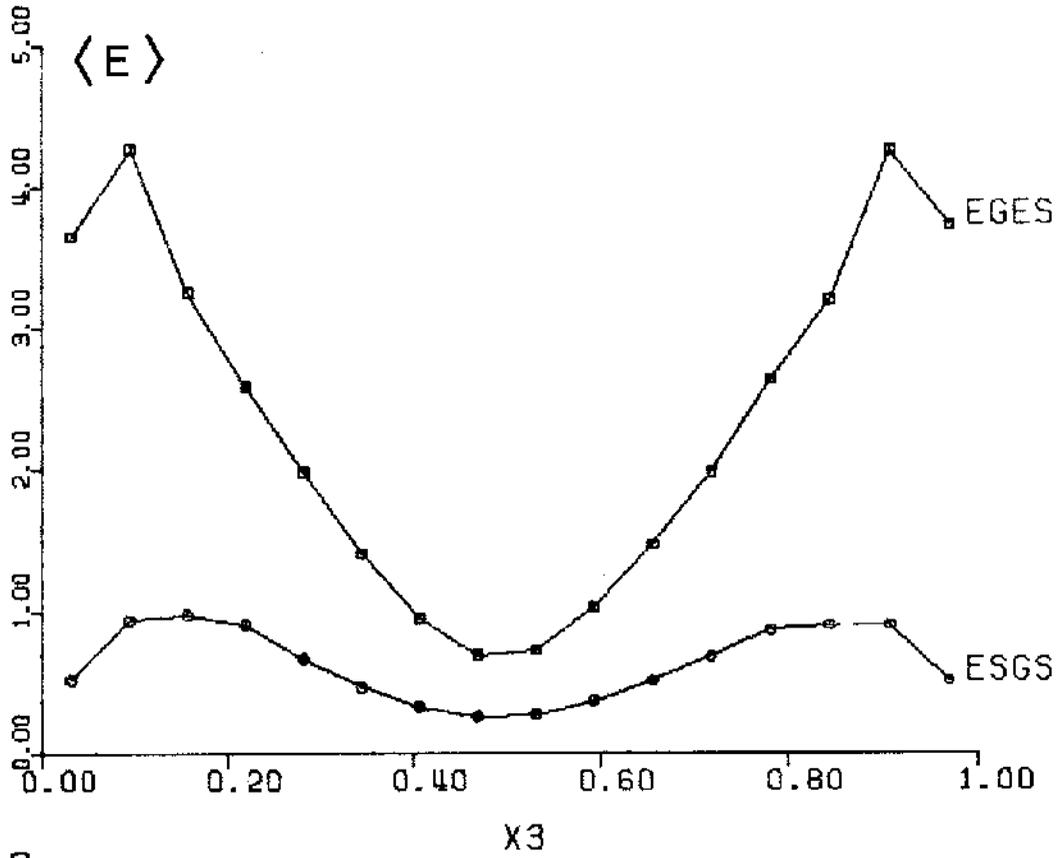
R-P-EBENE, I= 4 EGES T= 4.509 $\Delta=1$ Z223+4-BALL

Abb. 22: Momentanaufnahmen der Felder i_{u_i}' , E_{ges} in derselben Ebene des Ringspaltes Z2.2-Ball



T = 4.509 Z223+4-BALL

Abb. 23: Energie und Dissipation im Z2.2-Ball-Ringspalt, $Re = 25\ 000$



T= 8.206 K315+16

Abb. 24: Energie und Dissipation im K3-Plattenkanal, $Re = 250\ 000$

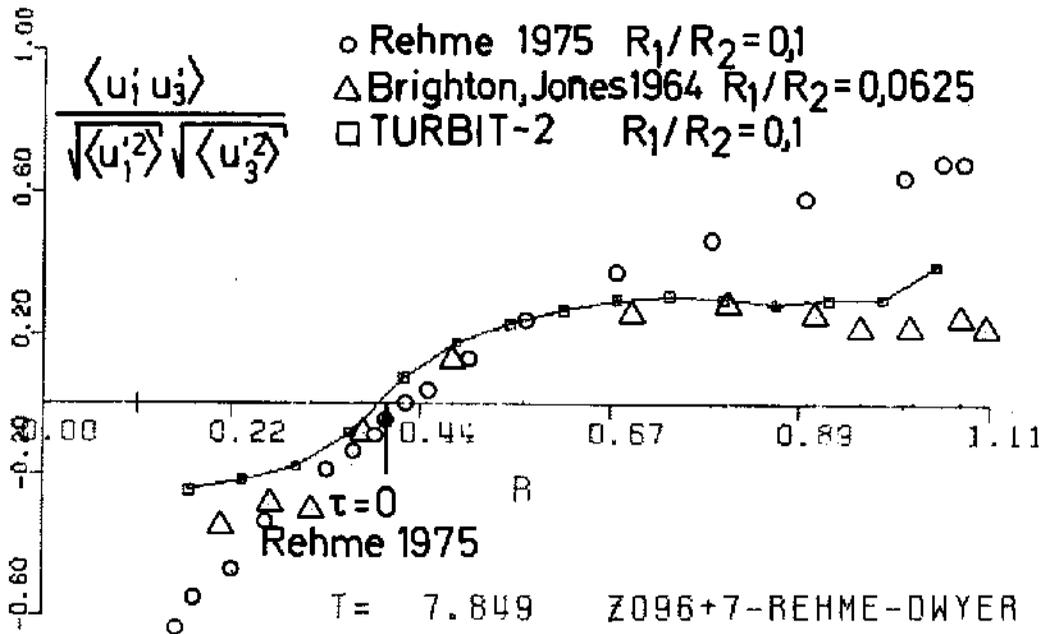
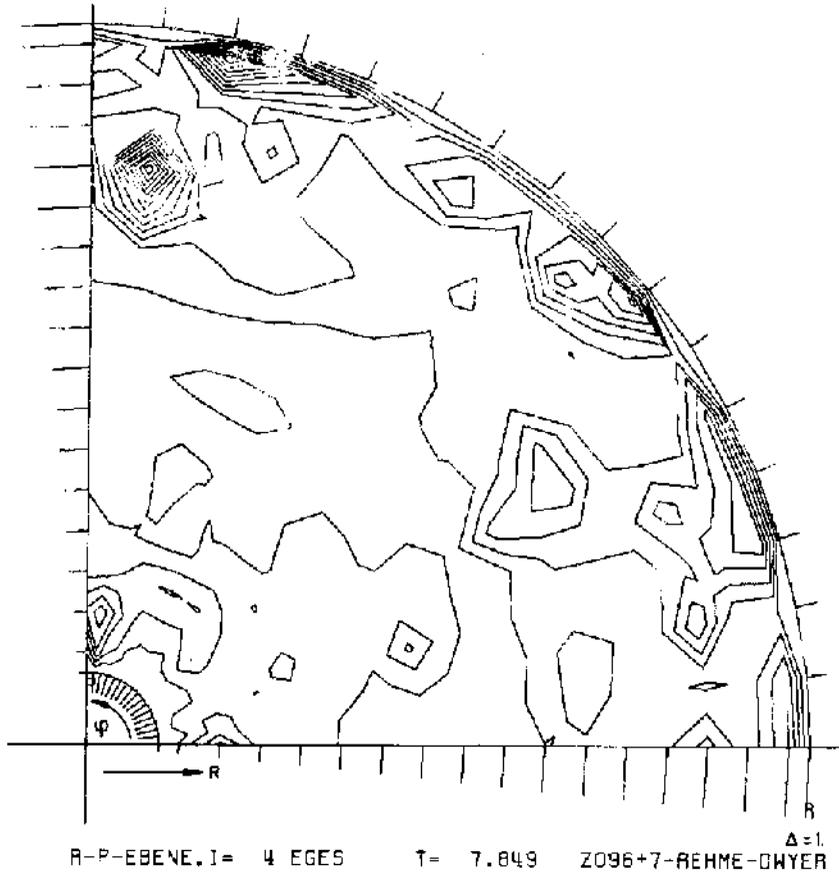


Abb. 25: Energie und Schubspannungskorrelationskoeffizient im Z9-Rehme-Ringspalt

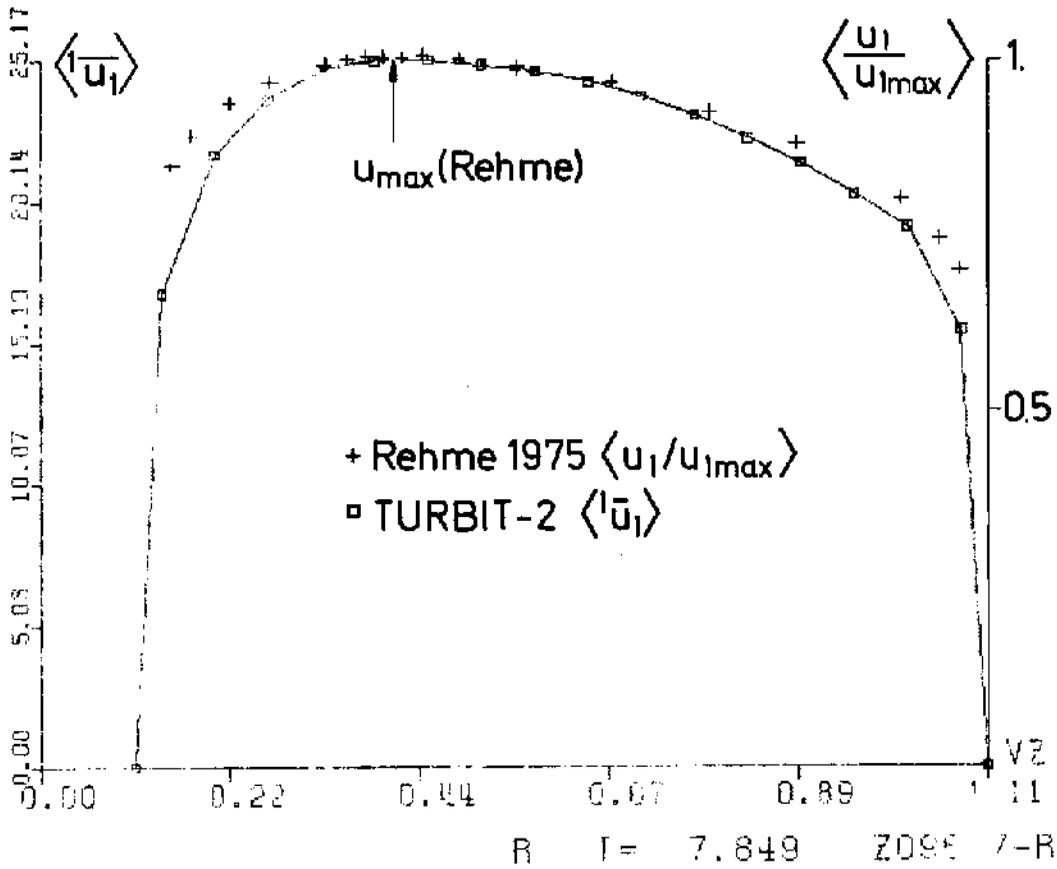


Abb. 26: Geschwindigkeitsprofil des 29-Rehme-Ringspaltes,
 $R_1/R_2 = 0.1, Re = 70\ 000$

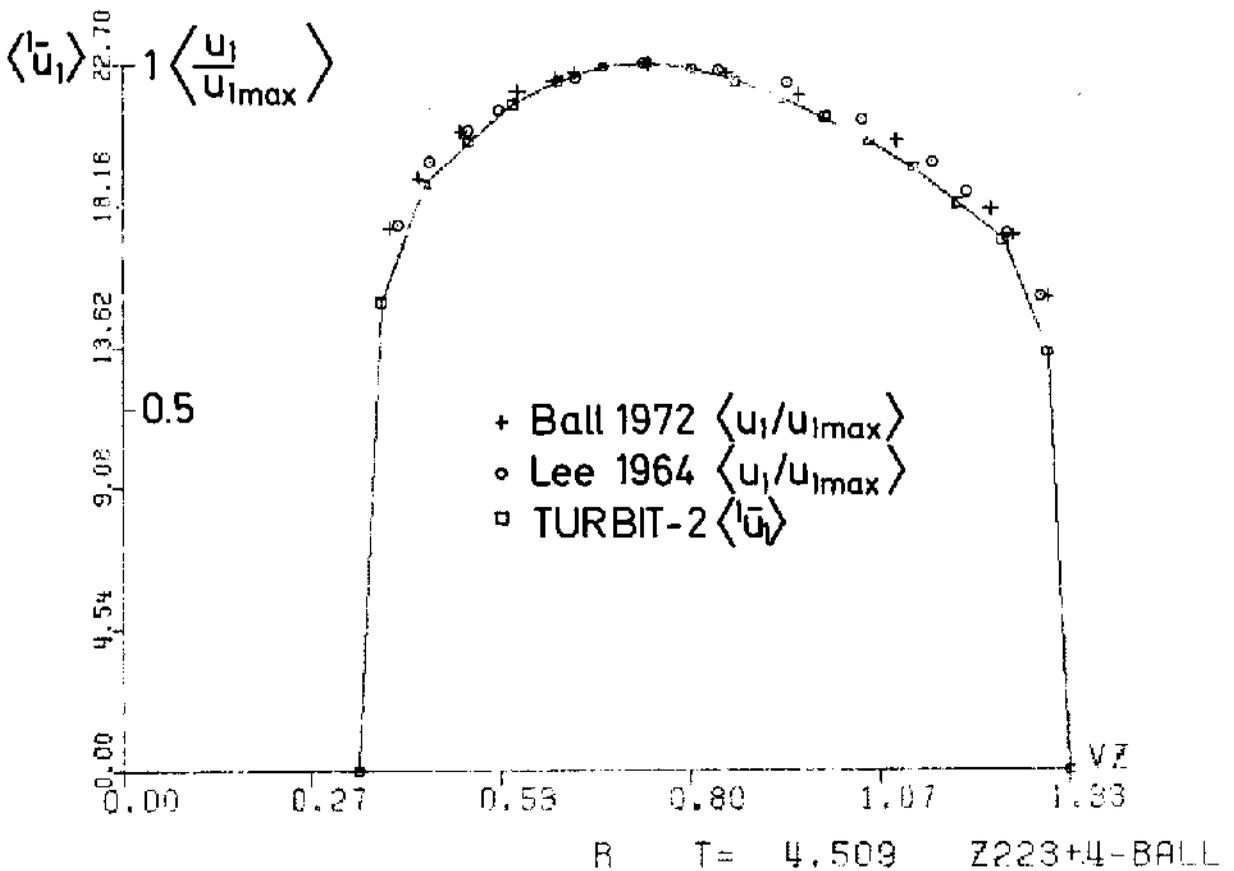
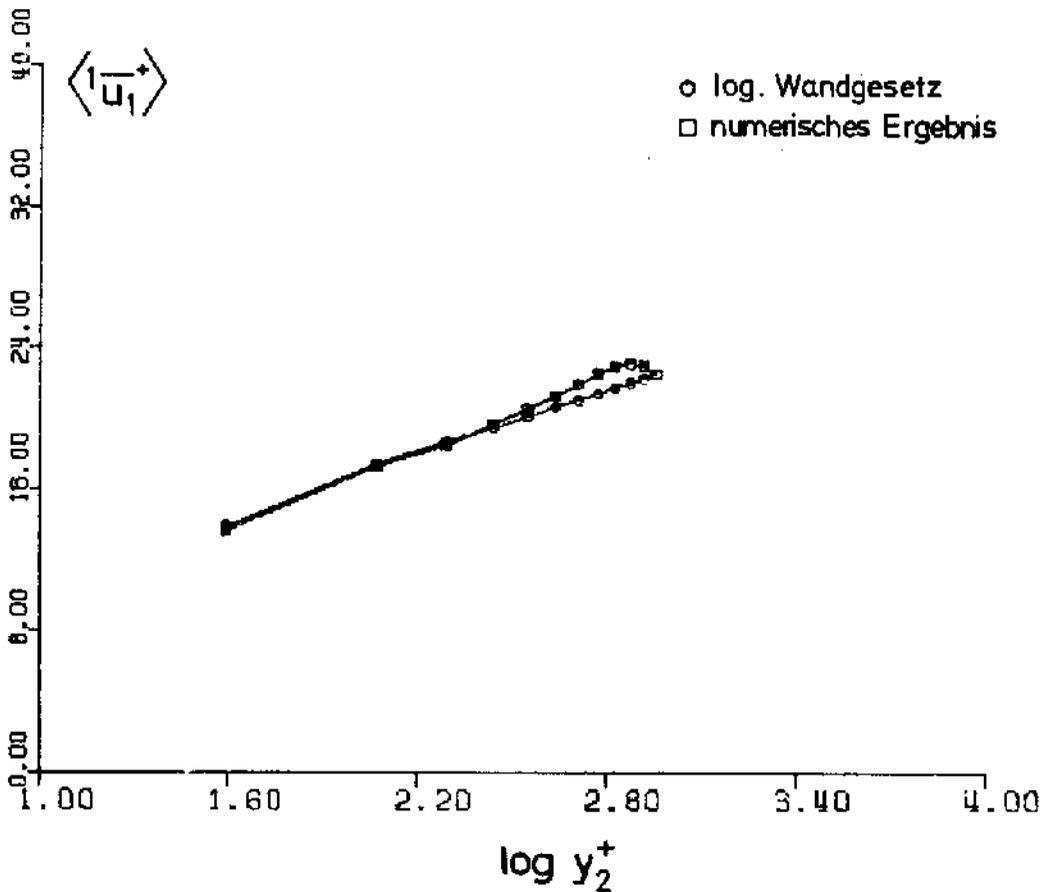
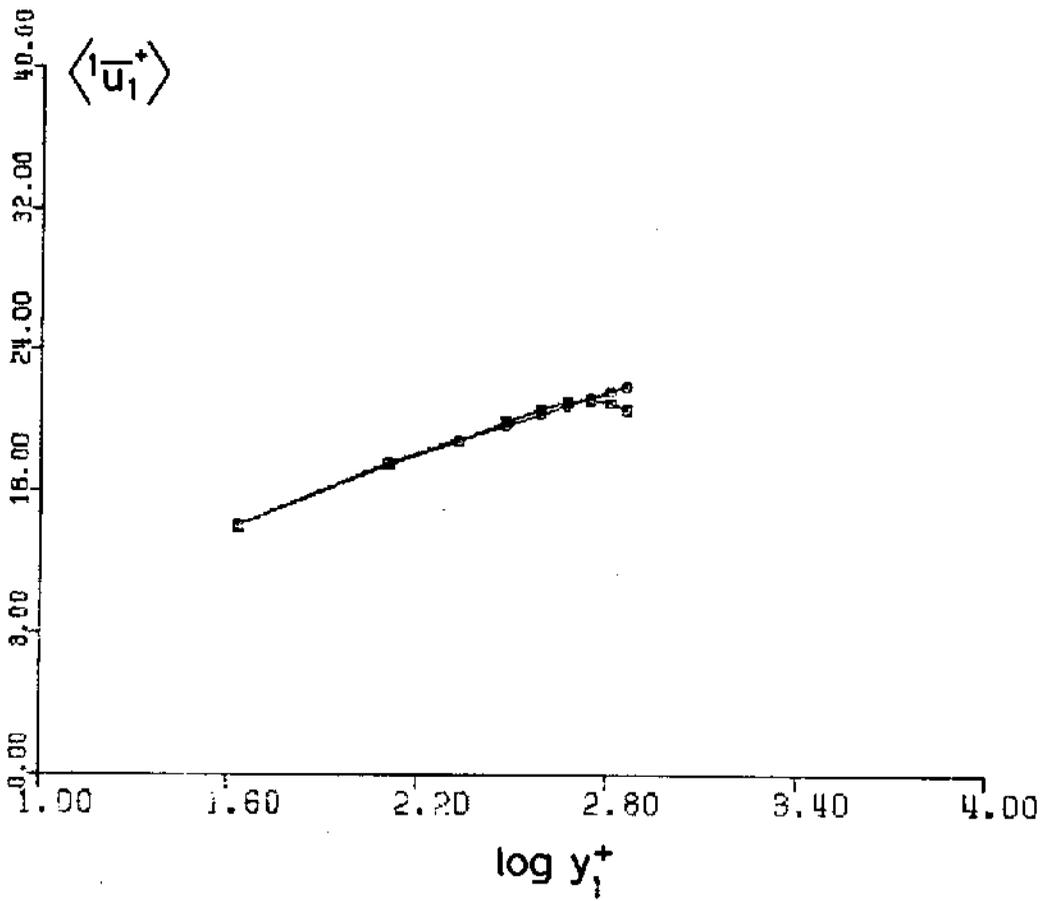


Abb. 27: Geschwindigkeitsprofil des Z2.2-Ball-Ringspaltes,
 $R_1/R_2 = 0.25, Re = 25\ 000$



$T = 4.509$ Z223+4-BALL

Abb. 28: Logarithmische Auftragung des Geschwindigkeitsprofils des Z2.2-Ball-Ringspaltes bei R_1 und R_2

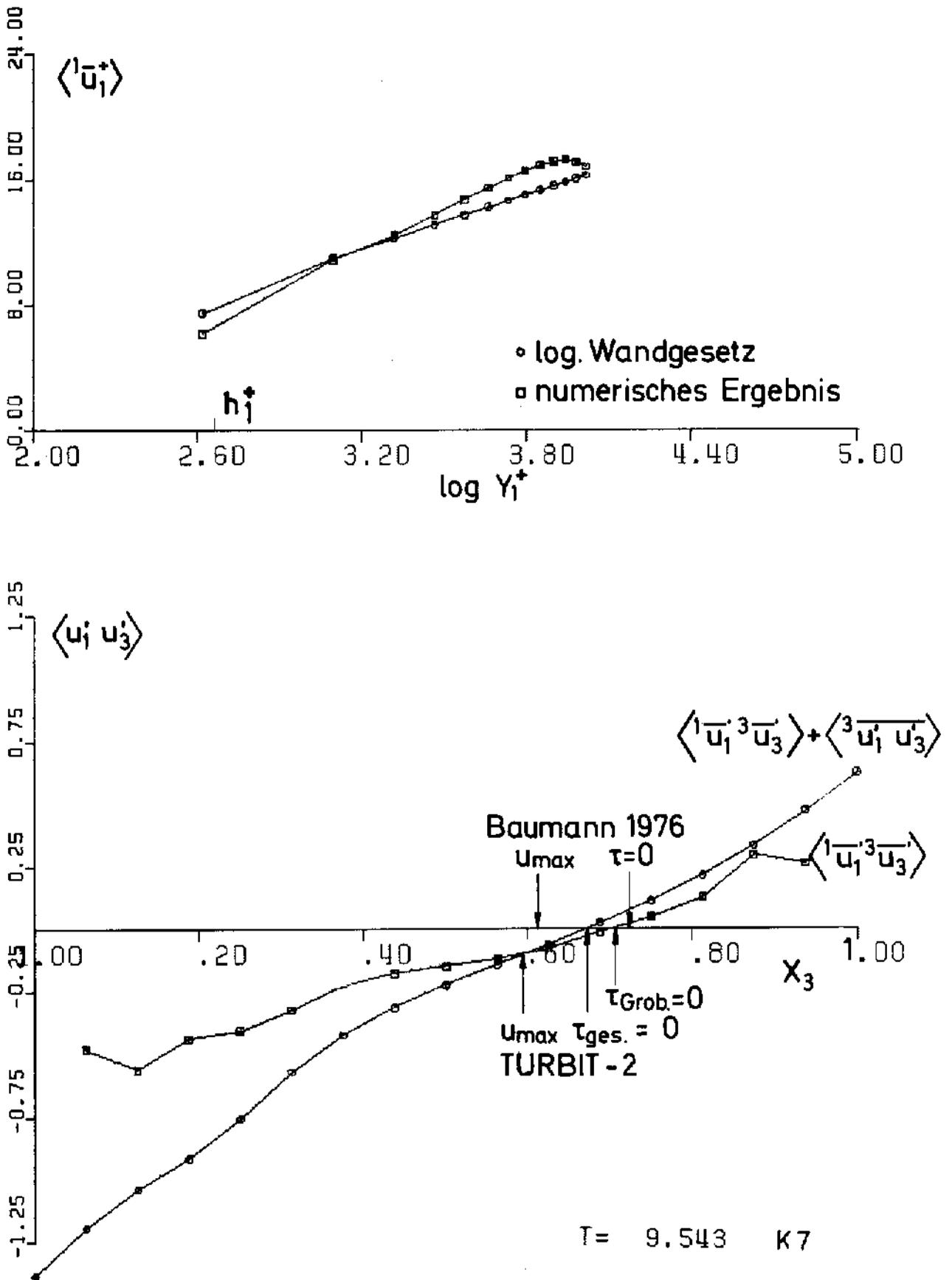
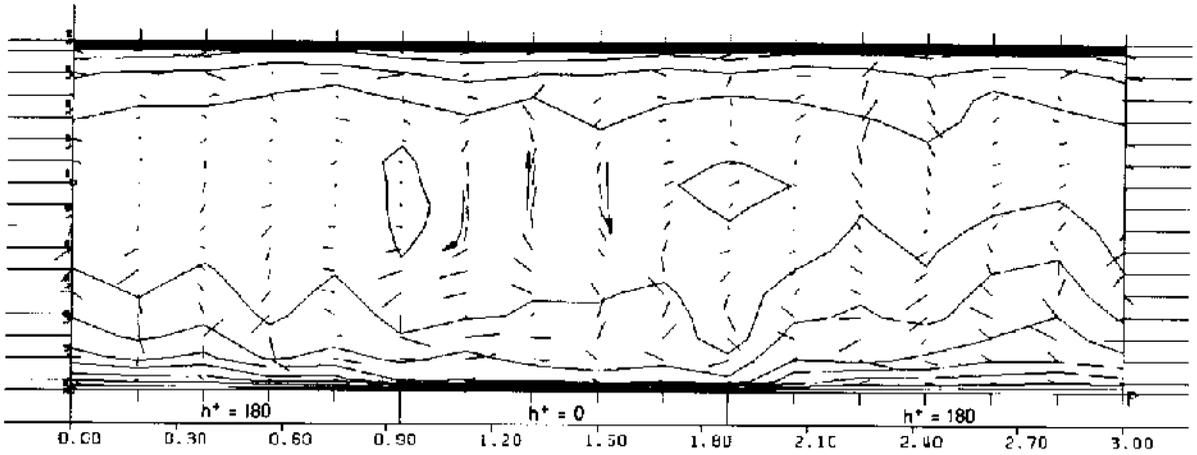
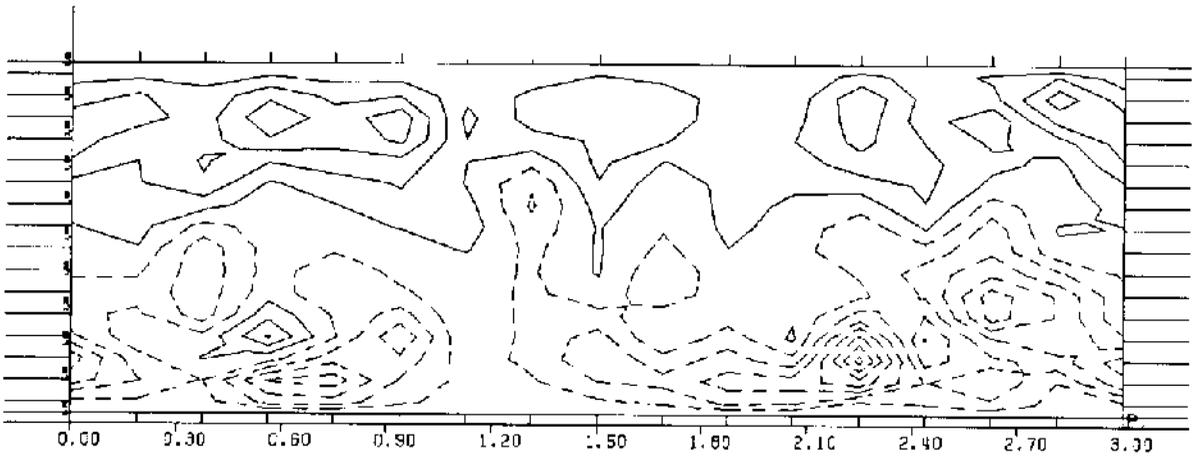


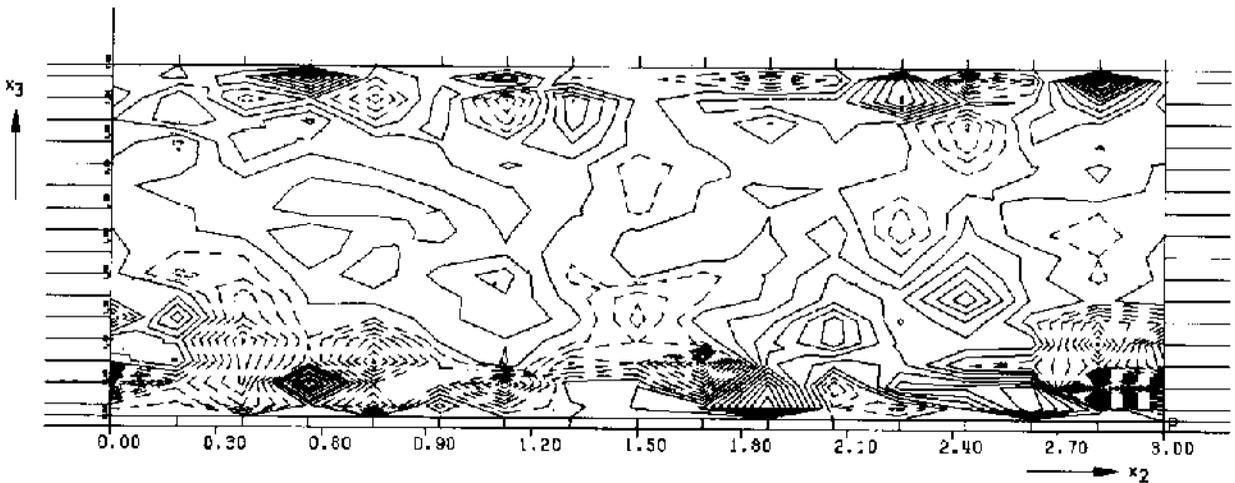
Abb. 29: Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilung in dem einseitig rauhen K7-Baumann-Plattenkanal, $h_1^+ = 465$, $h_2^+ = 0$, $Re = 190\ 000$



R-P-EBENE, I= 1 $\langle U_1, U_2, U_3 \rangle$ T= 2.423 HINZE PR5, $\Delta = 3$ $\Delta x = 0.726$

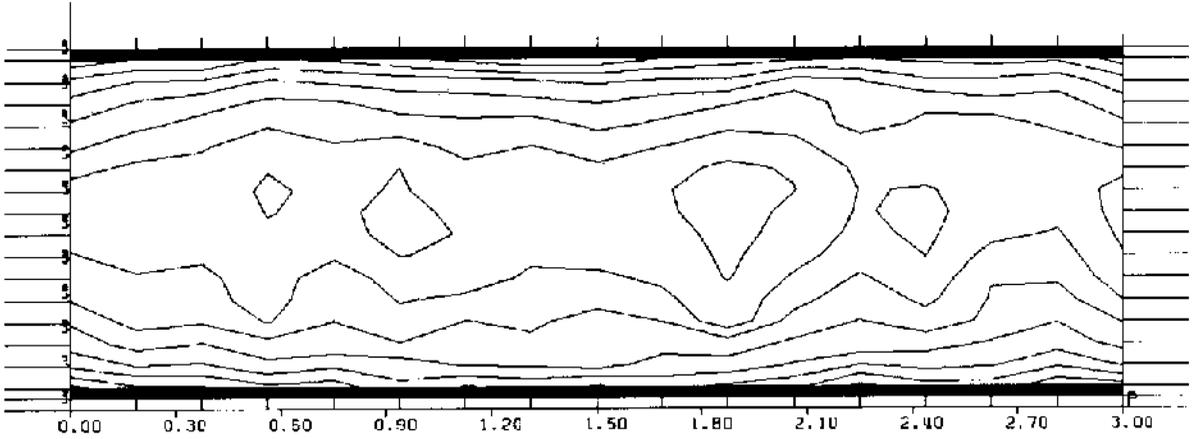


R-P-EBENE, I= 1 $\langle VZ \times VR \rangle$ T= 2.423 HINZE PR5, $\Delta = .2$

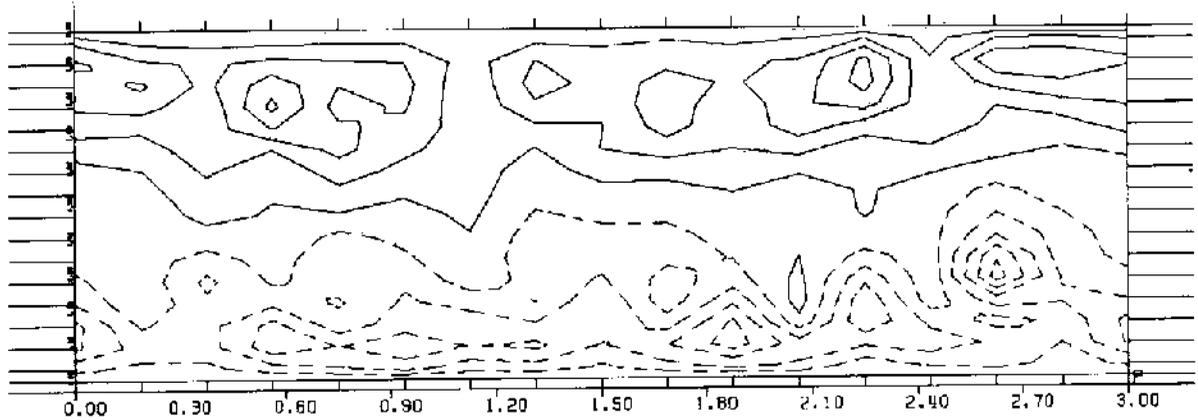


R-P-EBENE, I= 1 $\langle VZ \times VP \rangle$ T= 2.423 HINZE PR5, $\Delta = .15$

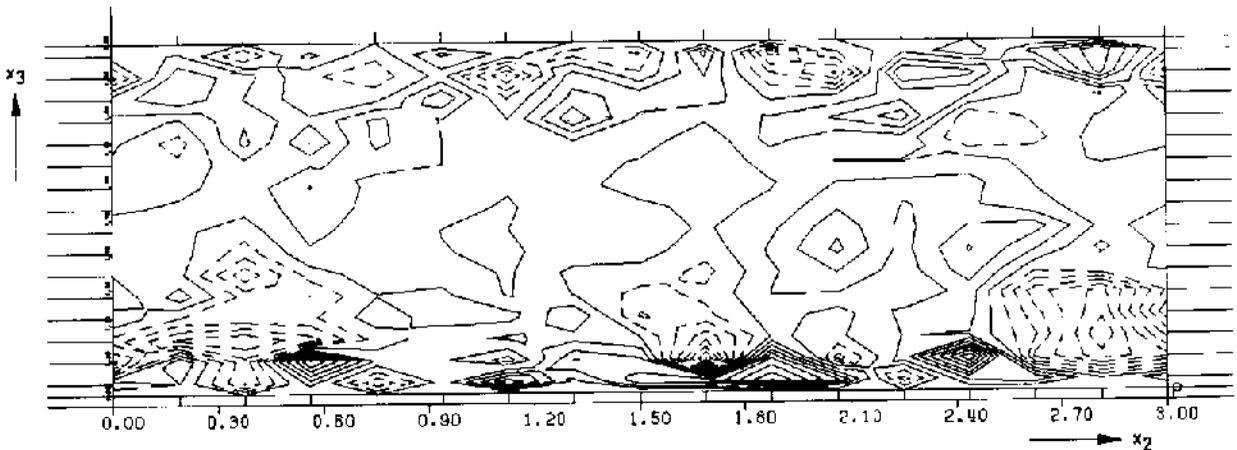
Abb. 30: Auswirkungen der Sekundärströmung auf Geschwindigkeits- und Schubspannungsfelder. (Die Felder sind an jedem Ort in x_1 -Richtung über alle IM-Maschen gemittelt.)



R-P-EBENE, I= 1 <TP> T= 2.423 HINZE PR5, <T_w> = 0, <T_{max}> = 22, Δ=1

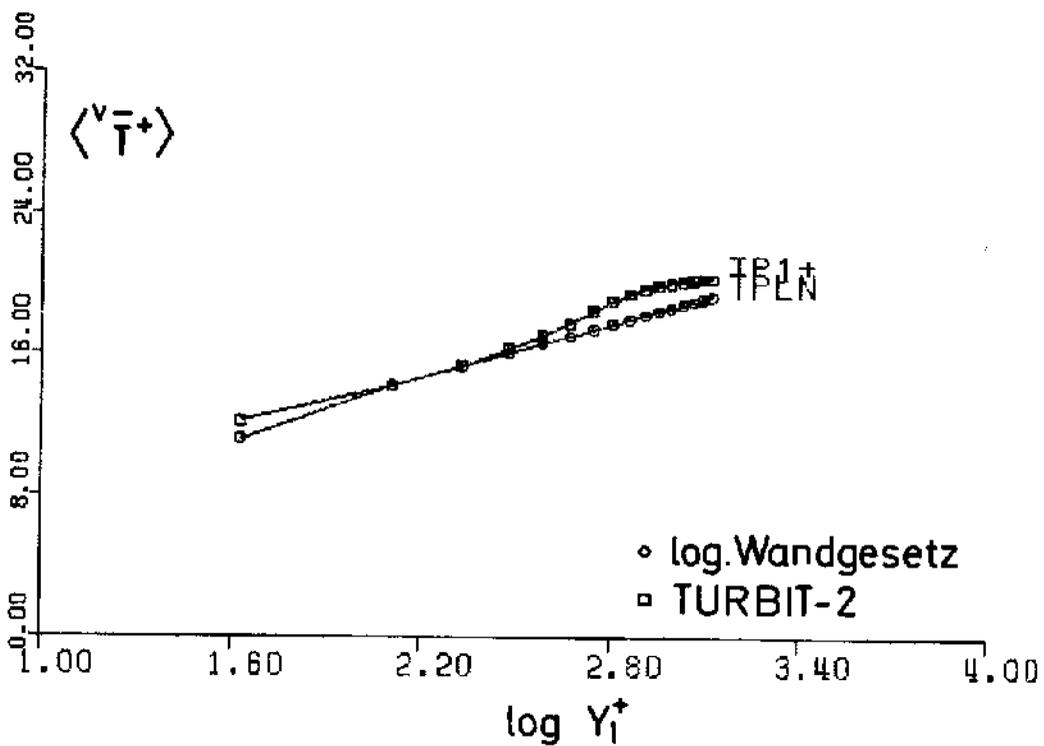
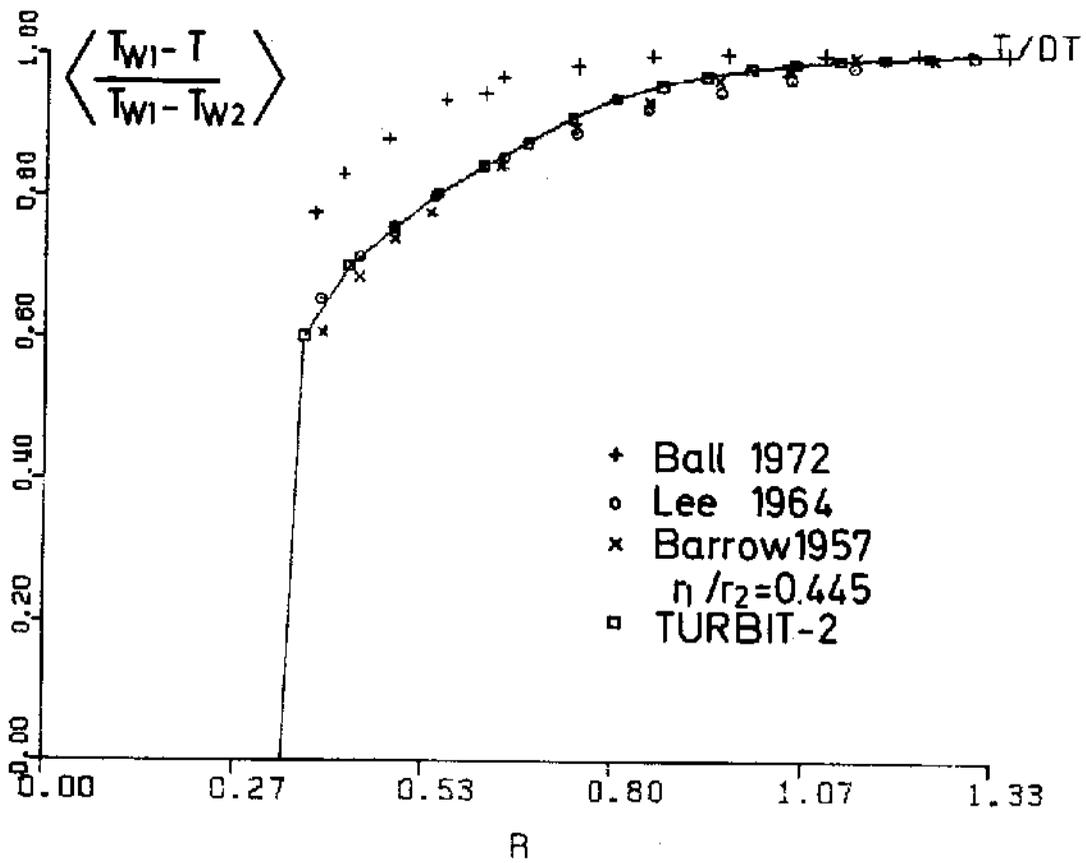


R-P-EBENE, I= 1 <TP*VP> T= 2.423 HINZE PR5, Δ=2



R-P-EBENE, I= 1 <IP*VP> T= 2.423 HINZE PR5, Δ=.15

Abb. 31: Auswirkungen der Sekundärströmung auf Temperatur und Wärmestromfelder. (Die Felder sind an jedem Ort in x_1 -Richtung über alle IM-Maschen gemittelt.)



T = 4.509 Z223+4-BALL

Abb. 32: Temperaturprofil des Z2.2-Ball-Ringspaltes,
 $R_1/R_2 = 0.25$, $Re = 25\ 000$, $Pr = 0.7$

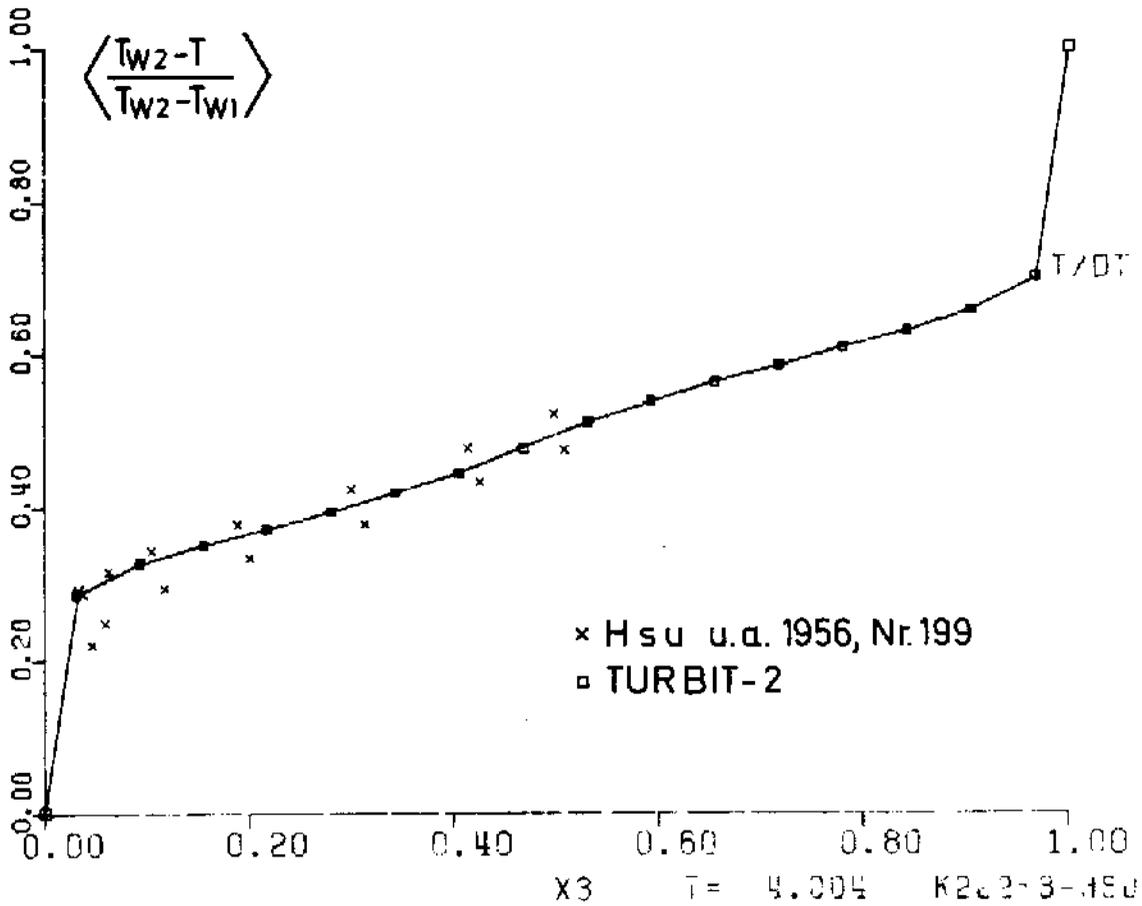


Abb. 33: Temperaturprofil des K2.2-Hsu-Plattenkanals, $Re = 25\ 000$, $Pr = 0.71$

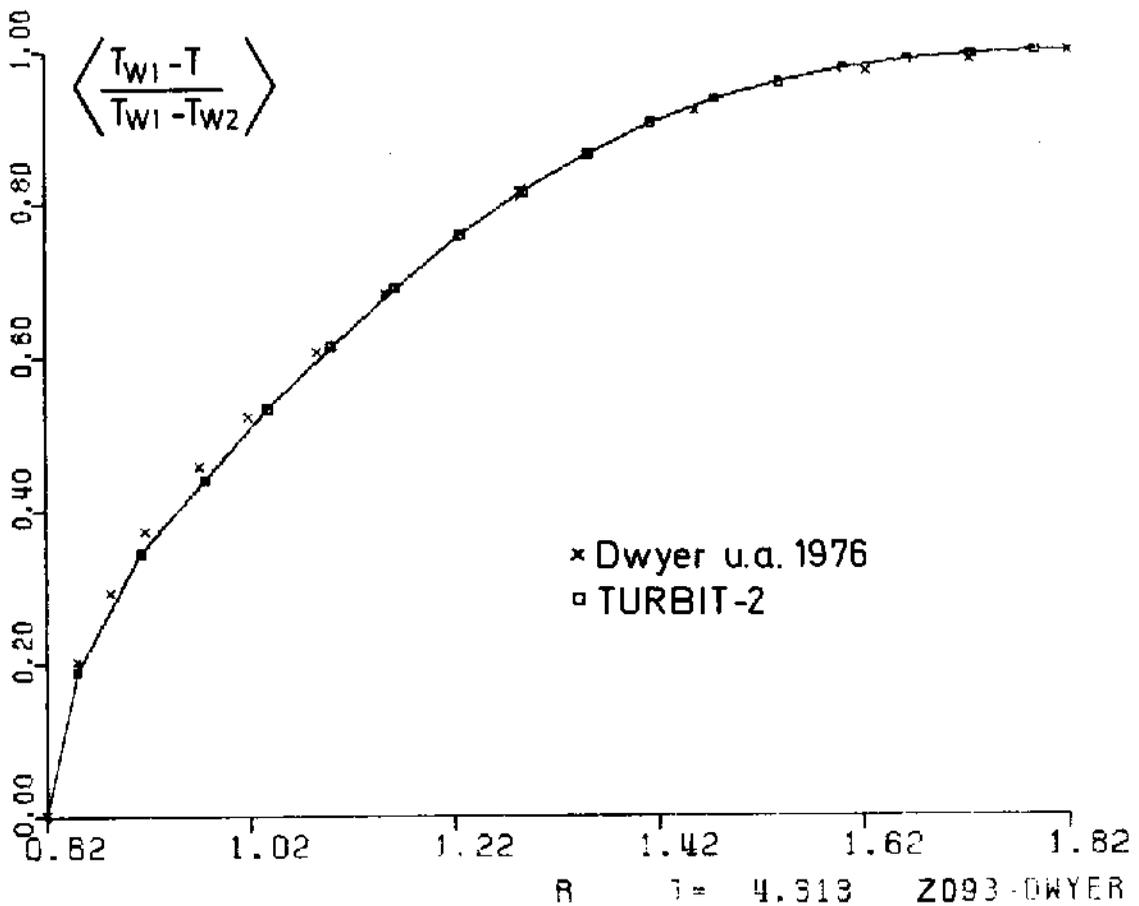
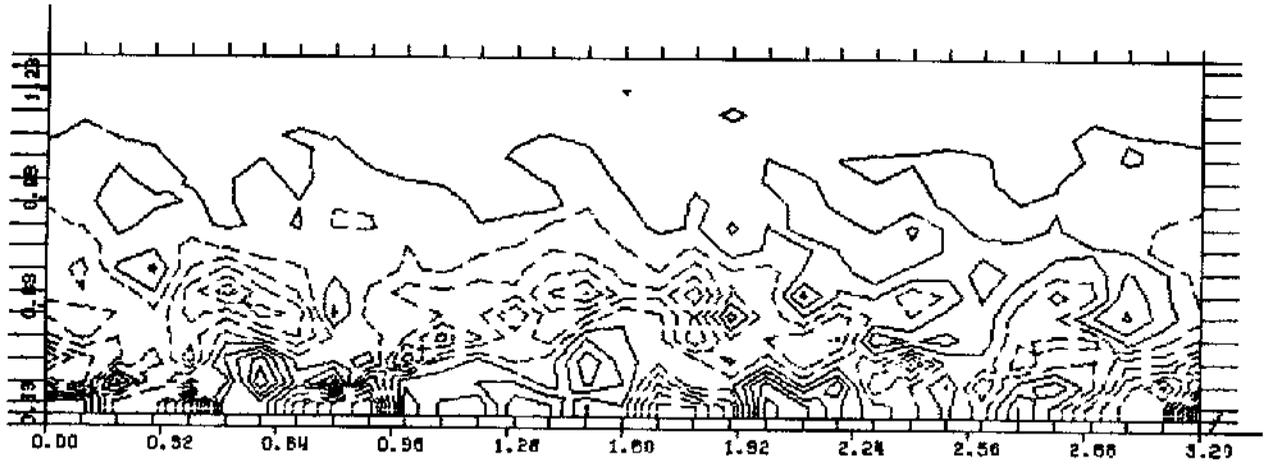


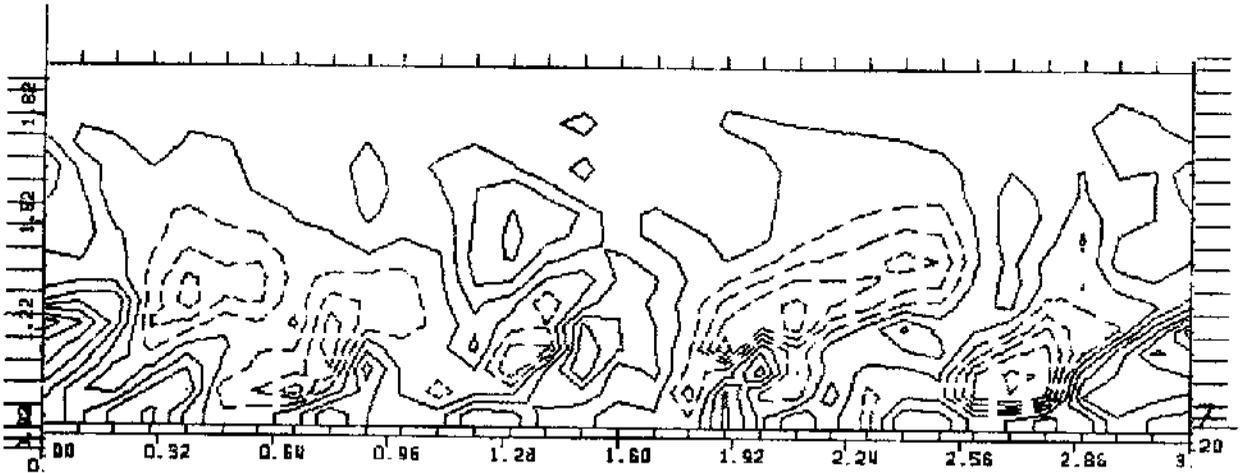
Abb. 34: Temperaturprofil des Z9-Dwyer-Ringspalts, $Re = 70\ 000$, $Pr = 0.0214$

R



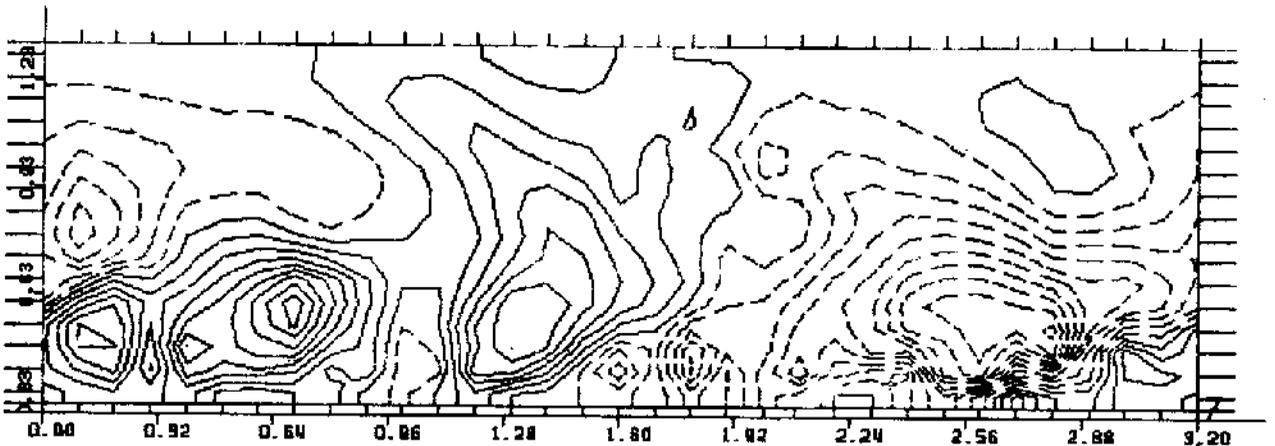
Z-R-EBENE, J= 4 TP' T= 4.509 $\Delta=0.5, Pr = 0.7$
Z223+4-BALL

R



Z-R-EBENE, J= 4 TP' T= 5.207 $\Delta=0.4, Pr=0.02$
Z225-DWYE^R

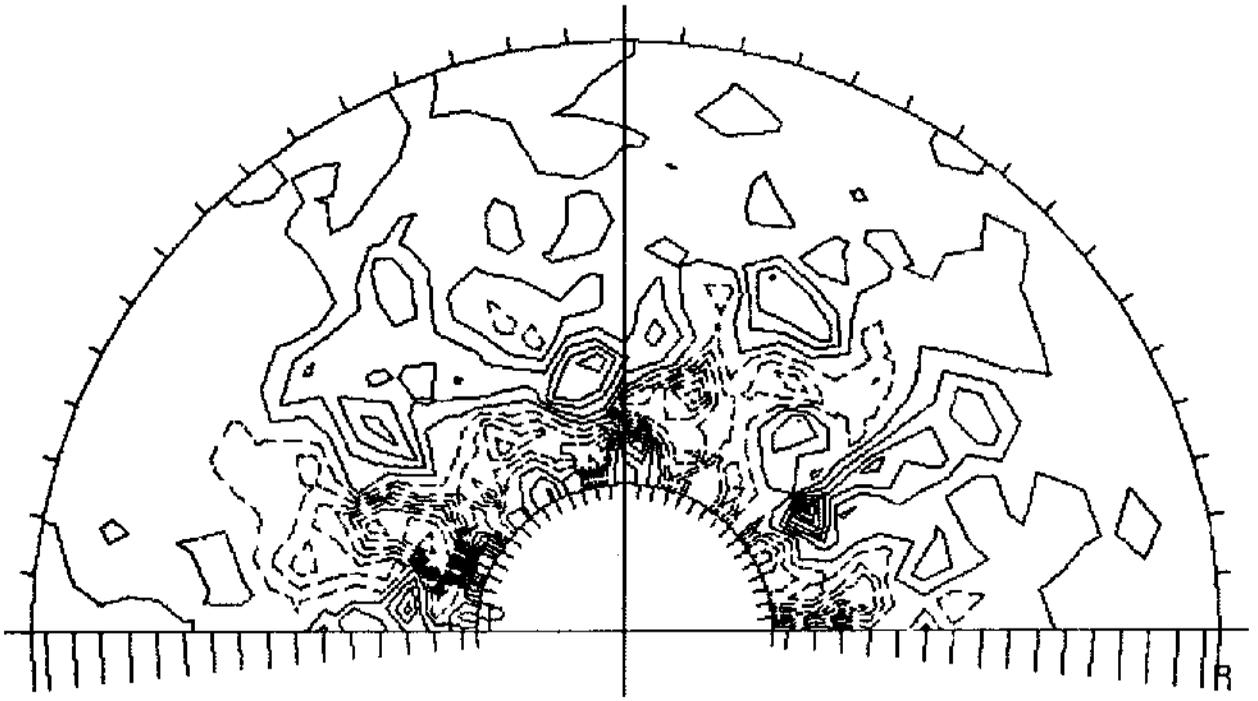
R



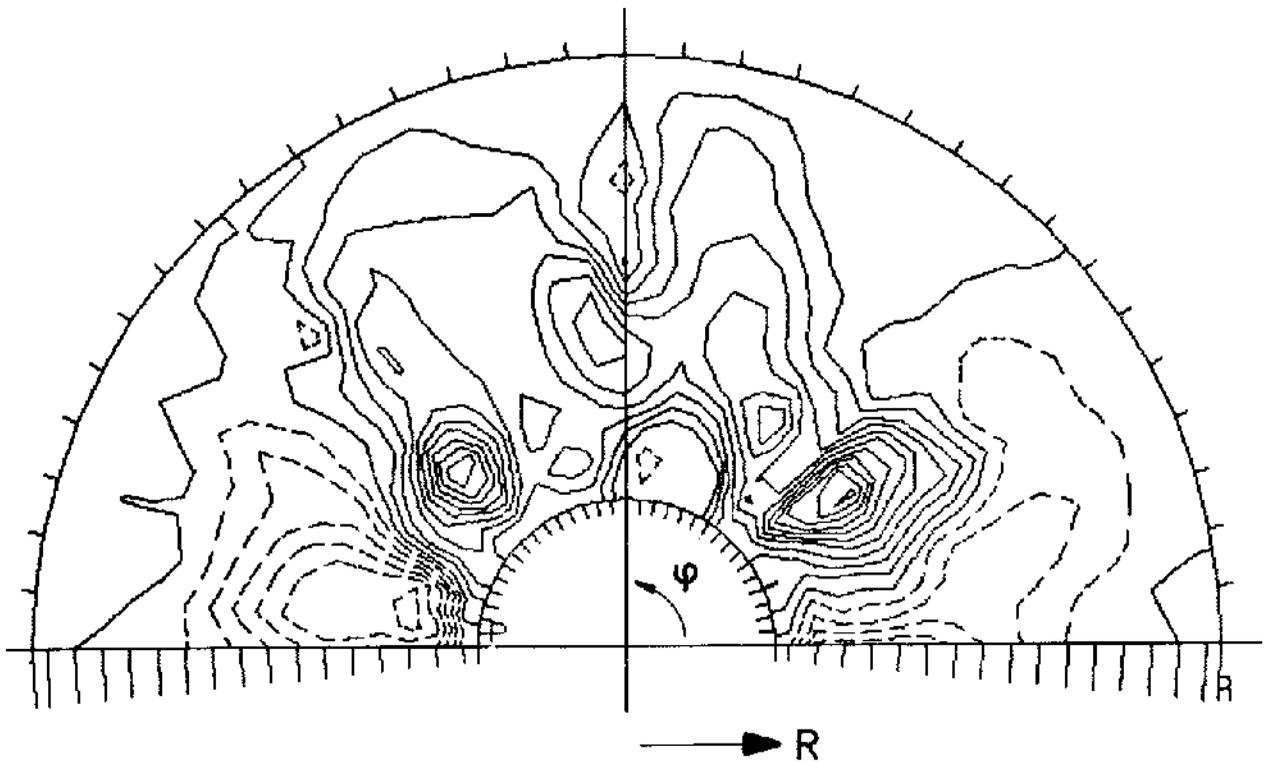
→ Z

Z-R-EBENE, J= 4 TP' T= 3.572 $\Delta=0.075, Pr=0.007$
Z225-8-WEINBERG

Abb. 35: Momentaufnahmen der Temperaturschwankungsfelder
der Fälle Z2.2-Ball, Z2.2-Dwyer, Z2.2-Weinberg



R-P-EBENE, I= 4 TP' T= 4.509 $\Delta = 0.5, Pr = 0.7$
Z223+4-BALL



R-P-EBENE, I= 4 TP' T= 3.572 $\Delta = 0.075, Pr = 0.007$
Z225-8-WEINBERG

Abb. 36: Momentaufnahmen der Temperaturschwankungsfelder
der Fälle Z2.2-Ball und Z2.2-Weinberg

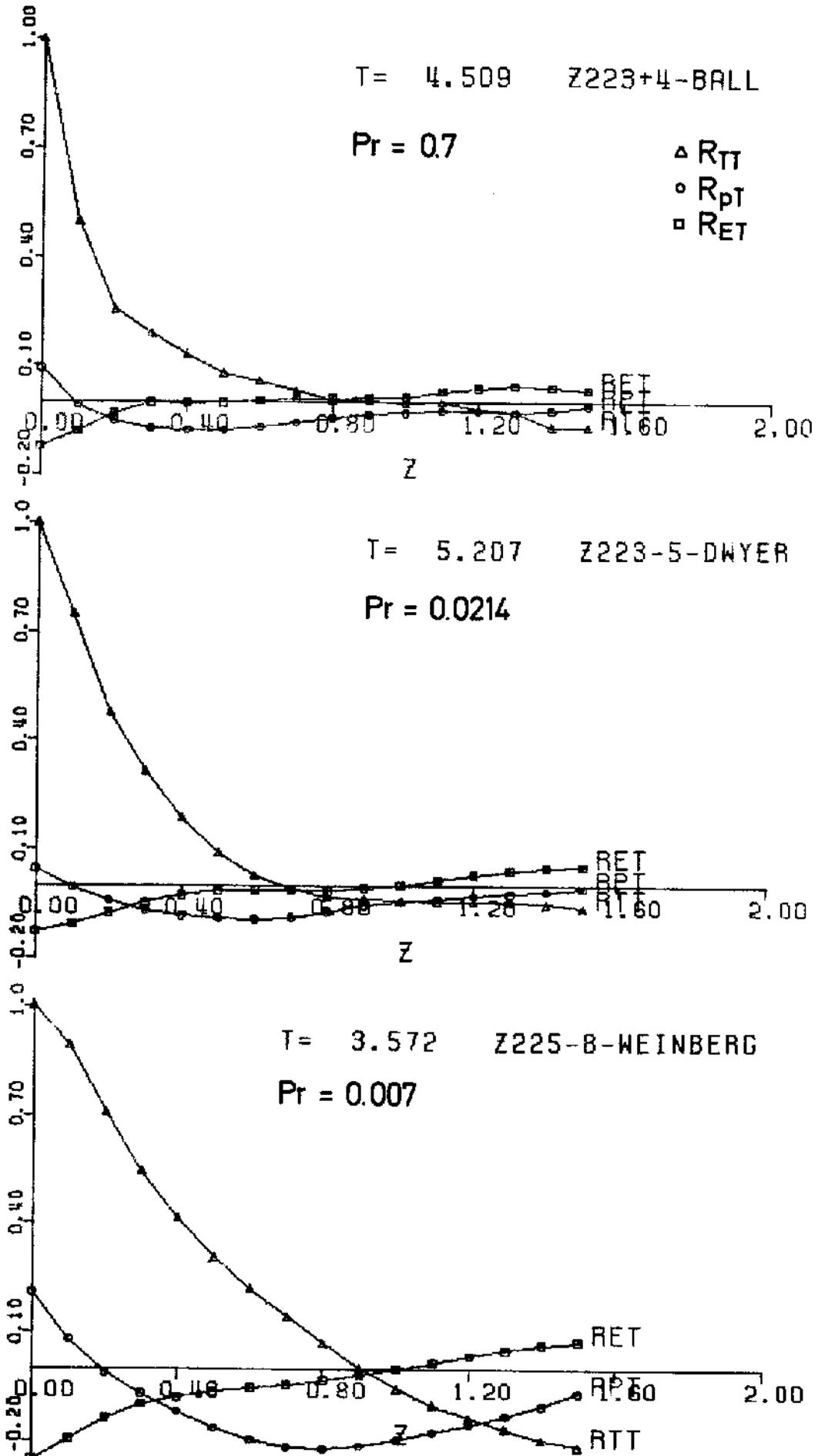


Abb. 37: Zweipunktkreuzkorrelationen zwischen Temperatur-, Druck- und Energieschwankungen entlang der Hauptströmungsrichtung in Kanalmitte

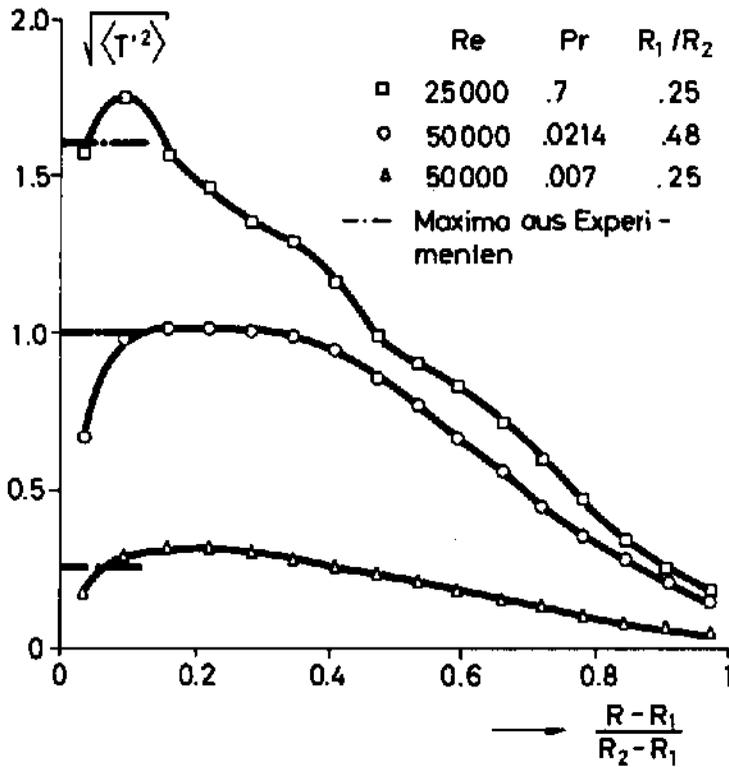


Abb. 38: rms-Werte der Temperaturschwankungen für verschiedene molekulare Prandtl-Zahlen

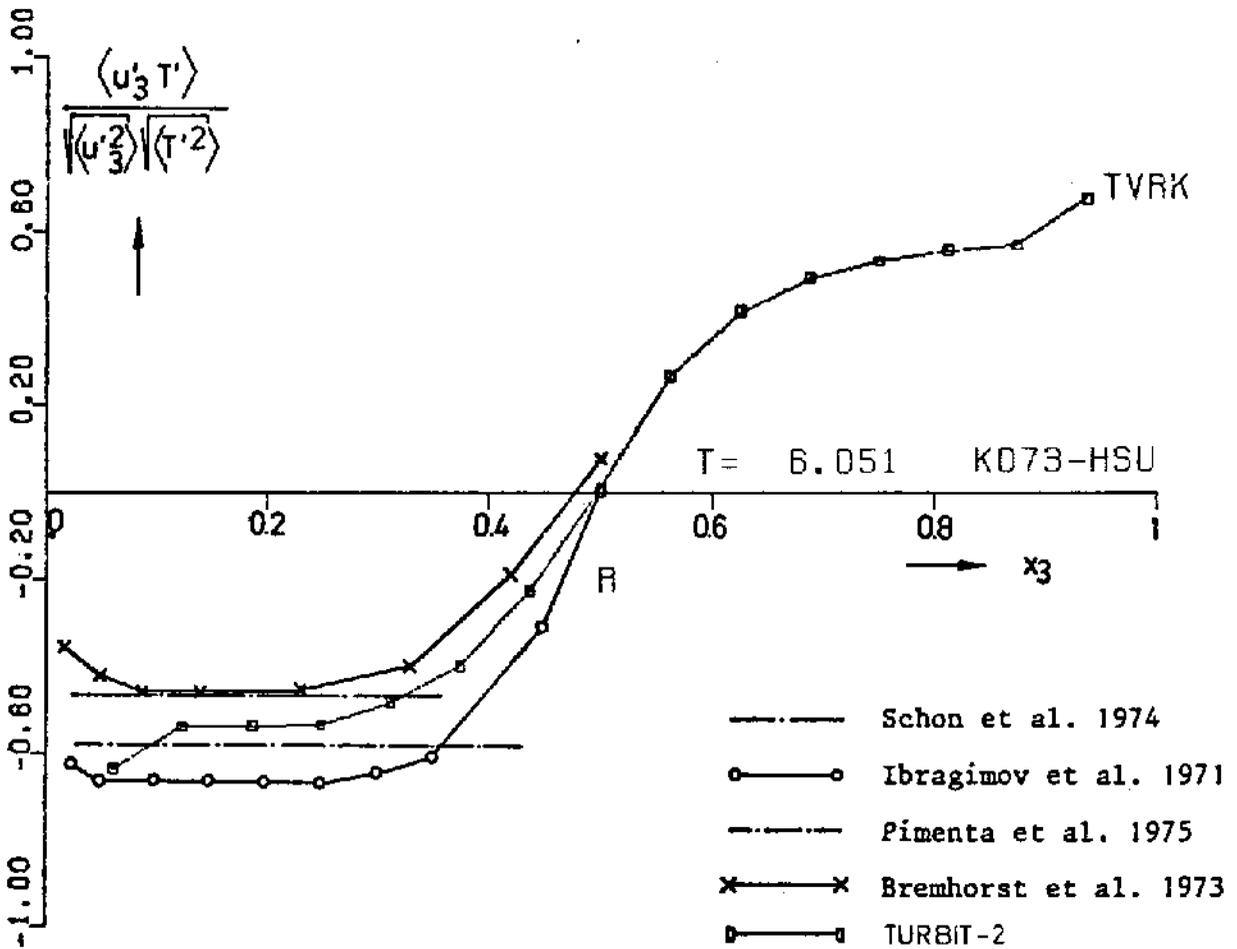


Abb. 39a: Wärmestromkreuzkorrelationskoeffizient für den Plattenkanal K7-Hsu mit $Pr = 0.71$

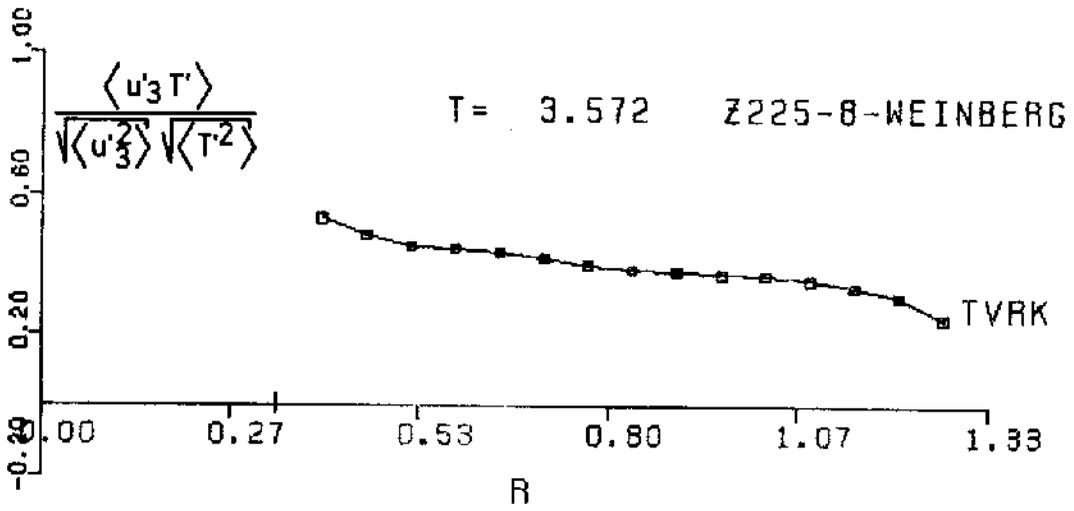


Abb. 39b: Wärmestromkreuzkorrelationskoeffizient für den Ringspalt Z2.2-Weinberg mit $Pr = 0.007$

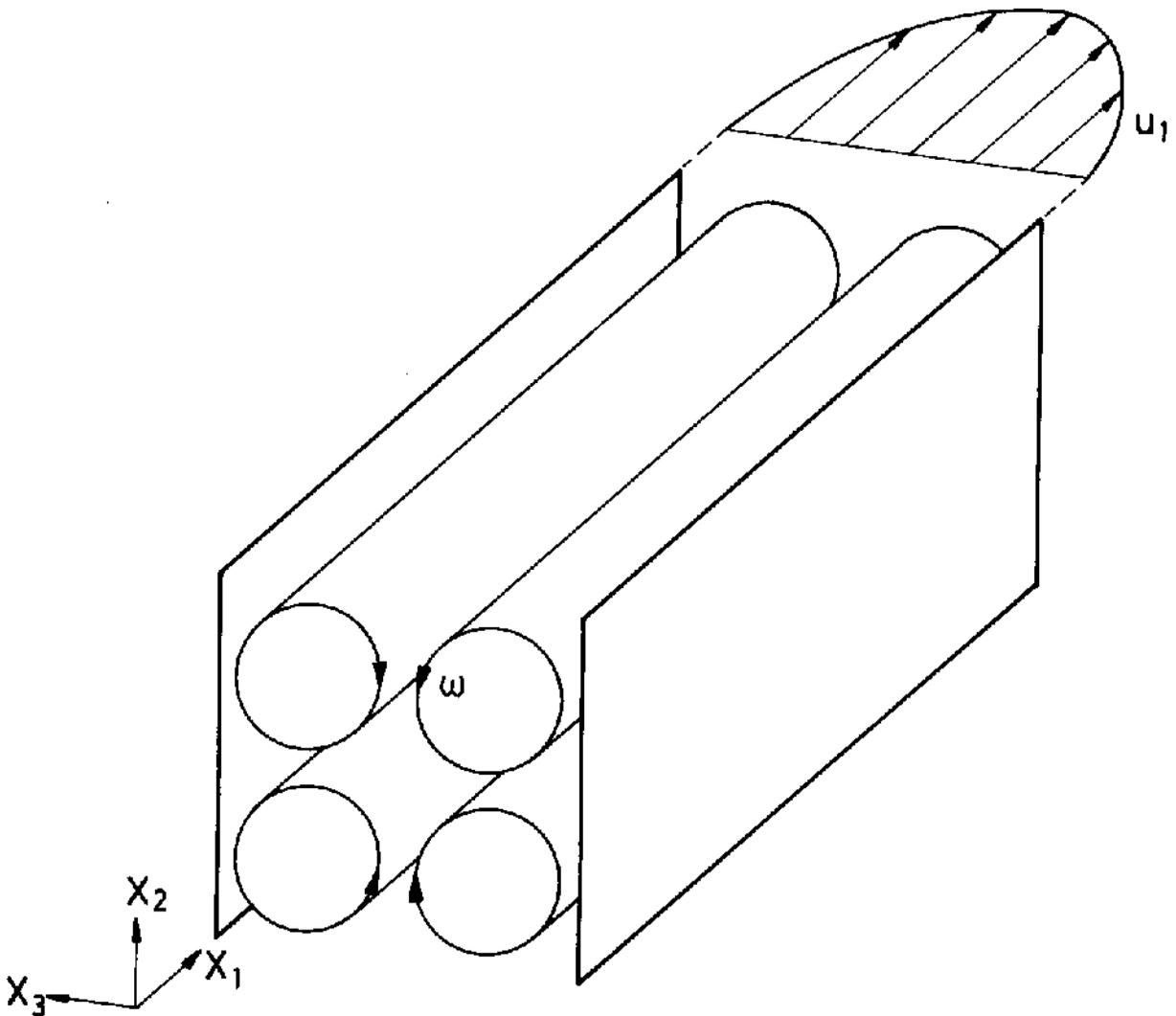


Abb. 40: Anfangsgeschwindigkeitsfeld zur Untersuchung von Pr_t mit dem Simulationsprogramm EDDY

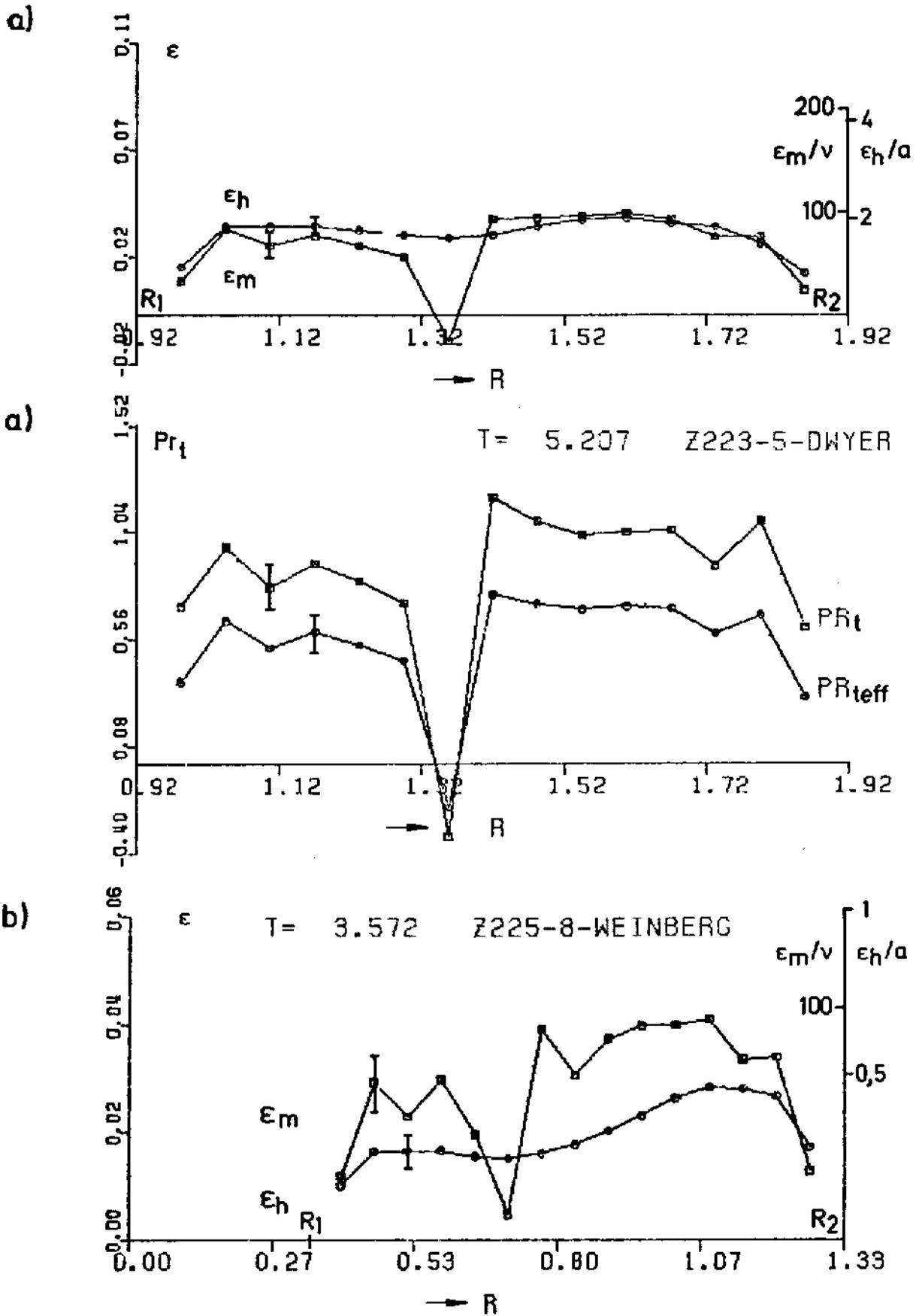
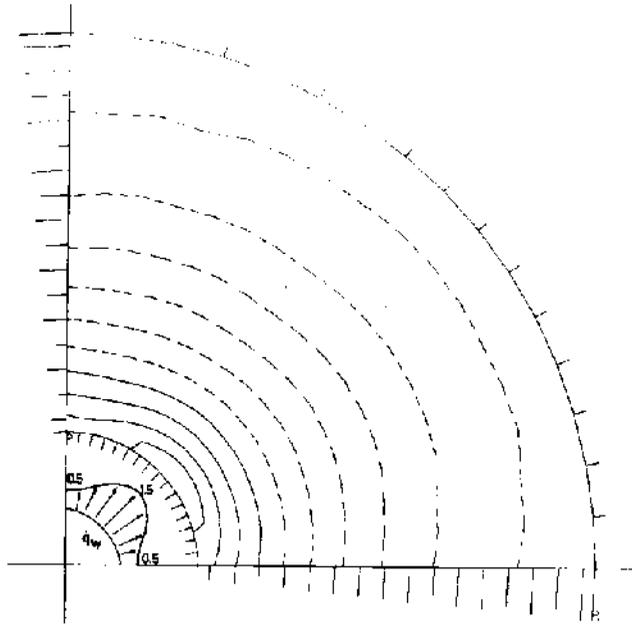
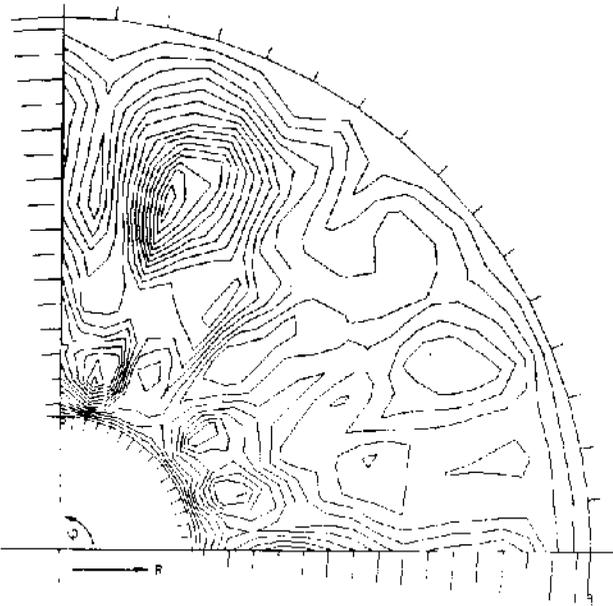


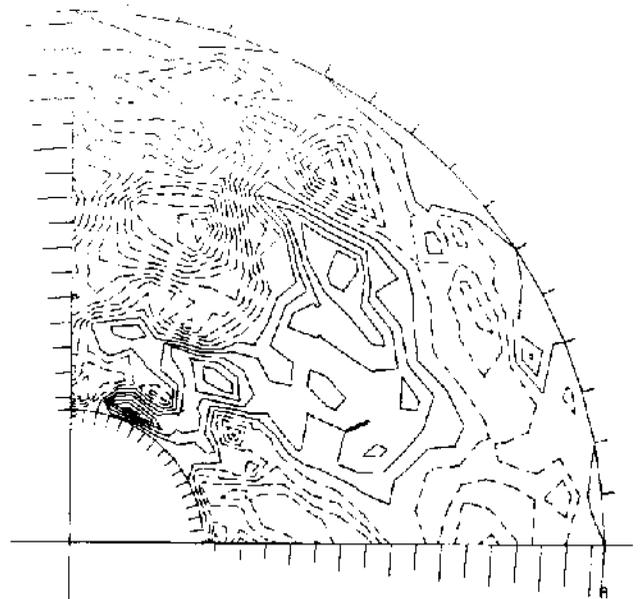
Abb. 41: Turbulente Austauschgrößen und turbulente Prandtl-Zahl für
 a) $Pr = \nu/a = 0.02$ und b) $Pr = 0.007$, $Pr_{teff} = (\epsilon_m + \nu)/(\epsilon_h + a)$,
 I Standardabweichung



R-P-EBENE.- I <TP> T= 4.151 Δ=0.25, Pr=0.007
7093-5-PNP QPW(PH1)

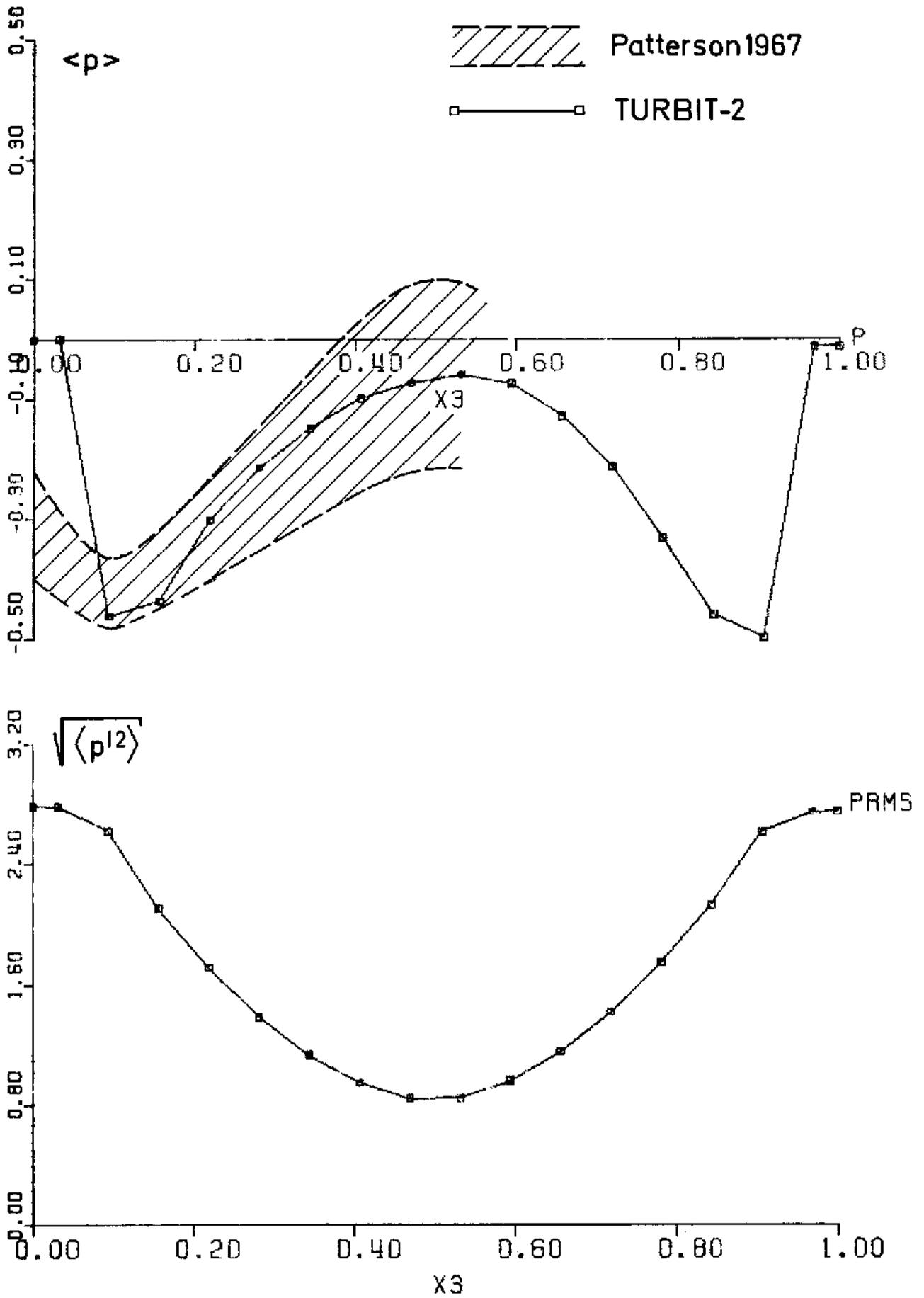


Δ=0.005
R-P-EBENE.- I <TP> T= 4.151 7093-5-PNP QPW(PH1)



Δ=0.005
R-P-EBENE.- I <TP> T= 4.151 7093-5-PNP QPW(PH1)

Abb. 42: Wirkung des radialen und azimuthalen turbulenten Wärmeaustausches für den Fall $Z9-\dot{q}_w(\Psi)$. (Die Felder sind an jedem Ort in x_1 -Richtung über alle IM-Maschinen gemittelt.) $R_1/R_2 = 0.25$, $Pr = 0.007$



$\tau = 8.244$ K225 -HSU

Abb. 43: Druck- und Druck-rms-Werteprofil für den Plattenkanal K2.2-Hsu+
Fuchs, $Re = 25\ 000$

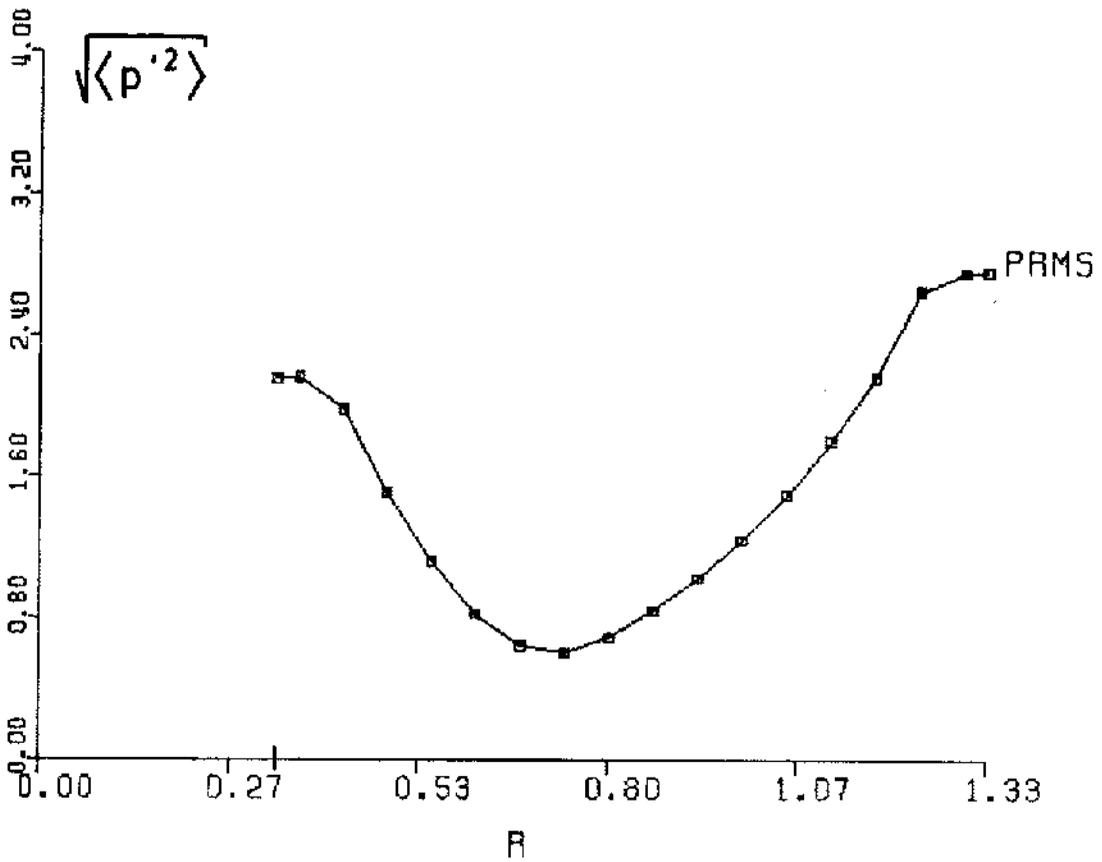
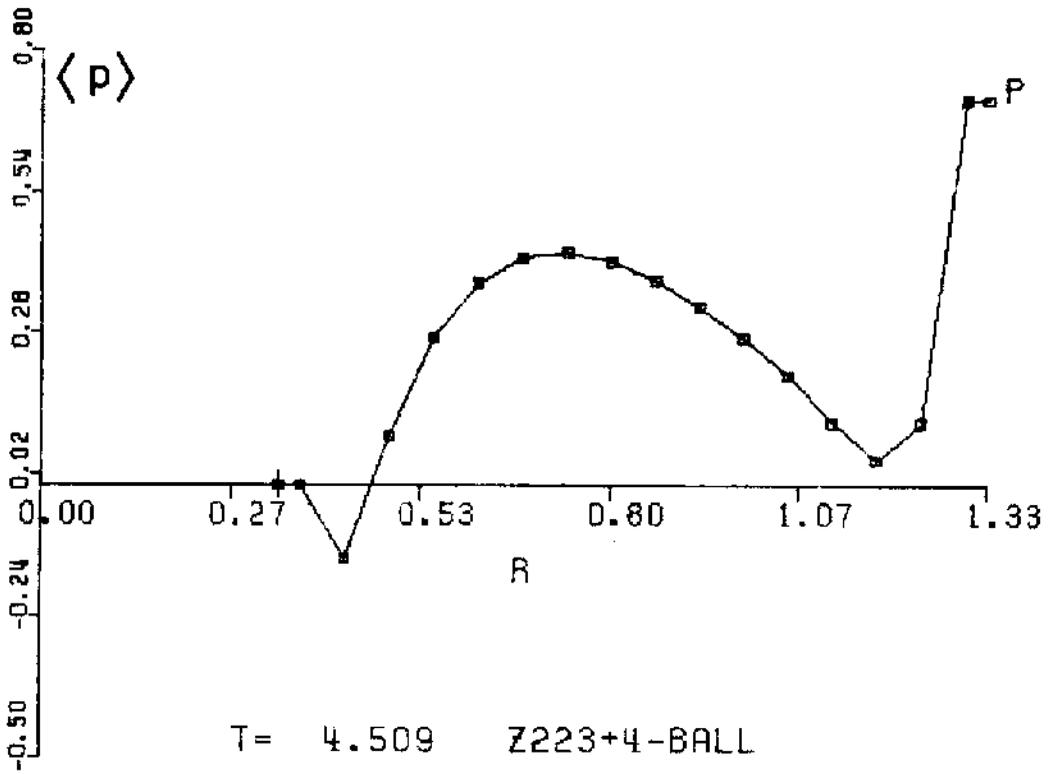


Abb. 44: Druck- und Druck-rms-Werteprofil für den Ringspalt Z2.2-Ball, $R_1/R_2 = 0.25$, $Re = 25\ 000$

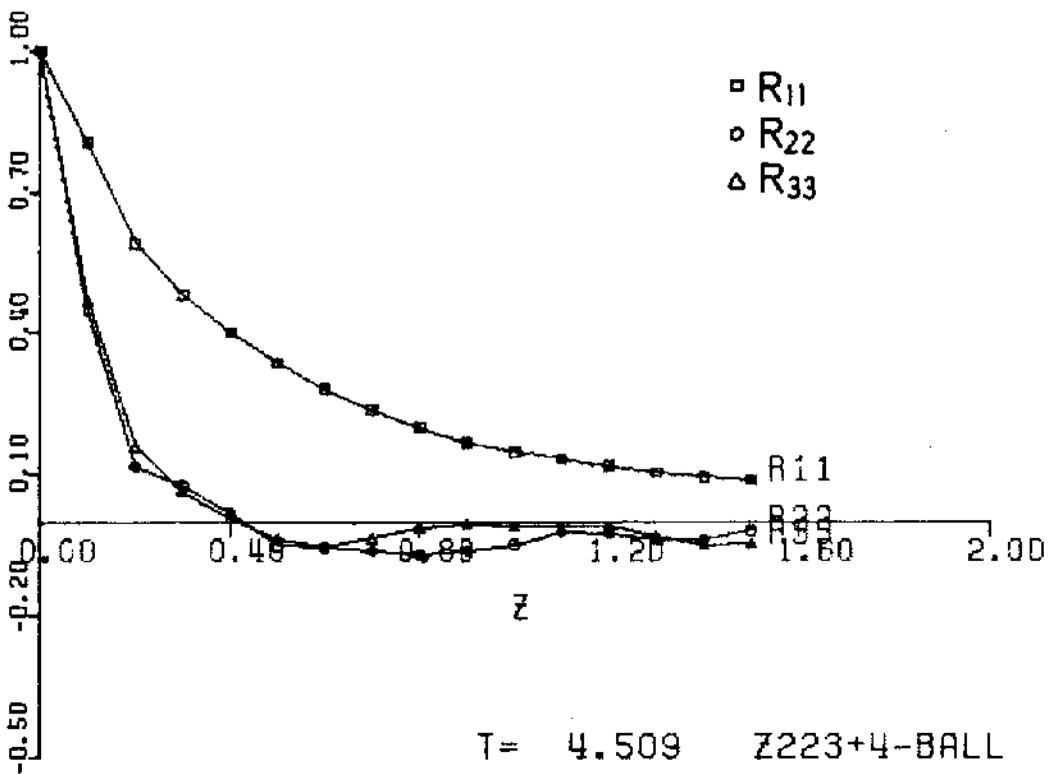
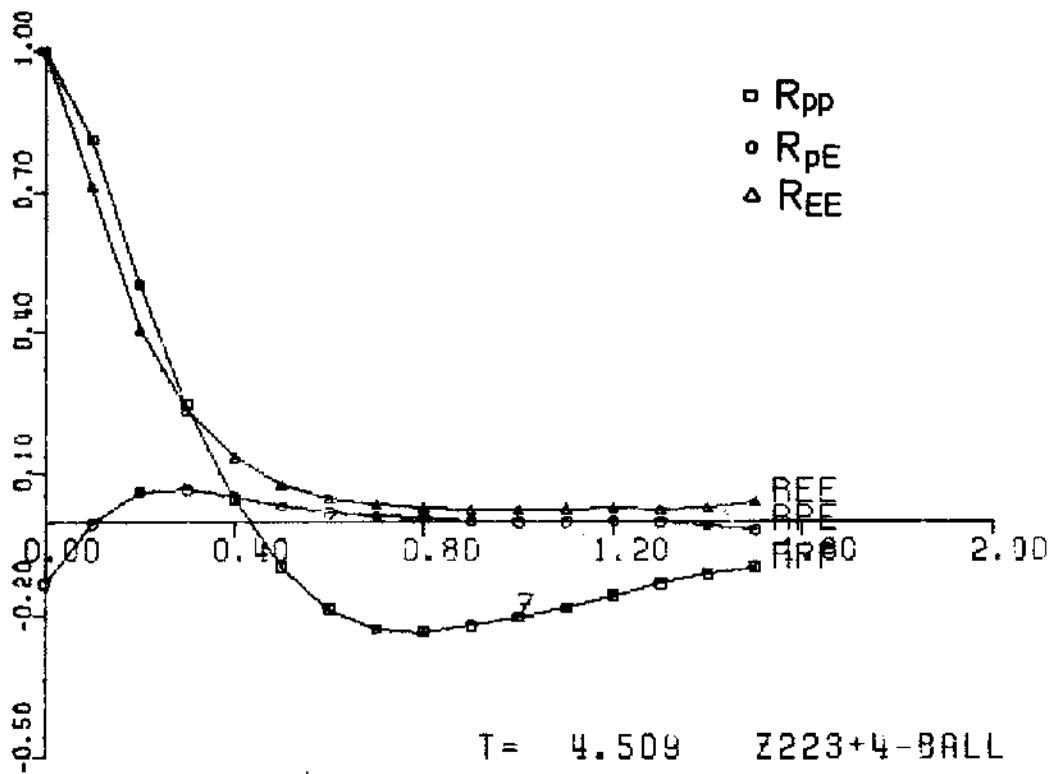


Abb. 45: Zweipunktekreuz- und Autokorrelationen entlang der Hauptströmungsrichtung in Kanalmitte, $R_1/R_2 = 0.25$, $Re = 25\ 000$

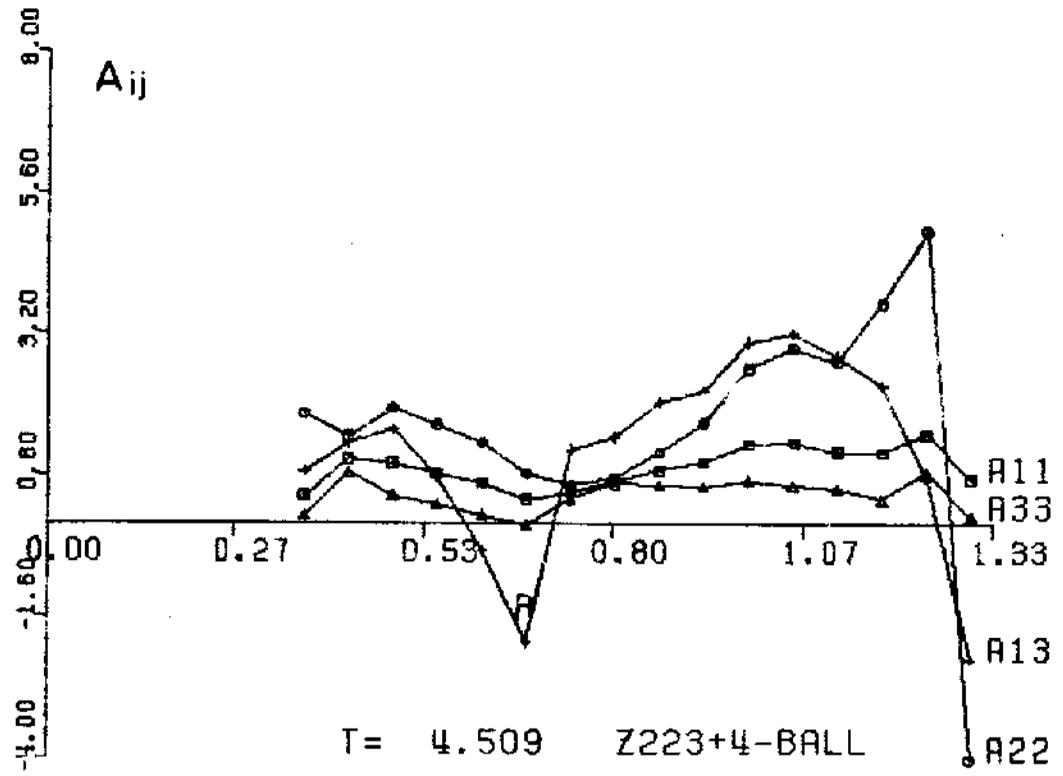
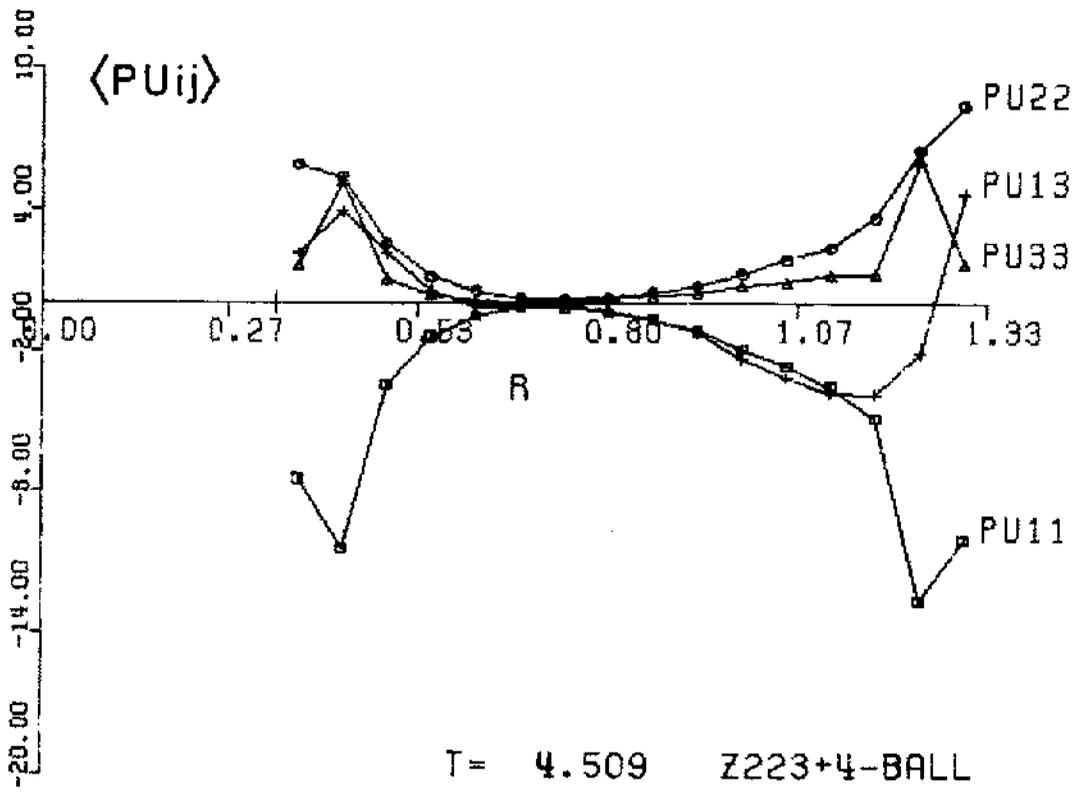


Abb. 46: Pressure-Strain-Terme und Rotta-Modellkonstanten,
 $R_1/R_2 = 0.25, Re = 25\ 000$

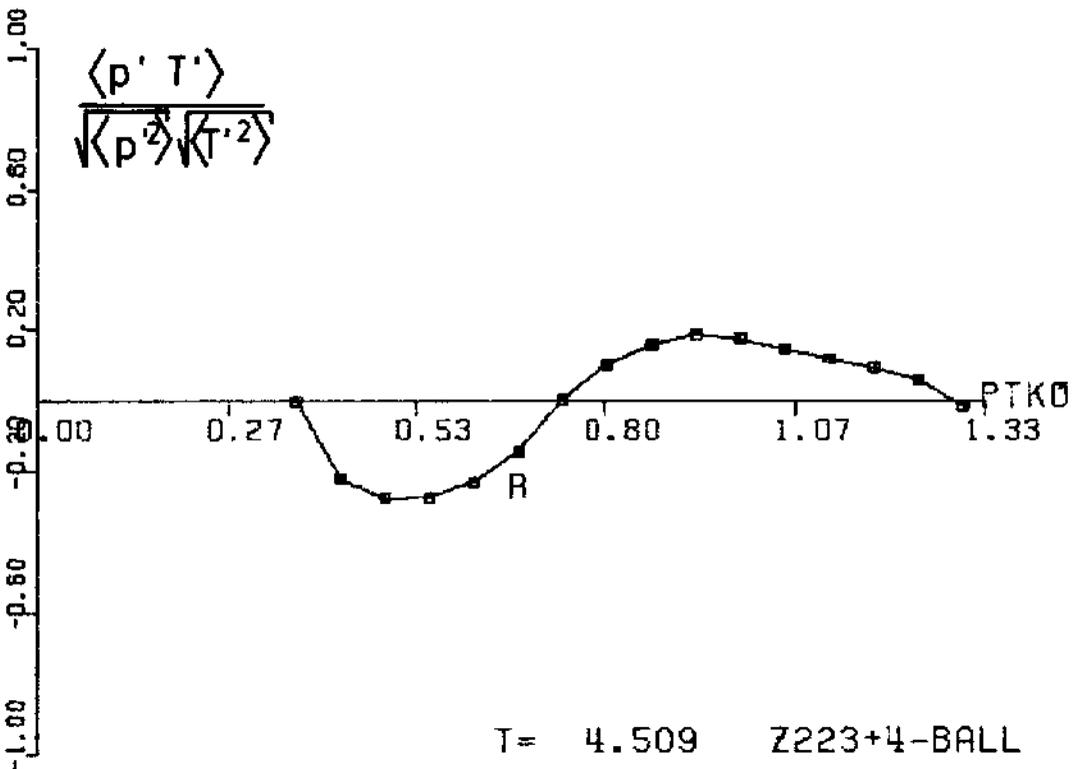
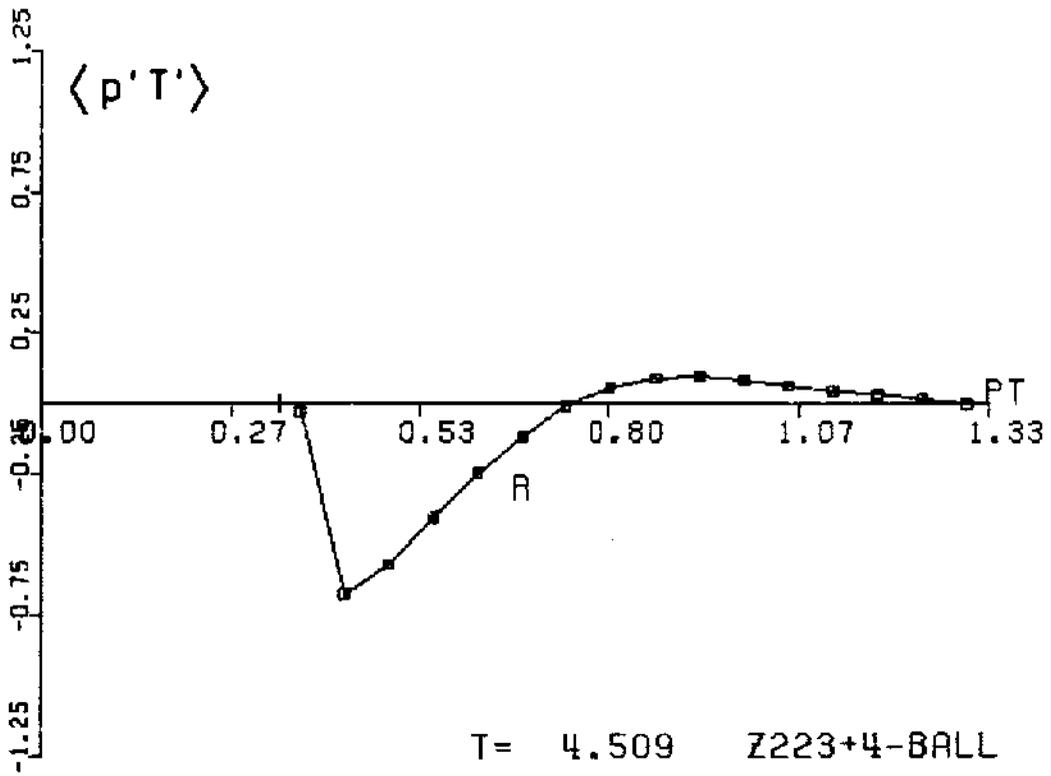


Abb. 47: Druck-Temperatur-Kreuzkorrelation bei einseitiger Beheizung, $R_1/R_2 = 0.25$, $Re = 25\ 000$, $Pr = 0.7$

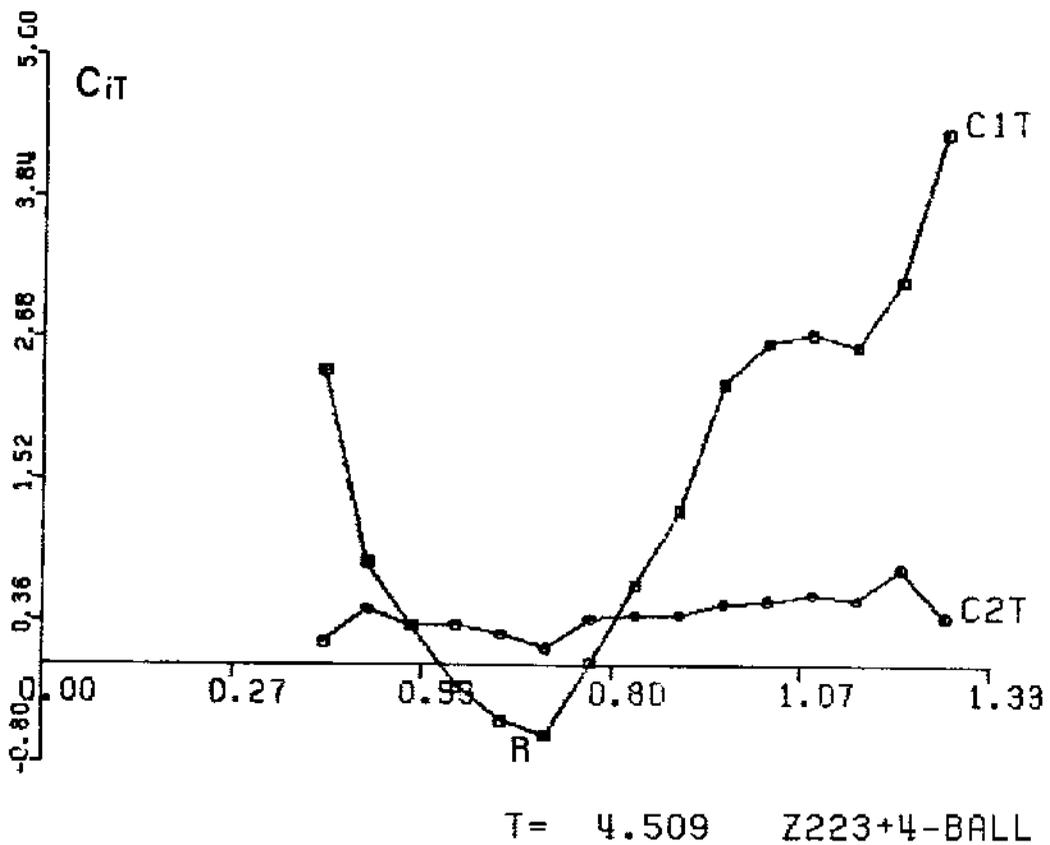
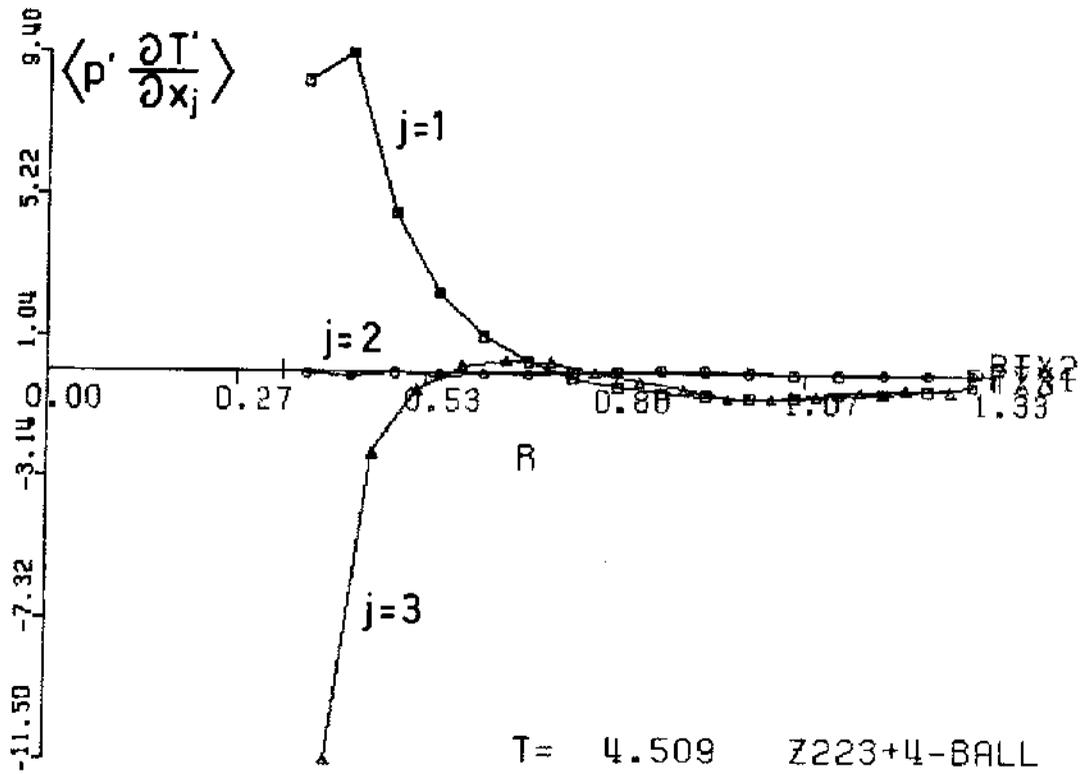


Abb. 48: Pressure-Scrambling-Terme und Modellkonstanten bei einseitiger Beheizung, $R_1/R_2 = 0.25$, $Re = 25\ 000$, $Pr = 0.7$

Direkte numerische Simulation turbulenter
Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder
bei Kanalströmungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für Maschinenbau der

Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

D I S S E R T A T I O N

von

Dipl.-Ing. Günther Grötzbach
aus Neckargemünd

Karlsruhe 1977

Direkte numerische Simulation turbulenter
Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder
bei Kanalströmungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für Maschinenbau der

Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

D I S S E R T A T I O N

von

Dipl.-Ing. Günther Grötzbach

aus Neckargemünd

Tag der mündlichen Prüfung:	17. Februar 1977
Hauptreferent:	Prof.Dr.rer.nat. D. Smidt
Korreferent:	Prof.Dr.-Ing. U. Müller
Vorsitz:	Prof.Dr.rer.nat. E.W. Becker

Diese Dissertation wird als Bericht der Gesellschaft für Kernforschung
mbH. veröffentlicht (KFK 2426)

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Reaktorentwicklung der Gesellschaft für Kernforschung mbH, Karlsruhe.

Herrn Prof.Dr. D.Smidt bin ich für sein Interesse, für die stete Förderung dieser Arbeit und für die Übernahme des Referates sehr dankbar. Ebenso danke ich Herrn Prof.Dr. U.Müller für die Übernahme des Korreferates und Herrn Prof.Dr. E.W.Becker für die Übernahme des Vorsitzes.

Herrn Dr. U. Schumann möchte ich für die Einführung in die Geheimnisse von TURBIT-1, für wertvolle Diskussionen und wichtige Hinweise meinen Dank aussprechen. Überdies gilt mein Dank den Herren Dr. R. Meyder und Dr. K. Rehme sowie vielen Kollegen innerhalb und außerhalb des Institutes, die durch zahlreiche Diskussionen diese Arbeit unterstützt haben. Für die sehr sorgfältige kurzfristige Erstellung der Reinschrift bedanke ich mich herzlich bei Frau H. Jansky und Frau M. Alt.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Familie für ihre Geduld und ihr Verständnis, die sie in den letzten drei Jahren haben mußten.

Lebenslauf

- 18.8.1947 in Neckargemünd (Landkreis Heidelberg) geboren
- 1954-1958 Besuch der Volksschule in Neckargemünd
- 1958-1966 Besuch des Helmholtz-Gymnasiums Heidelberg
(Mathematisch-Naturwissenschaftliches Gymnasium)
- 1966 Reifeprüfung
- 1967-1968 Wehrdienst
- 1968 Praktikum bei Fa. Grau-Bremse, Heidelberg
- 1968-1972 Studium an der Universität Karlsruhe
Allgemeiner Maschinenbau, Vertiefung in Kerntechnik
- 1971 Praktikum am Institut für Reaktorentwicklung im
Kernforschungszentrum Karlsruhe
- 1972 Diplom-Hauptprüfung
- seit 1972 Mitarbeiter des Instituts für Reaktorentwicklung
im Kernforschungszentrum Karlsruhe,
Institutsleiter Prof. Dr. D.Smidt
- seit 1969 verheiratet, zwei Kinder