



**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 5505

# **Numerische Simulation turbulenter Auftriebs- strömungen in horizontalen Kanälen**

**Ch. Seiter**

Institut für Reaktorsicherheit

September 1995

---



**FORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE**

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5505

**Numerische Simulation  
turbulenter Auftriebsströmungen  
in horizontalen Kanälen**

**Christian Seiter**

Institut für Reaktorsicherheit

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

1995

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

# Zusammenfassung

## Numerische Simulation turbulenter Auftriebsströmungen in horizontalen Kanälen

In der vorliegenden Arbeit wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, das die dreidimensionale, zeitabhängige Berechnung der Grobstruktur turbulenter Auftriebsströmungen ermöglicht. Gegenstand der Untersuchungen sind die Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft ( $Pr=0.71$ ,  $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ,  $10^7$ ) und Natrium ( $Pr=0.006$ ,  $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ,  $2.5 \cdot 10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^7$ ) sowie eine Wasserschicht mit interner Beheizung ( $Pr=7.0$ ,  $Ra_1=1.5 \cdot 10^{10}$ ) bei mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen. Das Ziel der Arbeit umfaßt sowohl die Analyse von Strukturen momentaner als auch die statistische Analyse räumlich und/oder zeitlich gemittelter Simulationsdaten, um einen Beitrag zur Aufklärung der Eigenschaften von turbulenter Naturkonvektion vor allem mit Fluiden kleiner Prandtl-Zahl zu leisten.

Die Grobstruktursimulation von Naturkonvektion erfordert die Entwicklung geeigneter Impuls- und Wärmefeinstrukturmodelle sowie die Formulierung neuer Randbedingungen. Die im Rechenprogramm TURBIT verwendeten Energie-Längen-Modelle werden durch eine Veränderung der charakteristischen Längenmaßstäbe der kleinskaligen Turbulenz methodisch erweitert. Die Dämpfung oder die Anfachung der nicht durch das Maschennetz aufgelösten subskaligen Turbulenzkorrelationen, verursacht durch den Einfluß fester Berandungen und die Art der Schichtung, wird aufgrund dieser Erweiterungen berücksichtigt. Ebenso erweisen sich die neuen Randbedingungen für die diffusiven Terme der Erhaltungsgleichungen als notwendig, wenn die thermische oder die für Flüssigmetalle sehr viel dünnere hydrodynamische Grenzschicht nur unzureichend oder überhaupt nicht aufgelöst wird. Die erweiterten und neuen Methoden, Modelle und Randbedingungen, die die Realisierung der geplanten Simulationen erst ermöglicht haben, werden vorgestellt.

Einige vorab durchgeführte numerische Studien zeigen auf, welche Anforderungen die untersuchten Anwendungsfälle an die Simulationsmethode stellen und welche Beschränkungen existieren. In einem anschließenden Vergleich wird eine gute Übereinstimmung von numerischen mit experimentellen Ergebnissen festgestellt. Die erweiterten und neuen Methoden, Modelle und Randbedingungen können damit als verifiziert angesehen werden.

Es folgt eine statistische Analyse und eine Analyse von Strukturen der gemischten Simulationen, d.h. der Grobstruktursimulationen in den Geschwindigkeitsfeldern und der direkten numerischen Simulationen in den Temperaturfeldern, von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium im Vergleich zu den Grobstruktursimulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft. Ähnlichkeiten sowie Unterscheidungsmerkmale dieser Konvektionsform bei einer Variation von Fluid und Rayleigh-Zahl werden diskutiert.

Um statistische Turbulenzmodelle für Auftriebsströmungen mit Fluiden kleiner Prandtl-Zahl weiterzuentwickeln und zu überprüfen, werden die Daten aus direkten numerischen Simulationen, gemischten Simulationen und Grobstruktursimulationen herangezogen. Die exakten Terme der Dissipationsgleichung für homogene Turbulenz und der Gleichung der Temperaturschwankungsquadrate werden berechnet, Modellansätze für die unbekanntenen Korrelationen dieser Gleichungen ausgewertet und in diesen enthaltene Koeffizienten bestimmt. Einflüsse des Fluides, der Rayleigh-Zahl sowie Ortsabhängigkeiten werden diskutiert.

Abschließend enthält die Arbeit einen zusammenfassenden Überblick der wesentlichen Erkenntnisse und Vorschläge für weiterführende Arbeiten.

*Turbulenz, Naturkonvektion, Rayleigh-Bénard-Konvektion, Fluidschicht mit interner Wärmequelle, direkte numerische Simulation, Grobstruktursimulation, Feinstrukturmodelle, Wandgesetze, Konvektionsstrukturen, statistische Turbulenzmodelle, Dissipationsgleichung, Temperaturvarianzgleichung*

# Summary

## Numerical simulation of turbulent buoyant flows in horizontal channels

A numerical method is presented, to calculate the three-dimensional, time-dependent large scale structure of turbulent buoyant flows. The subject of the study is the Rayleigh-Bénard-convection with air ( $Pr=0.71$ ,  $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ,  $10^7$ ) and sodium ( $Pr=0.006$ ,  $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ,  $2.5 \cdot 10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^7$ ) and a fluid layer with water and an internal heat source ( $Pr=7.0$ ,  $Ra_1=1.5 \cdot 10^{10}$ ) at moderate and high Rayleigh-numbers. The goal of the work is both, the analysis of structures of instantaneous as well as the statistical analysis of spatially and/or time averaged data, to give a contribution to the investigation of the characteristics of turbulent natural convection mainly in fluids with small Prandtl-numbers.

The large eddy simulation of natural convection requires the development of appropriate momentum and heat subgrid scale models and the formulation of new boundary conditions. The used energy-length-models in the computer code TURBIT are extended methodically by modification of the characteristic length scales of the sub scale turbulence. The reduction or the increase of the sub scale turbulence correlations, caused by the influence of solid boundaries or the stratification, is considered. In the same way the new boundary conditions for the diffusive terms of the conservation equations are seen to be necessary, when the thermal or in the case of liquid metals the more critical hydrodynamic boundary layer is resolved insufficiently or not at all. The extended and new methods, models and boundary conditions, which enabled the realization of the planned simulations, are presented.

Some numerical studies show first of all, which requirements of the investigated cases of application are made to the simulation method and which limitations do exist. A comparison shows a good agreement between the numerical and the experimental results. By that the extended and new methods, models and boundary conditions can be considered as verified.

In the following a statistical analysis and an analysis of structures of the mixed simulations, that means of the large eddy simulations in the velocity fields and the direct numerical simulations in the temperature fields, of Rayleigh-Bénard-convection with sodium in comparison to the large eddy simulations of Rayleigh-Bénard-convection with air is made. Similarities and differences of this convection problem, if fluid and Rayleigh-number varies, are discussed.

To develop and to check statistical turbulence models for buoyant flows with small Prandtl-number fluids, the data of the direct numerical simulations, mixed simulations and large eddy simulations are used. Exact terms of the dissipation rate equation for homogeneous turbulence and the temperature variance equation are calculated, model assumptions for the unknown correlations of these equations are analysed and their model coefficients are determined. Influences of the fluid, the Rayleigh-number as well as location dependencies are discussed.

Finally a summary about the essential conclusions and proposals for the future research are given.

*turbulence, natural convection, Rayleigh-Bénard-convection, fluid layer with internal heat source, direct numerical simulation, large eddy simulation, subgrid scale models, wall functions, convection structures, statistical turbulence models, dissipation rate equation, temperature variance equation*

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
<b>Inhaltsverzeichnis .....</b>	<b>I</b>
<b>Abbildungsverzeichnis.....</b>	<b>IV</b>
<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>VII</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis .....</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Einleitung .....</b>	<b>1</b>
1.1 Auftriebsströmungen in Natur und Technik.....	1
1.2 Problemstellung und Literaturstand.....	1
1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise.....	6
<b>2. Theorie.....</b>	<b>8</b>
2.1 Gleichungen.....	8
2.2 Simulationsmethode.....	12
2.3 Räumliche Diskretisierung .....	14
2.4 Zeitliche Diskretisierung .....	19
<b>3. Methodische Erweiterung von TURBIT für die Grobstruktursimulation von Auftriebsströmungen .....</b>	<b>24</b>
3.1 Modellierung der Feinstruktur.....	24
3.1.1 Literaturstand zu Feinstrukturmodellen für Naturkonvektion .....	24
3.1.2 Beschreibung des weiterentwickelten Feinstrukturmodells.....	29
3.1.2.1 Gedanken zur Modellierung .....	29
3.1.2.2 Modellerte Feinstrukturenergiegleichung .....	32
3.1.2.3 Modellkoeffizienten .....	35
3.1.2.4 Längenmaßstäbe.....	41
3.2 Anfangs- und Randbedingungen.....	48
3.2.1 Anfangsbedingungen .....	48
3.2.2 Randbedingungen .....	49
3.2.2.1 Literaturstand zu Wandgesetzen für Naturkonvektion .....	51
3.2.2.2 Geschwindigkeitswandbedingungen .....	55
3.2.2.3 Temperaturwandbedingungen .....	61
3.2.2.4 Feinstrukturenergiewandbedingungen .....	65

<b>4. Ergebnisse.....</b>	<b>68</b>
4.1 Einführung .....	68
4.1.1 Physikalische Anwendungsfälle .....	68
4.1.1.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion .....	68
4.1.1.2 Fluidschicht mit interner Wärmequelle .....	70
4.1.2 Übersicht der Grobstruktursimulationen .....	71
4.1.3 Übersicht der direkten numerischen Simulationen .....	73
4.1.4 Analysemethode .....	75
4.2 Numerische Vorstudien .....	75
4.2.1 Einfluß der Größe des Rechengebietes .....	76
4.2.2 Einfluß der räumlichen Auflösung .....	80
4.2.3 Einfluß der Größe der wandnahen Maschen .....	81
4.2.4 Einfluß der Anfangsbedingungen .....	84
4.3 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen .....	86
4.3.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft .....	86
4.3.2 Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium .....	88
4.3.3 Wasserschicht mit interner Wärmequelle .....	91
4.4 Statistische Analyse der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium .....	94
4.4.1 Temperaturfeld .....	94
4.4.2 Geschwindigkeitsfeld .....	97
4.4.3 Grashof-Analogie .....	100
4.4.4 Räumliche Zweipunktkorrelationen .....	101
4.4.5 Energiespektren räumlicher Verteilungen .....	103
4.5 Strukturen der Konvektion bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium .....	104
4.5.1 Strukturen bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen .....	104
4.5.2 Strukturen in verschiedenen Schichten .....	110
4.6 Analysen für statistische Turbulenzmodelle .....	115
4.6.1 Einführung in die statistische Beschreibung turbulenter Strömungen .....	115
4.6.2 Transportgleichung für die Dissipationsrate .....	118
4.6.2.1 Analyse der exakten Gleichung .....	118
4.6.2.2 Analyse verschiedener Modellansätze .....	127
4.6.3 Transportgleichung für die Temperaturschwankungen .....	134
4.6.3.1 Analyse der exakten Gleichung .....	134
4.6.3.2 Analyse verschiedener Modellansätze .....	139

	Seite
<b>5. Schlußfolgerungen und Ausblick .....</b>	<b>143</b>
5.1 Schlußfolgerungen .....	143
5.2 Ausblick.....	147
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>149</b>
<b>Anhang A Normierung der Gleichungen.....</b>	<b>163</b>
<b>Anhang B Abschätzung der erreichbaren Rayleigh-Zahlen.....</b>	<b>168</b>
<b>Anhang C Zusammenfassung der Modelle.....</b>	<b>170</b>

# Abbildungsverzeichnis

	Seite
2.1 : Kanalgeometrie und Einflußgrößen.....	9
2.2 : Qualitativer Verlauf der Spektren der turbulenten kinetischen Energie und der Temperaturschwankungsquadrate für mittlere und kleine Prandtl-Zahlen.....	13
2.3 : Versetztes Gitter.....	15
3.1 : Eindimensionale Energiespektren verschiedener Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion in Wandnähe und in Kanalmitte.....	31
3.2 : Eindimensionale Energiespektren verschiedener Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen einer Fluidschicht mit interner Wärmequelle bei instabiler und stabiler Schichtung.....	32
3.3 : Terme der turbulenten kinetischen Energiegleichung für Luft und Natrium bei ähnlicher Grashof-Zahl nach Wörner (1994).....	37
3.4 : Eindimensionale Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie und der Temperaturfluktuationen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft bei Variation der Feinstrukturkoeffizienten.....	39
3.5 : Charakteristische Längenmaßstäbe $G_m$ und $G_h$ bei stabiler Schichtung.....	47
3.6 : Turbulente Feinstruktur-Prandtl-Zahl, normalisiert mit ihrem Wert bei indifferenten Schichtung und aufgetragen über der Gradienten-Richardson-Zahl.....	47
3.7 : Mittlere Gradienten der Temperatur in turbulenter Naturkonvektion nach der Theorie von Kraichnan (1962).....	52
3.8 : 4-Schichtenmodell und Transportmechanismen in turbulenter Naturkonvektion nach Chung et al. (1992a).....	53
3.9 : Schematischer Verlauf der Geschwindigkeit in Wandnähe.....	55
3.10 : Geschwindigkeitsbeträge $\langle  \bar{u}_1  \rangle$ bei Rayleigh-Bénard-Konvektion für Luft und Natrium und verschiedenen Rayleigh-Zahlen.....	57
3.11 : Mittleres Geschwindigkeits- und Temperaturprofil für Rayleigh-Bénard-Konvektion bei $Pr=1$ .....	58
3.12 : Schematischer Verlauf der Temperatur in Wandnähe.....	62
3.13 : Temperaturprofile bei Rayleigh-Bénard-Konvektion für Luft und Natrium.....	64
3.14 : Temperaturgradientenprofile bei Rayleigh-Bénard-Konvektion für Luft und Natrium.....	64
3.15 : Schematischer Verlauf der Feinstrukturenergie in Wandnähe.....	66
4.1 : Temperaturverteilung in einer Vertikalebene bei laminarer Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Wasser und einer turbulenten Wasserschicht mit interner Wärmequelle. Interferogramme aus Jahn (1975).....	69
4.2 : Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen $u_i''$ und der Temperaturfluktuationen $T''$ der Fälle IWA15A und IWA15B.....	77
4.3 : Eindimensionale Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie und der Temperaturfluktuationen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft bei Variation der Periodenlängen.....	78
4.4 : Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen $u_i''$ und der Temperaturfluktuationen $T''$ der Fälle BLU3, BLU6 und BLU25A-D.....	79
4.5 : Eindimensionale Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie und der Temperaturfluktuationen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft bei Variation der räumlichen Auflösung.....	80

4.6 :	Vergleich der RMS-Werte der Vertikalgeschwindigkeitskomponenten in Wandnähe bei Variation der Wandauflösung der Fälle BLU3D und BLU25BEF.....	82
4.7 :	Vergleich der Temperaturprofile in Wandnähe bei Variation der Wandauflösung der Fälle BLU25B und BLU25E.....	83
4.8 :	Vergleich verschiedener Zeitsignale zwischen den Fällen IWA15A und IWA15B bei Variation der Anfangstemperaturprofile.....	85
4.9 :	Vergleich der numerischen Ergebnisse der Fälle BLU25BE und BLU100AB mit experimentellen Daten von Deardorff & Willis (1967).....	87
4.10 :	Von Kek (1989) gemessene und mit TURBIT berechnete Nusselt-Zahlen.....	90
4.11 :	Von Kek (1989) gemessene und mit TURBIT berechnete RMS-Werte der Temperatur in der Mittelebene der Natriumschicht.....	90
4.12 :	Vergleich des im Fall IWA15B berechneten mit dem von Jahn (1975) gemessenen mittleren Temperaturprofils einer Wasserschicht mit interner Wärmequelle.....	92
4.13 :	Ausschnitte der Temperaturverteilung an der oberen und unteren Wand im Fall IWA15A im Vergleich zu Interferogrammen von Jahn (1975).....	93
4.14 :	Vertikale Profile der mittleren Temperatur und des RMS-Wertes der Temperatur der Fälle BNA84, BNA250, BNA1000 und BNA10000.....	95
4.15 :	Vertikale Profile der Schiefe und der Flachheit der Temperatur bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium und Luft.....	96
4.16 :	Vertikale Profile der turbulenten kinetischen Energie und der RMS-Werte der Geschwindigkeitskomponenten im Fall BNA10000.....	98
4.17 :	Vertikale Profile der Schiefe und der Flachheit der Geschwindigkeitskomponenten bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium und Luft.....	99
4.18 :	Eindimensionale Energiespektren der $u_3$ -Geschwindigkeitsfluktuationen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium und Luft bei gleicher Grashof-Zahl.....	100
4.19 :	Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen $u_3''$ und der Temperaturfluktuationen $T''$ der Fälle BNA84, BNA250, BNA1000 und BNA10000.....	102
4.20 :	Eindimensionale Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie und der Temperaturfluktuationen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium der Fälle BNA84, BNA250, BNA1000 und BNA10000.....	103
4.21 :	Isolinien der Temperaturfluktuationen für Natrium und Luft nahe der Kanalmitte...	106
4.22 :	Isolinien der Vertikalgeschwindigkeit für Natrium und Luft nahe der Kanalmitte. ..	107
4.23 :	Isolinien der Temperatur für Natrium und Luft in Vertikalschnitten.....	108
4.24 :	Vektoren der Geschwindigkeit für Natrium und Luft in Vertikalschnitten.....	109
4.25 :	Isolinien verschiedener physikalischer Variablen für Natrium im Fall BNA250 in den drei Schnittebenen $x_3=0.04$ , $x_3=0.44$ und $x_3=0.96$ .....	112
4.26 :	Speichen und Knoten zwischen Zellen in den wandnahen Bereichen, in denen das Fluid absinkt (nach Schmidt (1988)).....	114
4.27 :	Analyseergebnisse der Dissipation sowie von Termen ihrer Transportgleichung der Fälle BNA3 und BLU3D.....	123
4.28 :	Analyseergebnisse der Dissipation sowie von Termen ihrer Transportgleichung im Fall BNA24.....	125
4.29 :	Koeffizienten $c_\epsilon$ und $c_\mu/\sigma_\epsilon$ für die Modellierung von $D_{\epsilon 1}$ der Fälle BNA3 und BNA24.....	129
4.30 :	Koeffizienten $c_\epsilon$ und $c_\mu/\sigma_\epsilon$ im Fall BLU3D für die Modellierung von $D_{\epsilon 1}$ und die gemeinsame Modellierung von $D_{\epsilon 1}+D_{\epsilon 2}$ .....	130

	Seite
4.31 : Koeffizienten $c_{1\varepsilon}$ und $c_{2\varepsilon}$ für die Modellierung der Produktion $P_{\varepsilon W}$ und der molekularen Vernichtung $V_\varepsilon$ der Fälle BLU6, BNA6 und BNA50. ....	133
4.32 : Analyseergebnisse der Temperaturschwankungsquadrate sowie von Termen ihrer Transportgleichung der Fälle BNA84 und BNA10000. ....	137
4.33 : Koeffizient $c_{TT}$ für die Modellierung des turbulenten diffusiven Transportes von Temperaturschwankungen durch Geschwindigkeitsfluktuationen $D_{gt}$ der Fälle BLU100 und BNA84 bzw. BNA10000. ....	140
4.34 : Zeitskalenverhältnis $R$ für die Modellierung des molekularen Vernichtungsterms $V_g$ von Temperaturschwankungen der Fälle BLU100 und BNA84, BNA250, BNA1000 bzw. BNA10000. ....	142
B.1 : Speichieranforderung und maximale Arbeitsspeicherkapazität sowie Rechenzeitbedarf und vertretbare Rechenzeit für die direkte numerische und die gemischte Simulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium. ....	168

# Tabellenverzeichnis

	Seite
2.1 : Faktoren in Gleichung (2.16) für die verschiedenen in TURBIT verwendeten Integrations Schritte zur Lösung der Impulsgleichungen.....	20
2.2 : Faktoren in Gleichung (2.19) für die verschiedenen in TURBIT verwendeten Integrationsverfahren zur Lösung der Energiegleichung.....	21
3.1 : Koeffizienten verschiedener Feinstrukturmodelle für Auftriebsströmungen.....	28
3.2 : Koeffizienten in Gleichung (3.65) für die Fluide Luft und Natrium.....	65
4.1 : Spezifikation der berechneten Fälle für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium sowie der Wasserschicht mit interner Wärmequelle. ....	72
4.2 : Übersicht der analysierten direkten Simulationen für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium sowie der Wasserschicht mit interner Wärmequelle. ....	74
4.3 : Problemzeit, Zeitschrittzahl und Rechenzeit bei der Interpolation von Fall BLU3 auf ein feineres Maschennetz. ....	74
4.4 : Vergleich der von Kek (1989) gemessenen mit den in TURBIT berechneten Nusselt-Zahlen. ....	89
4.5 : Vergleich der von Jahn (1975) gemessenen mit den in TURBIT berechneten Nusselt-Zahlen der oberen und unteren Wand. ....	92
4.6 : Makroskopische Wellenlängen $\lambda$ bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen.....	102

# Abkürzungsverzeichnis

## Lateinische Buchstaben

a	Temperaturleitfähigkeit
$a_t$	turbulente Temperaturleitfähigkeit
A	Fläche, Auftriebsterm in der Impulsgleichung
c	Modellkoeffizient im Temperaturwandgesetz
$c_m, c_h$	Feinstrukturkoeffizienten im Energie-Längen-Modell
$c_p$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
$c_s, c_{sh}$	Feinstrukturkoeffizienten im Smagorinsky-Modell
$c_{WE}$	Modellkoeffizient im Feinstrukturenergiewandgesetz
$c_{Wu}$	Modellkoeffizient im Geschwindigkeitswandgesetz
$c_{TT}$	Modellkoeffizient der turbulenten Diffusion von g
$c_e$	Modellkoeffizient der turbulenten Diffusion von $\varepsilon$
$c_{em}$	Feinstrukturkoeffizient der Dissipation im Rotta-Modell
$c_\mu$	Modellkoeffizient des turbulenten Impulstransportes im k- $\varepsilon$ -Modell
$c_{1\varepsilon}, c_{2\varepsilon}, c_{3\varepsilon}$	Modellkoeffizienten der Produktion/Vernichtung von $\varepsilon$
$i_j c, j c_T, j c_S$	Feinstrukturkoeffizienten der Maschennetzanisotropie in TURBIT
$C_W$	Feinstrukturkoeffizient im Wandmodell von TURBIT
$C_2, C_{T2}$	Feinstrukturkoeffizienten im Energie-Längen-Modell von TURBIT
$C_{20}$	Feinstrukturkoeffizient der Produktion von $\overline{E'}$
$C_3, C_{32}$	Feinstrukturkoeffizienten der Dissipation von $\overline{E'}$
d	Integrationsvariable, Differential
D	Kanalhöhe, Diffusionsterm in der Impulsgleichung
$D_{gm}$	molekularer Diffusionsterm in der g-Gleichung
$D_{gt}$	turbulenter Diffusionsterm in der g-Gleichung
$D_{em}$	molekularer Diffusionsterm in der $\varepsilon$ -Gleichung
$D_{\varepsilon 1}, D_{\varepsilon 2}$	turbulente Diffusionsterme in der $\varepsilon$ -Gleichung
$D2_{ij}, DT2_j$	Deformationstensoren in Differenzenform
E	kinetische Energie
$E(k), E_T(k)$	Spektren der turbulenten kinetischen Energie und der Temperaturvarianz
$EN2(j)$	Flächenintegral zur Berechnung der Feinstrukturenergie
$E'$	kinetische Feinstrukturenergie
f	Funktion
$f_i$	Kraftvektor
F	Flachheit
$jF$	Maschenfläche
g	Erdbeschleunigung, Temperaturvarianz
G	Produktion/Vernichtung von k durch Auftriebskräfte
$G_m, G_h$	Feinstrukturlängenmaßstäbe in stabiler Schichtung
h	mittlere Maschenweite
i, j, k	Richtungsindizes, Zählvariablen
IM, JM, KM	Maschenanzahl in $x_1$ -, $x_2$ - und $x_3$ -Richtung
k	Wellenzahl, turbulente kinetische Energie

$k_1$	eindimensionale Wellenzahl in $x_1$ -Richtung
$K$	Konvektionsterm in der Impulsgleichung
$K_g$	Konvektionsterm in der $g$ -Gleichung
$K_\varepsilon$	Konvektionsterm in der $\varepsilon$ -Gleichung
$l$	charakteristischer Längenmaßstab
$l_m, l_h$	Feinstruktur­längen­maß­stä­be im Energie-Längen-Modell
$l_s, l_b$	Feinstruktur­längen­maß­stä­be in stabiler Schichtung
$l_{em}$	Feinstruktur­längen­maß­stab der Dissipation von $\overline{E'}$
$L$	charakteristischer Längenmaßstab
$L_*$	Monin-Obuchow-Länge
$n$	Zeitschrittzählvariable
$n_w$	Wandabstand
$\underline{N}$	Normaleneinheitsvektor
$N_b$	Brunt-Väisälä-Frequenz
$N_t$	Zeitschrittanzahl
$N_1, N_2, N_3$	Maschenanzahl in $x_1$ -, $x_2$ - und $x_3$ -Richtung
$p, p_s, p_h$	Druck, statischer Druck, hydrostatischer Druck
$p^*$	Näherung für das Druckfeld
$P$	Produktion von $k$ durch Spannungen
$P_{gH}$	Produktionsterm in der $g$ -Gleichung
$P_{\varepsilon H}, P_{\varepsilon W}, P_{\varepsilon A}$	Produktionsterme in der $\varepsilon$ -Gleichung
$q$	übertragene Wärmemenge pro Zeit- und Flächeneinheit
$Q$	freigesetzte Wärmemenge pro Zeit- und Volumeneinheit
$R$	Zeitskalenverhältnis
$R_{ii}$	Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeit
$R_{TT}$	Zweipunktkorrelation der Temperatur
$S$	Schiefe
$t$	Zeit
$T$	Temperatur
$T_m$	zeit- und volumengemittelte Temperatur
$T_{w1}, T_{w2}$	Temperatur der unteren und oberen Wand
$T_\delta$	Temperatur am Rand der Unterschicht
$T_{p0}$	Referenztemperatur in der Boussinesq-Approximation
$T'$	modifiziertes Temperaturfeld
$T_*$	Monin-Obuchow-Temperatur
$T^+$	dimensionslose Temperatur im Temperaturwandgesetz
$u$	charakteristischer Geschwindigkeitsmaßstab
$u_i$	Geschwindigkeitsvektor
$u_m$	zeit- und volumengemittelte Geschwindigkeit
$u_\delta$	Geschwindigkeit am Rand der Unterschicht
$u_\tau$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$U$	charakteristischer Geschwindigkeitsmaßstab
$V$	Maschenvolumen
$V_g$	molekularer Vernichtungsterm in der $g$ -Gleichung
$V_\varepsilon$	molekularer Vernichtungsterm in der $\varepsilon$ -Gleichung
$x_i$	Ortsvektor
$X_1, X_2$	Periodenlängen des Kanals
$z^+$	dimensionsloser Wandabstand im Temperaturwandgesetz

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Kolmogorov-Konstante, Exponent
$\beta$	Batchelor-Konstante, Ausdehnungskoeffizient
$\gamma$	Korrekturkoeffizient der kritischen Richardson-Zahl
$\gamma_1, \gamma_T$	Korrekturkoeffizienten für die Feinstrukturmodellkoeffizienten $C_2$ und $C_{T2}$
$\Gamma$	Gamma-Funktion
$\partial$	partiell Differential
$\delta, \delta_u, \delta_T$	Grenzschichten der Geschwindigkeit und der Temperatur
$\delta_i$	Differenzenquotient
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol
$\delta_L, \delta_{Lu}, \delta_{LT}$	Unterschichten der Geschwindigkeit und der Temperatur
$\delta_{\bar{u}}, \delta_{\bar{u}u}, \delta_{\bar{u}T}$	Übergangsschichten der Geschwindigkeit und der Temperatur
$\Delta$	Differenz, mittlere Maschenweite
$\Delta_S$	Phasenverschiebung
$\varepsilon$	Dissipation von turbulenter kinetischer Energie
$\varepsilon_T$	molekulare Vernichtung von Temperaturvarianz
$\eta, \eta_T$	Kolmogorov-Längen der Geschwindigkeit und der Temperatur
$\theta$	Faktor bei der Zeitintegration
$\kappa$	von Kármán-Konstante
$\kappa_b$	Koeffizient im Temperaturwandgesetz
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit, makroskopische Wellenlänge
$\mu$	dynamische Zähigkeit
$\nu$	kinematische Zähigkeit
$\nu_t$	turbulente Zähigkeit
$\xi$	Faktor bei der Zeitintegration
$\pi$	Ludolfsche Zahl
$\rho$	Dichte
$\sigma_k$	Modellkoeffizient der turbulenten Diffusion von $k$
$\sigma_t$	Feinstrukturkoeffizient der turbulenten Diffusion von $\bar{E}'$
$\sigma_\varepsilon$	Modellkoeffizient der turbulenten Diffusion von $\varepsilon$
$\tau$	Schubspannung, Zeitmaßstab
$\Phi$	Faktor bei der Zeitintegration, beliebige abhängige Variable

## Symbole

$\bar{\Phi}$	Volumen- oder Flächenmittelwert
$\langle \Phi \rangle$	Zeitmittelwert
$\Phi'$	räumliche Fluktuation
$\Phi''$	zeitliche Fluktuation
$\underline{\Phi}, \Phi_i$	Vektor
$ \Phi $	Betrag
$\Phi^*$	Näherungsvariable, Integrationsvariable
$\Phi^+$	dimensionslose Größe im Wandbereich
$\Phi$	dimensionslose Größe allgemein
$\hat{\Phi}$	dimensionsbehaftete Größe
$\Phi_*$	charakteristische Bezugsgröße im Wandbereich
$\Phi_0$	charakteristische Bezugsgröße allgemein

## Kennzahlen

Da	Damköhler-Zahl
Da <sub>0</sub>	Anfangs-Damköhler-Zahl
Gr	Grashof-Zahl
Nu	Nusselt-Zahl
Pr	Prandtl-Zahl
Pr <sub>t</sub>	turbulente Prandtl-Zahl
Pr <sub>tSGS</sub>	Feinstruktur-Prandtl-Zahl
Pr <sub>tSGS0</sub>	Feinstruktur-Prandtl-Zahl bei indifferenter Schichtung
Pr <sub>0</sub>	Übergangs-Prandtl-Zahl
Ra	Rayleigh-Zahl
Ra <sub>c</sub>	kritische Rayleigh-Zahl (= 1708)
Ra <sub>f</sub>	modifizierte Rayleigh-Zahl
Ra <sub>fc</sub>	kritische modifizierte Rayleigh-Zahl (= 3.7 10 <sup>4</sup> )
Ri <sub>f</sub>	Fluß-Richardson-Zahl
Ri <sub>fSGS</sub>	Feinstruktur-Fluß-Richardson-Zahl
Ri <sub>G</sub>	Gradienten-Richardson-Zahl
Ri <sub>Gkrit</sub>	kritische Gradienten-Richardson-Zahl

## Abkürzungen

AB	Adams-Bashforth-Verfahren
ASM	algebraic stress model
B	Rayleigh-Bénard-Konvektion
CN	Crank-Nicholson-Verfahren
CPU	central processing unit
DNS	direct numerical simulation
FLOPS	floating point operations per second
h	heat
I	Fluidschicht mit interner Wärmequelle
LES	large eddy simulation
LF	Leapfrog-Verfahren
LU	Luft
m	momentum
NA	Natrium
RAM	random access memory
RMS	root mean square
SF	Sicherheitsfaktor
SGS	subgrid scale
SOC	second order closure
t	turbulent
W	Wand
WA	Wasser
WG	Wandgesetz



# 1. Einleitung

## 1.1 Auftriebsströmungen in Natur und Technik

In vielen Bereichen unserer Umwelt spielen strömungsmechanische Vorgänge, bei denen in einem Gravitationsfeld durch Dichteunterschiede im Strömungsfluid Auftriebskräfte induziert werden, eine bedeutende Rolle. Dabei werden Strömungen, deren Verhalten im wesentlichen durch Auftriebskräfte beeinflusst wird, als Auftriebsströmungen bezeichnet. Dichteunterschiede entstehen zumeist durch Temperaturunterschiede in einer definierten Schicht, wie sie durch die thermische Aufheizung, die innere Wärmefreisetzung oder während der Anhebung eines Fluides beim Überströmen eines Hindernisses auftreten. Es können jedoch auch Konzentrationsunterschiede dafür verantwortlich sein. Die in der Realität auftretenden Strömungen sind meistens von Turbulenz geprägt, deren Ursache Scherungen sind. Diese Scherungen können sowohl durch Auftriebseffekte als auch durch die Grundströmung hervorgerufen werden und sind immer dann von Bedeutung, wenn Auftriebskräfte und Trägheitskräfte im Verhältnis zu den Reibungskräften eine Strömung wesentlich beeinflussen. Dabei sind Auftriebseinflüsse nur dann wichtig, wenn die Auftriebskräfte gegenüber den Trägheitskräften nicht zu vernachlässigen sind.

Es existiert eine Vielzahl wichtiger Beispiele auftriebsbehafteter Strömungen in Natur und Technik. So wird angenommen, daß Auftriebseffekte bei Konvektionsvorgängen in den äußeren Zonen von Sternen, wie z. B. der Sonne, und im Erdmantel von großer Bedeutung sind. Aber auch die meisten Strömungen in der Ozeanographie und der Meteorologie sind stark auftriebsbeeinflusst. Z.B. sind nahezu alle Strömungen im Bereich der unteren Atmosphäre, deren Zustand sich Tag für Tag neu in Form des gerade herrschenden Wetters ausdrückt, auftriebsbehaftet. Die Untersuchung dieses in der Meteorologie als konvektive Grenzschicht bezeichneten Teils der Troposphäre ist bezüglich der Transportvorgänge von Impuls, Wärme und Stoffen von großem Interesse. In der Reaktortechnik haben Auftriebsströmungen im Zusammenhang mit Wärmeübertragungsproblemen einen wichtigen Stellenwert. Wird beispielsweise der hypothetische Störfall des Kernschmelzens bei Reaktoren mit festen Kernbrennstoffen unterstellt, so liegt eine Flüssigkeit vor, in der durch die Nachzerfallwärme, bei gleichzeitiger Kühlung von außen, freie Konvektion eintritt. Es gibt Überlegungen, diese bei Abschaltung eines Reaktors aufgrund der nuklearen Reaktionen anfallende Nachzerfallwärme über freie Konvektion abzuführen.

## 1.2 Problemstellung und Literaturstand

Für Anwendungen im Bereich der Reaktortechnik stellt die Kenntnis über den Wärmetransport durch Naturkonvektion ein wichtiges Anliegen dar. Dabei spielen neben Wasser vor allem Flüssigmetalle als Wärmeübertragungsfluide eine Rolle, weil sie wegen ihrer hohen Wärmeleitfähigkeit in der Lage sind, die im Reaktorkern erzeugte Wärme schnell abzuführen. Als Kühlmittel wird bei metallgekühlten Reaktoren im Primär- und im Sekundärkreislauf flüssiges Natrium verwendet. Eine Forderung zur Verbesserung der passiven Reaktorsicherheit ist, für wasser- und metallgekühlte Kernreaktoren nachzuweisen, daß die in Störfallsi-

tuationen oder im Falle der regulären Abschaltung anfallende Nachzerfallwärme durch freie Konvektion sicher aus dem Reaktor abgeführt werden kann [Sato & Miyakoshi (1989)].

Um dieses Sicherheitskonzept der passiven Nachwärmeabfuhr zu untersuchen, werden im Kernforschungszentrum Karlsruhe umfangreiche experimentelle Untersuchungen an nicht-nuklearen, verkleinerten Reaktormodellen mit dem Fluid Wasser als Kühlmittel durchgeführt [Hoffmann et al. (1991)]. Die Analyse der experimentellen Ergebnisse und deren Übertragung auf existierende oder zukünftig geplante Reaktorkonstruktionen muß dabei auf numerischem Weg mit Rechenprogrammen erfolgen [Ninokata (1990)]. Im Kernforschungszentrum Karlsruhe kommt dabei der Computercode FLUTAN zum Einsatz [Borgwaldt (1990)]. Zwar sind die exakten Gleichungen zur Beschreibung ganz allgemeiner turbulenter Auftriebsströmungen bekannt, jedoch für praktische Probleme dieser Größenordnung zur Zeit und wahrscheinlich auch in nächster Zukunft nicht zu lösen. Es kommen deshalb in Rechenprogrammen wie FLUTAN nur Näherungsmethoden in Frage, die auf einer statistischen Betrachtungsweise der Turbulenz beruhen. Dabei werden alle physikalisch abhängigen Variablen des betrachteten Problems in einen zeitlichen Mittelwert und eine Fluktuation um diesen Mittelwert aufgespalten, mit dem Ziel, die Gleichungen für die mittleren Größen zu berechnen. Diese enthalten jedoch, verursacht durch die zeitliche Filterung, unbekannte Korrelationen verschiedener Fluktuationsgrößen, die physikalisch den zusätzlichen Impuls- und Wärmetransport aufgrund der turbulenten Schwankungsbewegung darstellen. Während die numerische Lösung der gemittelten Gleichungen mit der heutigen leistungsstarken Rechnergeneration für viele praxisnahe Anwendungen möglich ist, besteht das Hauptproblem bei der Berechnung turbulenter Strömungen in der Erstellung geeigneter Näherungsansätze für den turbulenten Transport. Diese sogenannten statistischen Turbulenzmodelle sind in Rechenprogrammen wie FLUTAN bisher nur für gemischte und erzwungene Konvektion geeignet. Sie werden erweitert, um ihre Anwendung für freie Konvektion in verschiedenen Fluiden, vor allem jedoch Flüssigmetallen, zu ermöglichen [Hossain (1980), Lawrence (1989), Davidson (1990)]. Dazu ist es notwendig, statistische Turbulenzdaten für reine Auftriebsströmungen bereitzustellen und durch deren Analyse verbesserte statistische Turbulenzmodelle abzuleiten.

Die Bereitstellung statistischer Daten kann auf experimentelle Weise geschehen [Kek (1989), Kek & Müller (1993), Bremhorst & Krebs (1992), Knebel (1993), Knebel et al. (1993)]. Die experimentelle Untersuchung von Flüssigmetallnaturkonvektion gestaltet sich jedoch aufgrund der schlechten Handhabbarkeit und der starken Oxidationsneigung dieser Fluide als sehr schwierig. Bewährte Methoden der Strömungsmesstechnik zur Erfassung von Geschwindigkeiten und deren Fluktuationen mit Hilfe der Laser-Doppler- oder der Hitzdrahtanemometrie sind nicht oder kaum anwendbar. Aus diesem Grund ist ein wesentlicher Fortschritt bei der Beschaffung statistischer Daten der Turbulenz auf experimentellem Weg in absehbarer Zeit kaum zu erwarten und auch weiterhin eine Herausforderung.

Die bisher einzige Methode zur Bereitstellung von umfassenden statistischen Daten der Turbulenz bei Flüssigmetallnaturkonvektion bietet die numerische Simulation. Ihre Vorteile liegen hauptsächlich im Bereich ihrer großen Flexibilität bezüglich der Variation des Problems, der Konsistenz der Daten, der Datenhaltung sowie der Datenauswertung. Große Schwierigkeiten treten jedoch dann auf, wenn, wie bei der hier betrachteten Flüssigmetallna-

turkonvektion, die Anforderungen des Problems hinsichtlich der räumlichen Auflösung und der notwendigen Problemzeit zum Erreichen einer im statistischen Sinne stationären Lösung sehr hoch sind. Dann verhindern die fehlende Speicherkapazität und die zu geringe Rechenleistung der heutigen Rechnergeneration, selbst bei einfachsten Geometrien wie ebenen Kanälen, die Lösung der zur Beschreibung ganz allgemeiner turbulenter Auftriebsströmungen bekannten exakten Gleichungen. Der interessierende Strömungsbereich kann nicht mehr genügend fein aufgelöst und mit einem noch vertretbaren Zeitaufwand berechnet werden.

Ein Rechenprogramm zur numerischen Simulation laminarer und turbulenter Strömungen mit oder ohne Wärmeübertragung in einfachen Kanalgeometrien ist der TURBIT-Code [Schumann (1973), Grötzbach (1977, 1987), Wörner (1994)]. TURBIT basiert auf der Lösung der instationären, dreidimensionalen, inkompressiblen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Mit dem Code können sowohl direkte numerische Simulationen, bei denen alle relevanten Zeit- und Längenskalen des physikalischen Problems aufgelöst werden, als auch Grobstruktursimulationen, bei denen nur die großen Wirbelstrukturen direkt durch das Maschennetz aufgelöst werden, durchgeführt werden. Der Einfluß der kleinen, nicht durch das Maschennetz erfaßbaren Wirbelstrukturen wird bei Grobstruktursimulationen durch ein Feinstrukturmodell approximiert.

Direkte numerische Simulationen von Flüssigmetallnaturkonvektion mit dem Fluid Natrium zeigen die prinzipielle Machbarkeit, aber auch die Beschränkung dieser Methode auf niedrige Rayleigh-Zahlen. Ursache für die Beschränkung ist der große Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf bei dieser Art von Simulation, bei der alle räumlichen Strukturen und alle für den turbulenten Austausch wesentlichen physikalischen Transportprozesse durch das Maschennetz und das Zeitintegrationsverfahren aufgelöst werden müssen. Veröffentlichungen über den Verlauf einzelner Terme, die in den Transportgleichungen statistischer Turbulenzmodelle auftreten sowie über die Analysen der Konvektionsmechanismen bei Flüssigmetallnaturkonvektion stammen von Grötzbach & Wörner (1992, 1993a/b), Wörner (1994) und Wörner & Grötzbach (1993a/b/c). Diese Arbeiten beruhen auf der Auswertung von statistischen Daten aus direkten numerischen Simulationen.

Um statistische Daten der Turbulenz bei Strömungen mit mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen bereitzustellen, ist die Methode der Grobstruktursimulation gut geeignet, weil bei ihr die im Absatz zuvor genannten Schwierigkeiten nicht in diesem Ausmaß hervortreten. Hier werden die exakten Gleichungen zur Berechnung ganz allgemeiner turbulenter Auftriebsströmungen durch eine Glättungsoperation so verändert, daß nur die physikalische Information über die kleinen Skalen verloren geht. Die großen, von der Kanalgeometrie und vom Strömungstyp abhängigen Skalen variieren als Funktion von Ort und Zeit und können direkt simuliert werden. Die zeitabhängigen Gleichungen zur Beschreibung der Grobstruktur enthalten demnach ähnlich der statistischen Betrachtungsweise, verursacht durch die räumliche Filterung, unbekannte Korrelationen verschiedener subskaliger Fluktuationen, welche die Wirkung der nicht aufgelösten kleinen Skalen enthalten. Die Grundüberlegung dieser Vorgehensweise beruht auf experimentellen Untersuchungen. Während die großen Skalen für den turbulenten Transport verantwortlich sind und den wesentlichen Anteil an turbulenter kinetischer Energie besitzen, beinhalten die kleinen Skalen einen geringen, durch die sogenannte

Energiekaskade zugeführten Anteil an turbulenter kinetischer Energie, den sie dissipieren, d.h. von mechanischer in thermische Energie umwandeln. Eine geeignete Modellierung der unbekanntenen Feinstrukturkorrelationen muß demnach eine Dämpfung der Grobstrukturgrößen in den Erhaltungsgleichungen bewirken. Universelle Näherungsannahmen für die Feinstrukturkorrelationen sind in der Regel jedoch einfacher zu finden als statistische Turbulenzmodellierungsansätze, weil nur die Wirkung der kleinen Skalen betrachtet werden muß, die in den meisten Strömungen eine Tendenz zur Invarianz gegenüber Translationen und Rotationen des Koordinatensystems, d.h. zur lokalen Isotropie, haben. Außerdem verlieren die Feinstrukturmodelle im Gegensatz zu statistischen Turbulenzmodellen an Bedeutung, wenn das Maschennetz und die Filteroperation einen kleiner werdenden Skalenbereich umfaßt und die Grobstruktursimulation sich der direkten numerischen Simulation nähert.

Auftriebskräfte haben einerseits einen direkten, andererseits über die turbulenten kleinskaligen Fluktuationen einen indirekten Einfluß auf die turbulente Bewegung der großen Skalen. Während die Berücksichtigung des direkten Auftriebseinflusses auf die turbulente Bewegung der Grobstruktur aufgrund des bekannten Auftriebsgliedes in den gefilterten Erhaltungsgleichungen für den Impuls automatisch enthalten ist, entstehen in der Hauptsache Schwierigkeiten bei der Berücksichtigung von Auftriebseffekten in den Näherungsannahmen für die unbekanntenen Feinstrukturkorrelationen. Diese müssen in Abhängigkeit der Art der Modellierung ihren Niederschlag in den Koeffizienten und den charakteristischen Längen- und Geschwindigkeitsmaßstäben der Feinstrukturdissipation von turbulenter kinetischer Energie, der Feinstrukturspannungen und der Feinstrukturwärmeströme finden.

Die ersten und auch meisten Anwendungen zur Grobstruktursimulation von Auftriebsströmungen und der dazugehörigen Feinstrukturmodellierung entstammen dem Bereich der Meteorologie, weil dort schon seit langer Zeit aussagekräftige Methoden für eine zuverlässige Vorhersage der Wetterentwicklung und den atmosphärischen Transport physikalischer Größen gesucht werden. Die erste numerische Simulation mit dieser Methode überhaupt ist die von Smagorinsky (1963). Das von ihm (1958) vorgeschlagene und von Lilly (1962) für Auftriebsströmungen modifizierte Modell löst keine Transportgleichungen für subskalige Transportvorgänge, sondern basiert auf Gradientendiffusionsansätzen und entspricht rein formal einem Prandtl'schen Mischungswegmodell, bei dem die unbekanntenen Feinstruktur-turbulenzkorrelationen direkt in Beziehung zu den Grobstrukturgrößen gesetzt werden. Dieser Modellansatz stellt bis heute die Grundlage der meisten Grobstruktursimulationen dar. Verwendet wird er unter anderem auch von Deardorff (1970a/b/c, 1971, 1972a), Mason (1989), Mason & Callen (1986) und Mason & Thomson (1992) zur Untersuchung der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht und von Eidson (1982, 1985) zur Untersuchung der turbulenten Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft. Sehr schnell wurden jedoch auch komplexere Modelle, die eine, zwei oder mehrere Transportgleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Feinstruktur-turbulenzkorrelationen lösen, mit dem Anspruch entwickelt, Auftriebseinflüsse so allgemeingültig und realistisch wie möglich zu berücksichtigen. Der Vorteil dieser Näherungsmethoden liegt darin, daß die exakten Transportgleichungen als Konsequenz ihrer Herleitung aus den bekannten Erhaltungsgleichungen für Impuls und Energie automatisch Auftriebsglieder enthalten, die zur Beschreibung von Auftriebseinflüssen besonders gut geeignet sind. Allerdings ist das Problem jetzt darauf verlagert, geeignete Schließungsannahmen für die in den

exakten Transportgleichungen enthaltenen weiteren unbekanntem Feinstrukturkorrelationen zweiter und dritter Ordnung zu finden, auf deren Modellierung es hinsichtlich der Leistungsfähigkeit des Verfahrens ankommt. Ein Nachteil dieser Methoden ist der enorme numerische Aufwand, weil neben den fünf Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, je nach Komplexität des Modells, zusätzliche Differentialgleichungen gelöst werden müssen. Veröffentlichungen und Arbeiten zu den komplexeren Modellen kommen wiederum fast ausschließlich dem Gebiet der Meteorologie, behandeln in erster Linie Untersuchungen der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht und stammen von Deardorff (1973, 1980), Mellor & Yamada (1974, 1982), Schemm & Lipps (1976), Moeng (1984), Wyngaard & Brost (1984), Nieuwstadt et al. (1985), Nieuwstadt & Brost (1986), Nieuwstadt et al. (1991), Moeng & Wyngaard (1988), Moeng & Rotunno (1990), Schmidt (1988), Sykes & Henn (1989), Schmidt & Schumann (1989), Nieuwstadt (1990), Angirasa & Nieuwstadt (1991) und Schumann (1991).

Die direkte Auflösung der thermischen und bei Flüssigmetallen vor allem der sehr viel dünneren hydrodynamischen Grenzschicht erfordert ein sehr feines Gitter in der Nähe fester Wände, weil dort die Gradienten bestimmter physikalischer Größen wie der Temperatur oder der Geschwindigkeit sehr groß sind. Die Folgen sind hohe Speicher- und Rechenzeitanforderungen, bedingt durch die große Anzahl an benötigten Gitterpunkten und die durch das Stabilitätskriterium des Zeitintegrationsverfahrens hervorgerufene starke Zeitschrittrestriktion. Diese Faktoren bestimmen ganz wesentlich die Wirtschaftlichkeit der Rechenmethode. Problematisch ist auch, daß die Grundgleichungen in den Grenzschichten gelöst werden, in denen ein auf der Annahme isotroper Turbulenz basierendes Feinstrukturmodell aufgrund der Wandeinflüsse seine strenge Gültigkeit verliert und zusätzliche Modellanpassungen benötigt, die in diesem Bereich wirksam werden. Eine Möglichkeit, diese Restriktionen und Schwierigkeiten zu umgehen, ist der Einsatz von Wandgesetzen, die die nichtlinearen Änderungen der physikalischen Größen in der Nähe fester Berandungen adäquat beschreiben und damit gröbere Wandmaschen zulassen. Die Grundgleichungen werden dann nicht mehr bis unmittelbar an die Wand gelöst, sondern nur bis zu einem Punkt im Gültigkeitsbereich des universellen Wandgesetzes.

Probleme treten auf, weil bisher kaum universelle Funktionen zur Beschreibung der Temperatur- und vor allem der Geschwindigkeitsprofile in einer turbulenten wandnahen Schicht für reine Naturkonvektion existieren. Die für die Grobstruktursimulation von erzwungener Konvektion üblicherweise eingesetzten logarithmischen Wandgesetze der Temperatur und der Geschwindigkeit [Schumann (1973), Grötzbach (1977), Piomelli et al. (1989)] beschreiben die Temperatur- und die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe für die meisten Grenzschichtströmungen mit ausreichender Genauigkeit. Sie sind aber für reine Naturkonvektion nicht anwendbar, weil durch das Fehlen einer mittleren Geschwindigkeit im Mittel auch alle Schubspannungen verschwinden. Auch die für geophysikalische Grenzschichten üblicherweise verwendete Monin-Obuchow-Theorie [Monin & Obuchow (1954)]; die für gemischte Konvektion universelle Funktionen der Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile ableitet, ist aus dem eben genannten Grund kaum anwendbar. Im Verschwinden der Schubspannungsgeschwindigkeit erkennt Businger (1973) ein Charakteristikum freier Konvektion, argumentiert jedoch, daß in Wandnähe, verursacht durch großräumige Wirbel, trotzdem noch wesentliche

horizontale Bewegungen existieren. Daraus schließt er, daß die Konvektion lokale, stationäre Geschwindigkeitsprofile in Wandnähe erzeugt, die aber einen viel kleineren Zeitmaßstab als den Konvektionszeitmaßstab haben. In diesem Fall kann eine lokale Schubspannungsgeschwindigkeit definiert werden. Im Falle einer verschwindenden mittleren Geschwindigkeit schlägt Deardorff (1972b) vor, den RMS-Wert der horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen zu verwenden, um eine Schubspannungsgeschwindigkeit für die Anwendung der Monin-Obuchow-Theorie zu bestimmen. Arbeiten dazu stammen außerdem von Schumann (1988), Schmidt (1988) und Schmidt & Schumann (1989), die ein Modell zur Berechnung der lokalen Schubspannungsgeschwindigkeit in der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht mittels integrierter Fluß-Profil-Beziehungen [Paulson (1970), Dyer (1974), Holtslag & van Ulden (1983)] verwenden, um die Anwendung der Monin-Obuchow-Theorie zu ermöglichen. Universelle Temperaturwandgesetze für reine Naturkonvektion an einer horizontalen Platte beruhen zumeist auf Aussagen über den mittleren Temperaturgradienten in Form von Potenzgesetzen, die einerseits vom Wandabstand und andererseits vom Fluid abhängen. Veröffentlichungen aus diesem Bereich stammen von Monin & Obuchow (1954), Malkus (1954), Priestley (1955), Townsend (1959), Kraichnan (1962), Goldstein & Chu (1969), Chu & Goldstein (1973), Angirasa & Nieuwstadt (1992) und Chung et al. (1992a).

Der Nachteil all dieser Modelle und Methoden für die Grobstruktursimulation liegt im wesentlichen darin, daß die kleinskaligen, nicht durch das Maschennetz aufgelösten Wirbelstrukturen statistisch nicht mehr analysiert werden können und die Simulation von Modellparametern abhängig ist. Im Bereich fester Berandungen treten bei der Verwendung von Wandfunktionen weitere Modellparameter hinzu und die für die Dynamik der Turbulenz wichtigen Grenzschichten können statistisch ebenfalls nicht mehr analysiert werden. Das ist jedoch derzeit die einzige Möglichkeit, um zu höheren Rayleigh-Zahlen zu gelangen und damit zumindest Einblicke in die großräumige, zeitabhängige, dreidimensionale Strömungsbewegung und Turbulenzstruktur zu erhalten.

### **1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise**

Das grundsätzliche Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bereitstellung statistischer Daten der Turbulenz von Auftriebsströmungen in Flüssigmetallen bei mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen, um durch deren Analyse räumliche und in statistischen Turbulenzmodellen vorkommende zeitliche Korrelationen auszuwerten. Insbesondere sind dabei die turbulenten Korrelationen höherer Ordnung von Interesse, die Druckschwankungen und Schwankungen der Wirbelstärke beinhalten und damit kaum experimentell bestimmt werden können. Wie die Diskussion in Kapitel 1.2 gezeigt hat, bietet die Methode der Grobstruktursimulation eine prinzipielle Möglichkeit, das grundlegende Verständnis über turbulente Strömungen, wie es weder durch eine statistische noch durch eine experimentelle Vorgehensweise erreicht werden kann, zu erweitern. In diesem Zusammenhang ist der Inhalt dieser Arbeit beschränkt auf die Erforschung von freier Konvektion in ebenen Kanälen, bei denen die Dichteunterschiede im Fluid ausschließlich durch Temperaturunterschiede hervorgerufen werden, die entweder eine Folge der äußeren thermischen Beheizung oder Kühlung der Außenwände oder der inneren Wärmefreisetzung sind.

Neben der Erarbeitung von theoretischen physikalischen und mathematischen Voraussetzungen, Grundlagen und Konzepten für die numerische Simulation turbulenter Naturkonvektion bei mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen sind die Erweiterung und Neuentwicklung von Feinstrukturmodellen und Randbedingungen für Grobstruktursimulationen mit dem Rechenprogramm TURBIT ebenso wie die Bereitstellung neuer Auswerteprogramme zur statistischen Analyse wichtige Schwerpunkte dieser Arbeit. Der Aufbau der vorliegenden Dokumentation orientiert sich an den folgenden Teilzielen, die zur Lösung der gestellten Aufgabe formuliert werden können:

- Ermittlung der Anforderungen und Erweiterung der Impuls- und Wärmefeinstrukturmodelle, um die Wirkung von Auftriebseffekten in der Feinstruktur zu berücksichtigen.
- Formulierung und Entwicklung neuer Randbedingungen und Wandgesetze für die Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten an der Wand unter Berücksichtigung physikalischer und numerischer Erfordernisse bei der Grobstruktursimulation von Naturkonvektion.
- Verifikation und Bewertung der neuen Methoden und Modelle durch den Vergleich der Ergebnisse mit Experimenten und direkten numerischen Simulationen. Diskussion möglicher Unterschiede und eventueller Modellverbesserungen.
- Durchführung von Grobstruktursimulationen der zeitabhängigen, dreidimensionalen, großskaligen Turbulenzbewegungen und Erstellung einer Datenbasis für Flüssigmetallnaturkonvektion bei mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen.
- Analyse von zeitlichen und räumlichen Informationen der berechneten Turbulenzstruktur.
- Entwicklung von Auswertemodulen zur Analyse und Gegenüberstellung von exakten und modellierten Termen aus den Transportgleichungen statistischer Turbulenzmodelle.
- Validierung von Koeffizienten existierender statistischer Turbulenzmodelle für auftriebsinduzierte Konvektion.

## 2. Theorie

### 2.1 Gleichungen

Die Grundgleichungen zur Beschreibung instationärer, inkompressibler, reibungsbehafteter Strömungen mit Wärmetransport sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, d.h. die Kontinuitätsgleichung, die auf Navier (1822) und Stokes (1845) zurückgehenden Gleichungen und die Wärmetransportgleichung [Schlichting (1958), Rotta (1972)].

Die Gleichungen gelten, wenn das Fluid als Kontinuum beschreibbar ist. Diese Voraussetzung wird von turbulenten Strömungen erfüllt, weil die kleinsten charakteristischen turbulenten Längenmaßstäbe immer weit größer als charakteristische molekulare Längenmaßstäbe sind [Tennekes & Lumley (1972)]. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Newtonsche Fluide betrachtet, bei denen ein lineares isotropes Stoffgesetz wie der Stokesche Ansatz [Stokes (1845)] für die Schubspannungen als Funktion der Geschwindigkeitsableitungen Verwendung finden kann. Das Fluid soll homogen sein, mit der Folge, daß alle auftretenden Stoffwerte als konstant angenommen werden. Einzige Ausnahme ist die Dichte im Schwerkraftterm der Impulsgleichungen. Dort wird eine Beziehung mit einer linearen Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur eingeführt, deren Gültigkeitsbereich bei den hier untersuchten turbulenten Strömungen mit den Fluiden Wasser, Luft und flüssigem Natrium nicht überschritten wird [Gray & Giorgini (1976), Sugiyama et al. (1991)]. Eine weitere vereinfachende Annahme ist, daß die Dissipation von kinetischer Energie, d.h. die Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme durch Reibung, als vernachlässigbar kleine Wärmequelle angesehen werden kann, weil diese erfahrungsgemäß kaum zur Temperaturerhöhung beiträgt. Dieser Quellterm muß demzufolge in der Energieerhaltungsgleichung nicht berücksichtigt werden. Nach Einführung aller Voraussetzungen und Annahmen ist das Ergebnis ein Satz exakter Erhaltungsgleichungen zur Beschreibung von Auftriebsströmungen, die aufgrund der von Boussinesq verwendeten Approximation als Boussinesq-Gleichungen bezeichnet werden [Boussinesq (1903)].

Bei strömungsmechanischen Untersuchungen ist es üblich, die Grundgleichungen zu entdimensionalisieren und dimensionslose Kennzahlen zu ermitteln, um die physikalische Ähnlichkeit geometrisch ähnlicher Strom- und Temperaturfelder, z.B. für Vergleiche mit Experimenten, sicherzustellen. Der wichtigste Vorteil der Normierung ist, daß die verschiedenen Transportterme der Erhaltungsgleichungen von derselben Größenordnung sind oder deren Größenordnung von den wenigen dimensionslosen Kennzahlen abhängt. Daraus folgt, daß allein die Kenntnis über die Größe der Kennzahlen eine Abschätzung darüber ermöglicht, welche Impuls- und Wärmetransportmechanismen eine Strömung signifikant beeinflussen. Die genaue Vorgehensweise bei der Entdimensionalisierung der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie sowie die Ermittlung der Ähnlichkeitskennzahlen mit Hilfe der Methode der Differentialgleichungen [Zierp (1982b)] sind in Anhang A beschrieben. In der Forderung, alle auftretenden unabhängigen und abhängigen Variablen durch die Wahl geeigneter Bezugsgrößen dimensionslos zu machen, liegt eine gewisse Problematik. In der Regel ist es das Ziel, die charakteristischen Bezugsgrößen so zu wählen, daß die dimensionslosen Kennzahlen, die nach dem Durchmultiplizieren der Differentialgleichungen entstehen, den

betrachteten Vorgang physikalisch sinnvoll beschreiben. Dabei können auch nicht alle Bezugsgrößen frei gewählt werden, sondern einige folgen aus der Wahl anderer.

Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen von freier Konvektion in einer horizontal unendlich ausgedehnten, zähen, wärmeleitenden, zwischen zwei ebenen Wänden eingeschlossenen Fluidschicht sind die Kanalgeometrie und alle eingehenden Einflußgrößen in Abbildung 2.1 dargestellt. Die Dichteunterschiede werden dabei ausschließlich durch Temperaturunterschiede hervorgerufen, die entweder eine Folge der äußeren thermischen Beheizung oder Kühlung der Außenwände oder der inneren Wärmefreisetzung sind. Diese beiden Probleme werden in der Literatur auch als Rayleigh-Bénard-Konvektion [Bénard (1900), Rayleigh (1916)] und als Fluidschicht mit interner Wärmequelle [Jahn (1975)] bezeichnet.

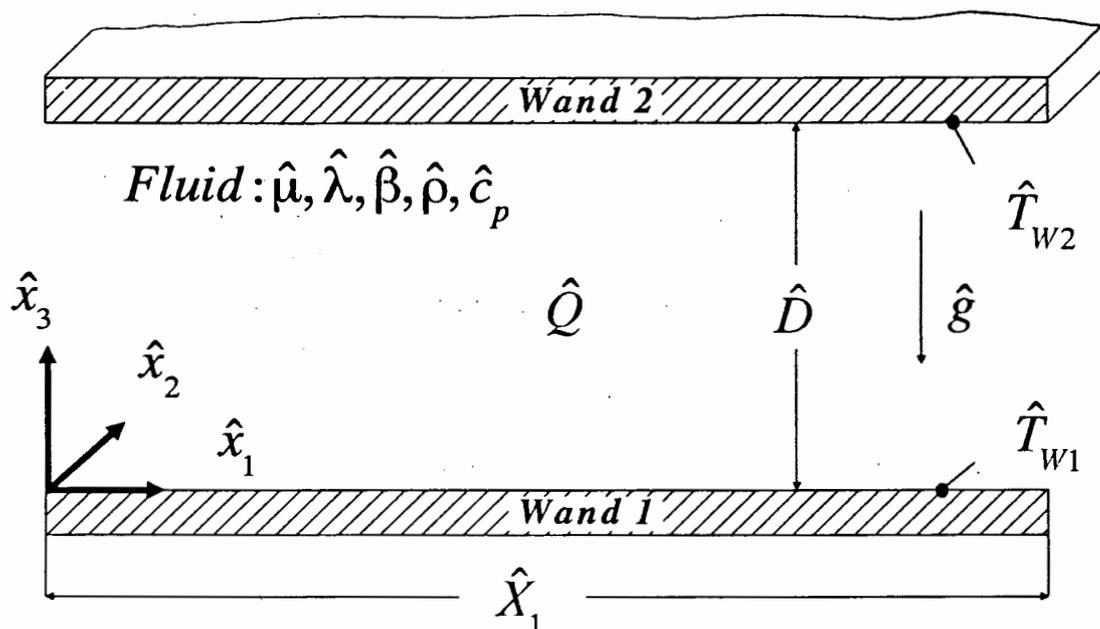


Abb. 2.1: Kanalgeometrie und Einflußgrößen.

Die geeignete Bezugsgröße für alle auftretenden Variablen mit der Dimension einer Länge, ist bei Kanalströmungen dieser Art der Plattenabstand  $\hat{D}$ . Für die Normierung der Temperatur wird als charakteristische Bezugsgröße die maximal im Kanal auftretende Temperaturdifferenz  $\Delta\hat{T}_{\max}$  gewählt. Bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion entspricht das der Temperaturdifferenz zwischen unterer und oberer Wand

$$\Delta\hat{T}_{\max} = \hat{T}_{W1} - \hat{T}_{W2}, \quad (2.1a)$$

bei der Fluidschicht mit interner Wärmequelle im Fall identischer Wandtemperaturen der Temperaturdifferenz zwischen der Schicht mit der höchsten Temperatur und der Wandtemperatur

$$\Delta\hat{T}_{\max} = \hat{T}_{\max} - \hat{T}_W. \quad (2.1b)$$

Aufgrund der Forderung, daß die in den Impulsgleichungen auftretenden Trägheitsterme, der Druckterm und der Auftriebsterm dieselbe Größenordnung haben sollen, folgen die Bezugsgrößen für die Zeit, den Druck und die Geschwindigkeiten:

$$\hat{t}_0 = \frac{\hat{D}}{\hat{u}_0} \quad (2.1c)$$

$$\hat{p}_0 = \hat{\rho}_0 \hat{u}_0^2 \quad (2.1d)$$

$$\hat{u}_0 = (\hat{g} \hat{\beta} \Delta \hat{T}_{max} \hat{D})^{1/2} \quad (2.1e)$$

Die physikalische Bedeutung der Geschwindigkeitsskala ist die der Fallgeschwindigkeit eines Fluidballens in einer nicht zähen, nicht wärmeleitenden, aber temperaturgeschichteten Flüssigkeitsschicht. Sie kann auch aus einer mechanischen Gleichgewichtsbetrachtung abgeleitet werden, die fordert, daß die gesamte potentielle Energie des Fluidteilchens in kinetische Energie umgesetzt wird. Demzufolge ist die physikalische Bedeutung der Zeitskala die dazu benötigte Fallzeit. Sie kann auch als Brunt-Väisälä-Zeitskala interpretiert werden, die die Periodendauer der vertikalen Oszillationen eines Fluidballens in einer mit einem positiven Temperaturgradienten stabil geschichteten, reibungsfreien und nicht wärmeleitenden Flüssigkeitsschicht angibt. In einer instabil geschichteten Flüssigkeitsschicht sind solche als Gravitationswellen in einem Schwerfeld bezeichneten Schwingungen nicht stabil, sondern brechen auf und erzeugen Turbulenz. In diesem Fall kann  $\hat{t}_0$  als eine charakteristische Auftriebszeitskala verstanden werden [Tennekes & Lumley (1972)].

Damit folgen die dimensionslosen Erhaltungsgleichungen zur mathematischen Beschreibung freier Konvektion in ebenen Kanälen:

Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2a)$$

Impulserhaltung (Navier-Stokes-Gleichungen)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \delta_{i3}(T - T_{p_0}) \quad (2.2b)$$

Energieerhaltung (Wärmetransportgleichung)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(T u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\} + \frac{Da}{\sqrt{Gr} Pr} \quad (2.2c)$$

Es gilt die Einsteinsche Summationskonvention, d.h. über paarweise auftretende Indizes wird von eins bis drei summiert. Der letzte Term in Gleichung (2.2c) ist ein Maß für die Tempera-

turerhöhung im Fluid infolge der inneren Wärmefreisetzung einer räumlich homogen verteilten und zeitlich konstanten, volumetrischen Wärmequelle. Für Rayleigh-Bénard-Konvektion verschwindet dieser Quellterm. Die Definition und die physikalische Bedeutung der in den Erhaltungsgleichungen auftretenden charakteristischen Kennzahlen wird in Kapitel 4.1.1 und Anhang A erläutert. Zu beachten ist, daß die Impulsgleichungen und die Energiegleichung aus numerischen Gründen in konservativer Form verwendet werden, um zu erreichen, daß ihr Integral über das gesamte betrachtete Volumen verschwindet. Es läßt sich zeigen, daß die konservative Form dieser Gleichungen bei der durchzuführenden Diskretisierung die Erhaltung von Impuls und Energie auch bei nichtverschwindenden Maschenweiten lokal in einem Volumenelement gewährleistet, wenn zentrale Differenzen verwendet werden [Schumann (1973)]. Die fünf Gleichungen bilden ein geschlossenes System partieller, nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den vier unabhängigen Variablen  $\underline{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$  und  $t$  sowie den fünf abhängigen Variablen  $\underline{u}=(u_1, u_2, u_3)^T$ ,  $p$  und  $T$ . Es ist gekoppelt, weil der Schwerkraftterm in Gleichung (2.2b) die Temperatur und der Konvektionsterm in Gleichung (2.2c) verschiedene Geschwindigkeitskomponenten enthält. Das Gleichungssystem ist einer für turbulente Strömungen allgemeinen, analytischen, exakten Lösung nicht zugänglich.

Eine weitere wichtige Gleichung, die im Feinstrukturmodell eine große Bedeutung hat, ist die Erhaltungsgleichung der kinetischen Energie. Die kinetische Energie ist definiert als

$$E = \frac{1}{2} u_i u_i \quad (2.3)$$

und eine Gleichung für sie kann durch skalare Multiplikation der Erhaltungsgleichungen des Impulses (2.2b) mit dem Geschwindigkeitsvektor  $u_i$  abgeleitet werden. Die Erhaltungsgleichung der kinetischen Energie in konservativer Schreibweise lautet:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(E u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(p u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial E}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{i3}(T - T_{p0}) u_i \quad (2.4)$$

Die einzelnen Terme auf der linken Seite dieser skalaren Gleichung haben die physikalische Bedeutung der lokalen zeitlichen Änderung und des konvektiven Transportes von kinetischer Energie. Die Terme auf der rechten Seite können als diffusiver Transport durch Druckkräfte, als molekularer diffusiver Transport, als molekulare Vernichtung durch Reibungskräfte und als Produktion/Vernichtung durch Auftriebskräfte identifiziert werden. Der molekulare Vernichtungsterm in dieser Gleichung wird auch als Dissipation  $\epsilon$  bezeichnet und es gilt:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.5)$$

Dieser Zusammenhang verdeutlicht, daß die Umwandlung von mechanischer Energie pro Zeit- und Volumeneinheit durch innere Reibung in Wärme ein irreversibler Mechanismus ist. Die Dissipation  $\epsilon$  kann gemäß Gleichung (2.5) niemals negativ werden.

## 2.2 Simulationsmethode

In turbulenten Strömungen treten starke und unregelmäßige Schwankungen der physikalisch abhängigen Variablen auf. Um ein turbulentes Geschwindigkeits- oder Temperaturfeld zu berechnen, ist die Auflösung aller physikalisch relevanter Längen- und Zeitmaßstäbe durch das der numerischen Simulation zugrundeliegende, räumliche und zeitliche Diskretisierungsverfahren erforderlich. Für die räumliche Diskretisierung ist das gleichbedeutend mit der Auflösung des gesamten Spektrums der auftretenden Wirbel durch das Maschennetz, d.h. die Auflösung der größten, energiereichsten Wirbel bis hin zu den kleinsten Wirbeln im dissipativen Bereich, die ihre mechanische Energie durch Reibungskräfte in Wärme überführen.

Ein charakteristisches Maß für die größten auftretenden Wirbelstrukturen ist die makroskopische Wellenlänge  $\hat{\lambda}$ . Sie ist von der Geometrie des Problems abhängig. Sowohl die kinetische turbulente Energie als auch der Betrag der letztlich dissipierten Energie werden durch Wirbel dieser Größenordnung bestimmt, weil nur soviel Energie dissipiert werden kann, wie über den Kaskadenprozeß von den großen an die kleinen Wirbel übertragen wird. Ein charakteristisches Maß für diese kleinsten, dissipativen Wirbel ist im Geschwindigkeitsfeld die Kolmogorov-Länge  $\hat{\eta}$  und im Temperaturfeld analog dazu  $\hat{\eta}_T$  [Kolmogorov (1941a/b)]:

$$\hat{\eta} = \left( \frac{\hat{v}^3}{\hat{\epsilon}} \right)^{1/4} \quad (2.6a)$$

$$\hat{\eta}_T = \left( \frac{\hat{a}^3}{\hat{\epsilon}} \right)^{1/4} \quad (2.6b)$$

Aussagen über diese, in einem turbulenten Geschwindigkeits- oder Temperaturfeld auftretenden, charakteristischen Längenmaßstäbe liefern deren Energiespektren. Ein qualitativer Verlauf der Energiespektren der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen  $\hat{E}(\hat{k})$  und der turbulenten Temperaturfluktuationen  $\hat{E}_T(\hat{k})$  in Abhängigkeit von der Wellenzahl  $\hat{k} = 2\pi/\hat{\lambda}$  ist für mittlere und kleine Prandtl-Zahlen in Abbildung 2.2 dargestellt.

Wird bei der räumlichen Diskretisierung für die Gitterweite  $\hat{h}$  die Forderung

$$2\hat{h} < \min(\hat{\eta}, \hat{\eta}_T) \quad (2.7)$$

erfüllt, d.h. werden die kleinsten auftretenden Wirbel mit mindestens zwei Maschen aufgelöst, so werden alle räumlichen Strukturen im Geschwindigkeits- und im Temperaturfeld durch das Maschennetz erfaßt. Dies führt zur Methode der **direkten numerischen Simulation**. Das physikalische Problem wird vollständig durch das Gleichungssystem (2.11a-c) beschrieben und es ist keine darüber hinausgehende empirische Modellierung erforderlich. Die Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  in den Gleichungen (2.12a,b) sind vernachlässigbar.

Wie in Abbildung 2.2 angedeutet, sind in Fluiden mit mittleren Prandtl-Zahlen die kleinsten Strukturen im Geschwindigkeits- und im Temperaturfeld von etwa gleicher Größe. Die Energiespektren verlaufen ähnlich. In Fluiden mit kleinen Prandtl-Zahlen deuten die Zusam-

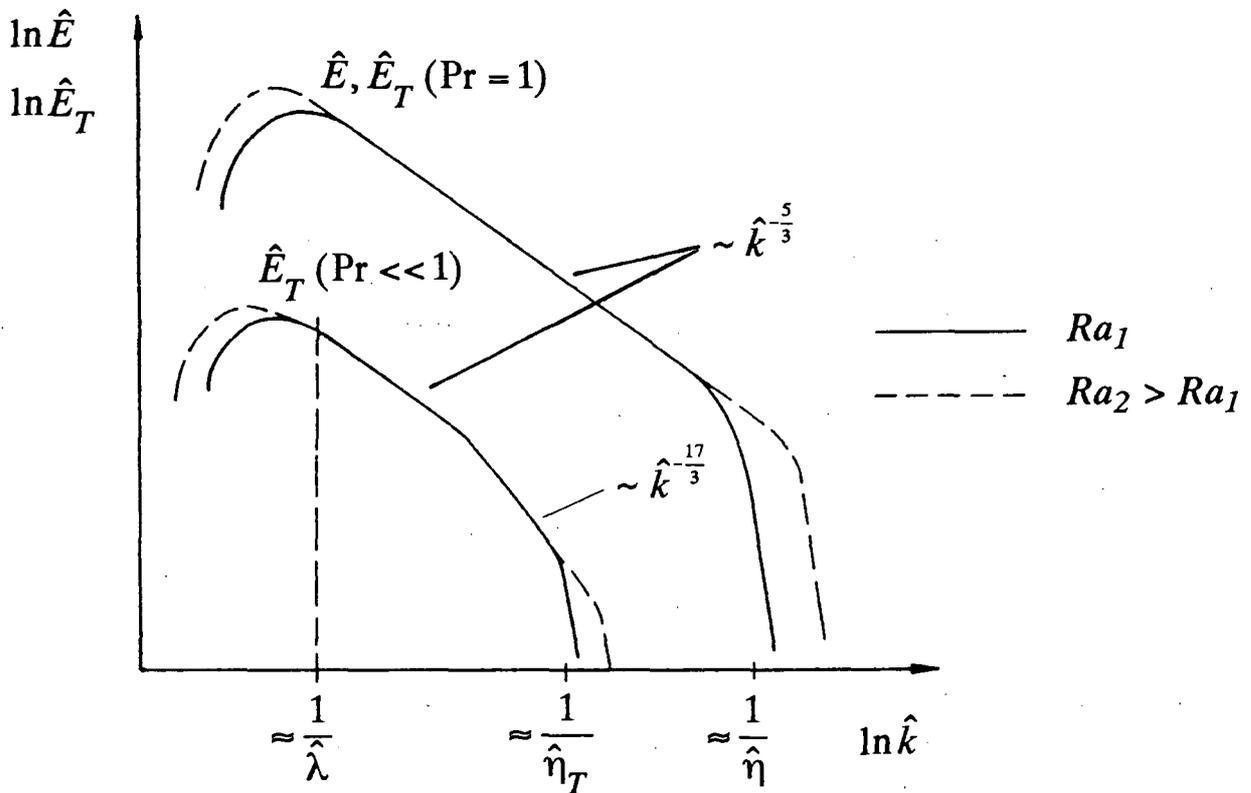


Abb. 2.2: Qualitativer Verlauf der Spektren der turbulenten kinetischen Energie und der Temperaturschwankungsquadrate aufgetragen über der Wellenzahl für mittlere und kleine Prandtl-Zahlen. Der Einfluß einer wachsenden Rayleigh-Zahl auf die Spektren bei Rayleigh-Bénard-Konvektion ist angedeutet.

menhänge (2.6a,b) schon an, daß die dissipativen Strukturen im Geschwindigkeitsfeld sehr viel kleiner als die im Temperaturfeld sind. Die physikalische Ursache hierfür ist die hohe Temperaturleitfähigkeit dieser Fluide, die eine weite räumliche Kopplung und eine Dämpfung der turbulenten Temperaturfluktuationen bewirkt. Im Geschwindigkeitsfeld dagegen existieren neben den relativ großräumigen Strukturen auch sehr kleine Skalen, die ihre Ursache in der geringen kinematischen Viskosität dieser Medien haben. Dadurch entstehen dünne Scherschichten, die sich im Spektrum der turbulenten kinetischen Energie durch eine kleine Kolmogorov-Länge  $\hat{\eta}$  äußern. Wird bei der räumlichen Diskretisierung die Gitterweite  $\hat{h}$  so gewählt, daß

$$\hat{\eta} \leq 2\hat{h} < \hat{\eta}_T \quad (2.8)$$

ist, so werden noch alle räumlichen Strukturen des Temperaturfeldes, nicht jedoch die des Geschwindigkeitsfeldes durch das Maschennetz erfaßt. Dies führt zur Methode der **gemischten Simulation**, die für Fluide mit sehr kleinen Prandtl-Zahlen eine Kombination aus direkter numerischer Simulation des Temperaturfeldes und Grobstruktursimulation des Geschwindigkeitsfeldes darstellt. Die Feinstrukturkorrelationen  $\overline{u'_i u'_j}$  in Gleichung (2.12a) repräsentieren den nicht aufgelösten Anteil des kinetischen turbulenten Energiespektrums in Abbildung 2.2, deren physikalischer Einfluß modelliert werden muß, während die Feinstrukturanteile  $\overline{T' u'_j}$  in Gleichung (2.12b) nach wie vor vernachlässigbar sind.

Wird bei der räumlichen Diskretisierung die Gitterweite  $\hat{h}$  so gewählt, daß

$$2 \hat{h} \geq \max(\hat{\eta}, \hat{\eta}_T) \quad (2.9)$$

ist, dann werden auch die kleinsten räumlichen Strukturen des Temperaturfeldes nicht mehr durch das Maschennetz erfaßt. Dies führt zur Methode der **Grobstruktursimulation** des gesamten physikalischen Problems. Die Feinstrukturkorrelationen  $\overline{T'u_j'}$  in Gleichung (2.12b) repräsentieren in diesem Fall den abgeschnittenen Teil des Spektrums des turbulenten Wärmestromes, dessen physikalischer Einfluß durch Modelle approximiert werden muß.

Während bei dieser Simulationsmethode zumindest die grobe, zeitabhängige, dreidimensionale Turbulenzstruktur durch das Maschennetz aufgelöst wird, erfolgt bei der **statistischen Simulation** eine zeitliche Mittelung der exakten Grundgleichungen (2.2a-c) über den gesamten Wellenzahlbereich. Das Ergebnis sind die Reynoldsschen Gleichungen [Reynolds (1894)]. Die zeitliche Mittelung führt zu deutlich geringeren Gradienten der physikalisch abhängigen Variablen, d.h. zu einer Glättung der turbulenten Felder. Die durch die Zeitmittelung der nichtlinearen konvektiven Terme entstehenden Korrelationen  $\langle u_i''u_j'' \rangle$  und  $\langle T''u_j'' \rangle$  werden auch als Reynoldsspannungen und -wärmeströme bezeichnet und haben große Ähnlichkeit mit den bei der Grobstruktursimulation auftretenden Feinstrukturspannungen und -wärmeströmen, jedoch eine andere physikalische Bedeutung. Sie repräsentieren im Gegensatz zu den Feinstrukturanteilen nicht nur die Wirkung der kleinen, sondern aller im Bereich der turbulenten Energiespektren in Abbildung 2.2 auftretenden Wirbelstrukturen. Deren physikalischer Einfluß muß durch möglichst universelle statistische Modelle erfaßt werden.

In dieser Arbeit werden Ergebnisse vorgestellt, die sowohl mit der Methode der direkten numerischen Simulation als auch mit den Methoden der gemischten Simulation und der Grobstruktursimulation berechnet werden. Eine Abschätzung, wie hoch die maximal zu erreichenden Rayleigh-Zahlen bei der numerischen Simulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit flüssigem Natrium mit den verschiedenen Methoden bezüglich der zur Verfügung stehenden Speicherkapazität und Rechenzeit sind, wird in Anhang B gegeben.

## 2.3 Räumliche Diskretisierung

Die Erhaltungsgleichungen (2.2a-c) bilden die Ausgangsbasis für eine numerische Simulation turbulenter Auftriebsströmungen. Zur Anwendung eines Differenzenverfahrens müssen diese partiellen Differentialgleichungen jedoch in Differenzgleichungen überführt werden. Das bedeutet, daß z.B. anstelle von  $\partial\Phi/\partial x_1$ , d.h. der unendlich kleinen Veränderung einer beliebigen abhängigen Variablen  $\Phi$  im Raum, eine endliche Differenz  $\Delta\Phi/\Delta x_1$  tritt. Entsprechend der von Schumann (1973, 1975) verwendeten Methode, werden dazu die Grundgleichungen durch formale Integration über kleine Volumenelemente gemittelt, d.h. es wird der folgende räumliche Mittelungsoperator auf alle Terme der Erhaltungsgleichungen angewandt:

$$\overline{\Phi}^v = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \Phi(x_1^*, x_2^*, x_3^*) dx_1^* dx_2^* dx_3^* \quad (2.10)$$

Bei diesem Operator kennzeichnen die Größen  $\Delta x_i$  die Gitterweiten und die Größen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  die Koordinaten der Volumenmittelpunkte in den drei Raumrichtungen  $x_i$ . Anschließend werden alle Volumenintegrale, die eine räumliche Ableitung erster Ordnung enthalten, durch partielle Integration unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes für räumliche Vektorfelder [Bronstein & Semendjajew (1987)], in Differenzen von Mittelwerten über die Randflächen der Volumenelemente transformiert. Demzufolge führt diese formale Integration zu Differenzen von Termen, in denen nur noch über zwei räumliche Richtungen zu integrieren ist, d.h. die Volumenmittelung  $\overline{\Phi}^v$  der betroffenen Terme führt zu Differenzen von Flächenmittelwerten  ${}^i\overline{\Phi}$ , die durch den Index  $i$  der Richtung der Flächennormalen gekennzeichnet werden. Diese Vorgehensweise ermöglicht in den meisten Fällen ohne zusätzliche Annahmen die Anwendung eines wie in Abbildung 2.3 dargestellten versetzten Gitters, in dem die vektoriellen Geschwindigkeitsvariablen  ${}^i\overline{u}_i$  den Orten  $x_i + 1/2\Delta x_i$  zugeordnet werden, während die skalaren Variablen wie der Druck  $\overline{p}^v$  und die Temperatur  $\overline{T}^v$  im Mittelpunkt der Volumenelemente an den Orten  $x_i$  definiert sind.

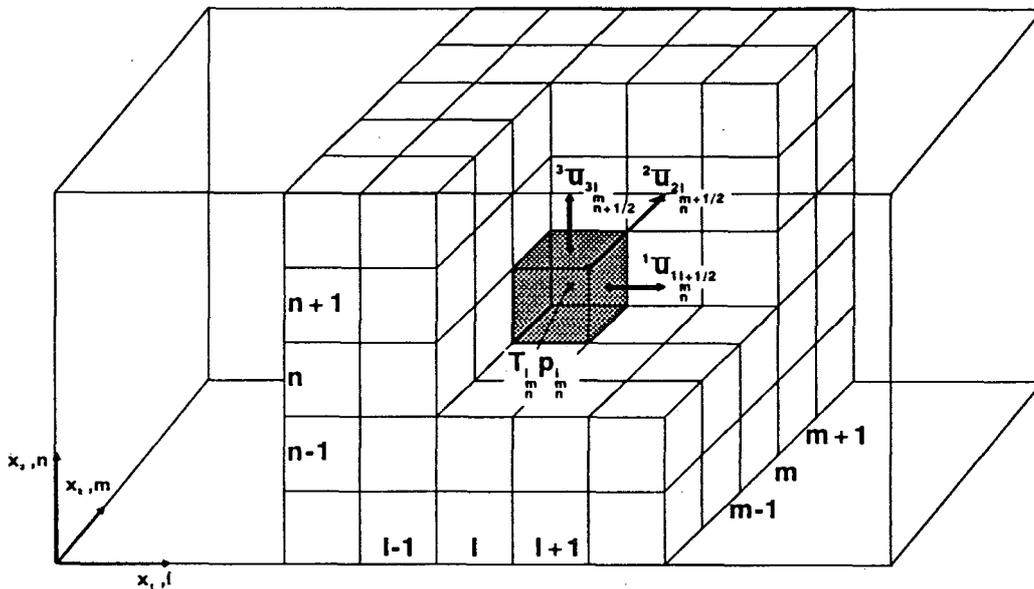


Abb. 2.3: Versetztes Gitter.

Das Ergebnis der Volumenintegration durch die Anwendung des Operators (2.10) auf die Erhaltungsgleichungen (2.2a-c) sind die räumlich diskretisierten Grundgleichungen:

Massenerhaltung

$$\overline{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)} = \delta_i \overline{u}_i = 0 \quad (2.11a)$$

## Impulserhaltung

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)} + \delta_j^j \overline{(u_i u_j)} = -\delta_i^i \overline{p} + \delta_j^j \left\{ \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \delta_{i3} (\overline{T} - T_{p_0}) \quad (2.11b)$$

## Energieerhaltung

$$\overline{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)} + \delta_j^j \overline{(T u_j)} = \delta_j^j \left\{ \frac{1}{\sqrt{Gr Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\} + \frac{Da}{\sqrt{Gr Pr}} \quad (2.11c)$$

Die Massenerhaltungsgleichung drückt aus, daß bei inkompressiblen Fluiden, d.h. bei verschwindender relativer Dichteänderung, der resultierende Massenstrom durch die Oberflächen eines Volumenelements verschwinden muß, d.h. es strömt gleichviel ein wie aus. Das Geschwindigkeitsfeld ist divergenz- und damit quellenfrei. Die Erhaltungsgleichung für den Impuls beschreibt die Tatsache, daß die lokale zeitliche Änderung des in einem Volumenelement befindlichen Impulses plus dem Impulsstrom durch die Oberfläche eines Volumenelements gleich den an den Oberflächen eines Volumenelements angreifenden Massen- (Gravitation) und Oberflächenkräften (Druck, Reibung) ist. Die Erhaltungsgleichung für die Energie beschreibt demzufolge, daß die lokale zeitliche Änderung der in einem Volumenelement befindlichen Energie plus dem Energiefluß durch dessen Oberflächen infolge der Massengeschwindigkeiten  $\overline{u}_i$  gleich den Leistungen der an den Oberflächen eines Volumenelements angreifenden Massen- und Oberflächenkräften plus dem Leistungsanteil der zu- oder abgeführten Wärme ist.

Die Massenerhaltungsgleichung (2.11a) ist exakt, entspricht formal dem Gaußschen Integral- und bedarf bei der Anwendung eines versetzten Gitters keiner weiteren Näherung, weil die exakte Gleichung (2.2a) ausschließlich räumliche Ableitungen erster Ordnung enthält.

In den volumengemittelten Erhaltungsgleichungen für Impuls (2.11b) und Energie (2.11c) können dagegen durch die Anwendung des Mittelungsoperators (2.10) nicht alle räumlich partiellen Differentiale in Differenzen umgewandelt werden, weil die Diffusionsterme in beiden Gleichungen räumliche Ableitungen zweiter Ordnung enthalten. Dadurch entstehen Flächenmittelwerte von Differentialquotienten, die durch Differenzenquotienten der diskreten Variablen approximiert werden. Weitere Approximationen müssen deshalb eingeführt werden, weil abhängige Variablen an Orten verlangt werden, an denen sie nicht definiert sind. Eine ausführliche Übersicht der verwendeten Approximationen des numerischen Differenzenverfahrens geben Schumann (1973), Grötzbach (1977) und Mauch (1991).

Schwierigkeiten bereitet die Mittelung der nichtlinearen konvektiven Terme, weil die Größen  $\overline{u_i u_j}$  sowie  $\overline{T u_j}$  nicht mittels der definierten Geschwindigkeitsvariablen  $\overline{u}_i$  und  $\overline{T}$  bestimmt werden können. Das Gleichungssystem ist nicht mehr geschlossen. Durch die Aufspaltung aller abhängigen physikalischen Variablen  $\Phi = \overline{\Phi} + \Phi'$  in einen Flächenmittelwert  $\overline{\Phi}$  und eine Schwankung um diesen Flächenmittelwert  $\Phi'$ , können die unbekannt konvektiven

Terme folgendermaßen umgeformt werden:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i' u_j'} \quad (2.12a)$$

$$\overline{T u_j} = \overline{T} \overline{u_j} + \overline{T' u_j'} \quad (2.12b)$$

Sie werden in einen berechenbaren Teil, der den konvektiven Transport der durch das Maschennetz aufgelösten Größen beschreibt, und einen unbekanntem Feinstrukturanteil, der den Transport von Impuls und Wärme durch die herausgefilterten Schwankungen innerhalb einer Mittelungsfläche beschreibt, aufgespalten. Die Feinstrukturanteile müssen modelliert werden, um das Gleichungssystem zu schließen und wieder lösbar zu machen (siehe Kapitel 3.1).

Bei den hier beschriebenen Differenzenverfahren sind Mittelung und Diskretisierungsmethode stark miteinander gekoppelt. Um diese Kopplung zu vermeiden, führt Leonard (1974) lineare und nichtlineare Mittelungsoperationen ein, mit deren Hilfe eine Entkopplung zwischen Filterung und numerischen Verfahren möglich ist, d.h. Filterweite und Gitterweite können unabhängig gewählt und aufeinander abgestimmt werden. Ein Vorteil dieser Methode ist, daß die Art des Filters frei wählbar ist. Allerdings ist ein gravierender Nachteil, daß bei der Mittelung der nichtlinearen konvektiven Terme je nach Wahl des Filters zusätzliche unbekannt Korrelationen zwischen aufgelösten und nicht aufgelösten Anteilen entstehen, die modelliert werden müssen. Ein Überblick über die verschiedenen Methoden ist zu finden bei Schmitt (1988), Aupoix (1989), Nieuwstadt (1990) und Germano (1992).

Ein Nachteil des hier beschriebenen räumlichen Diskretisierungsverfahrens ist die durch den Abbruchfehler zweiter Ordnung verursachte eingeschränkte Genauigkeit. Seine Hauptvorteile liegen im wesentlichen in der einfachen Umsetzbarkeit in ein Rechenprogramm sowie der relativ einfachen Formulierung der Randbedingungen bei der hier betrachteten ebenen Kanalgeometrie (siehe Kapitel 3.2). Eine Übersicht bezüglich der Vor- und Nachteile finiter Differenzenverfahren, im Vergleich zu alternativen numerischen Verfahren wie Spektralverfahren und finiter Elementeverfahren, gibt die Arbeit von Fasel (1979).

Wichtig für die Modellbildung der durch die räumliche Filterung der Grundgleichungen entstandenen unbekannt Korrelationen  $\overline{u_i' u_j'}$  und  $\overline{T' u_j'}$  ist eine weitere Differentialgleichung, die Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie der Schwankungsgeschwindigkeiten innerhalb eines Maschenvolumens. Die kinetische Feinstrukturenergie, d.h. der nicht durch das Maschennetz aufgelöste mechanische Energieanteil der Strömung, ist definiert als:

$${}^v E' = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2} \left( \overline{u_i'^2} - \overline{u_i^2} \right) \quad (2.13)$$

Eine Erhaltungsgleichung für sie folgt durch die zeitliche Ableitung von Definition (2.13) [Schumann (1973), Grötzbach (1977, 1987)]:

$$\overline{\left(\frac{\partial E'}{\partial t}\right)} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u_i^2}{\partial t}\right)} - \overline{u_i} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)} \quad (2.14)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.14) kann als die mit Operator (2.10) räumlich gemittelte Erhaltungsgleichung (2.4) der gesamten kinetischen Energie identifiziert werden. Der zweite Term ist durch die skalare Multiplikation des räumlich gemittelten Geschwindigkeitsvektors mit der diskretisierten Impulserhaltungsgleichung (2.11b) definiert und beschreibt den kinetischen Energieanteil der aufgelösten Grobstruktur. Das Ergebnis der Subtraktion dieser beiden Anteile ist die räumlich diskretisierte Erhaltungsgleichung der kinetischen Energie innerhalb der Feinstruktur in konservativer Form:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial E'}{\partial t}\right)} + \delta_j \left( \overline{E'} \overline{u_j} \right) = & - \overline{u_i' u_j'} \delta_j \overline{u_i} + \delta_{j3} \overline{T' u_j'} \\ & - \delta_j \overline{p' u_j'} - \delta_j \overline{E' u_j'} \\ & + \delta_j \left\{ \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \overline{\frac{\partial E'}{\partial x_j}} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right\} \\ & - \left\{ \overline{\varepsilon} - \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \delta_j \overline{u_i} \delta_j \overline{u_i} + \delta_j \overline{u_i} \delta_i \overline{u_j} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Auch in dieser Gleichung treten noch räumliche partielle Differentiale sowie abhängige Variablen, die an Orten verlangt werden an denen sie nicht definiert sind, auf. Sie können durch die in diesem Kapitel angesprochenen Approximationen angenähert werden. Außerdem sind die neuen unbekanntenen Korrelationen  $\overline{p' u_j'}$  und  $\overline{E' u_j'}$  entstanden, welche die turbulente Diffusion von kinetischer Energie innerhalb der Feinstruktur durch die nicht aufgelösten Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen charakterisieren und modelliert werden müssen (siehe Kapitel 3.1).

Die Terme auf der linken Seite der Gleichung haben die physikalische Bedeutung der lokalen zeitlichen Änderung und des konvektiven Transportes von kinetischer Feinstrukturenergie. Auf der rechten Seite folgen zunächst der Produktionsterm von Feinstrukturenergie durch die aufgelöste Bewegung und der Auftriebsterm, der als Produktionsterm oder auch als Vernichtungsterm von kinetischer Feinstrukturenergie wirken kann. Die darauffolgenden Terme charakterisieren den Transport von kinetischer Feinstrukturenergie durch turbulente und molekulare Diffusion. Der molekulare Vernichtungsterm, d.h. die Feinstrukturdispipation, ist hier als Differenz der volumengemittelten Gesamtdispipation (2.5) und der Grobstrukturdispipation dargestellt, weil es das Ziel ist, Feinstrukturgrößen  $\Phi'$  durch Grobstrukturgrößen  $\overline{\Phi}$  auszudrücken, um mit möglichst wenigen Modellannahmen auszukommen.

## 2.4 Zeitliche Diskretisierung

In den räumlich diskretisierten Erhaltungsgleichungen für Impuls (2.11b), Energie (2.11c) und kinetische Feinstrukturenergie (2.15) treten weitere partielle Differentialquotienten auf. Diese Zeitableitungsterme müssen ebenfalls diskretisiert werden, um eine Integration der Differentialgleichungen über der Zeit zu ermöglichen. Anstelle der unendlich kleinen Veränderung einer der betroffenen abhängigen Variablen über der Zeit  $\partial\Phi/\partial t$ , tritt eine endliche Differenz  $\Delta\Phi/\Delta t$ . Die Zeitachse wird in endlich große Zeitintervalle  $\Delta t$  aufgeteilt.

Grundsätzlich kann zwischen expliziten und impliziten Differenzenverfahren zur Diskretisierung der Zeitableitungsterme unterschieden werden. Bei expliziten Verfahren erfolgt die Berechnung der Werte einer neuen Zeitebene ausschließlich aus den bekannten Werten früherer Zeitebenen. Sie behandeln die Gleichungen wie ein Anfangswertproblem und haben den Vorteil des geringeren numerischen Aufwandes und damit der geringeren Kosten pro Zeitschritt als implizite Verfahren. Als weiterer Vorteil ist ihre relativ einfache Umsetzung in ein Rechenprogramm zu nennen. Ein Nachteil sind ihre strengen Stabilitätskriterien. Bei impliziten Verfahren sind die räumlich benachbarten Werte einer neuen Zeitebene miteinander gekoppelt. Sie behandeln die Gleichungen wie ein Randwertproblem und haben als Nachteil einen hohen numerischen Aufwand, weil für jede implizit behandelte Gleichung zu jedem Zeitschritt die Lösung eines Gleichungssystems erforderlich ist. Ihre Vorteile liegen dafür in den schwächeren Stabilitätskriterien, die eine Verwendung größerer Zeitschrittweiten erlauben, und im unmittelbaren Einfluß der Randbedingungen auf die neue Zeitebene.

Für die Zeitdiskretisierung der Impulserhaltungsgleichungen (2.11b) wird ein explizites Euler-Leapfrog-Verfahren verwendet:

$$\begin{aligned} (1+\xi)\bar{u}_i^* - (1+2\xi)\bar{u}_i^n - \xi\bar{u}_i^{n-1} = \Delta t [ & - (1-\theta_K - \Phi_K)K^n \\ & + (1-\theta_D - \Phi_D)D^n + \Phi_D D^{n-1} \\ & + (1-\theta_A - \Phi_A)A^n ] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Hierin stellen  $K$ ,  $D$  und  $A$  die Konvektions-, Diffusions- und Auftriebsterme dar,  $\Delta t$  ist die Zeitschrittweite und  $n$  der Index zur Kennzeichnung der Zeitebene. Die Werte von  $\xi$ ,  $\theta_K$ ,  $\Phi_K$ ,  $\theta_D$ ,  $\Phi_D$ ,  $\theta_A$  und  $\Phi_A$  kennzeichnen, um welches Verfahren es sich handelt und sind, zusammen mit der Abbruchfehlerordnung der Methode, in Tabelle 2.1 angegeben.

Die Integration läuft in Zyklen ab, wobei ein Zyklus bei den hier durchgeführten Berechnungen typischerweise  $N_t=40$  Zeitschritte umfaßt. Er beginnt mit einem Euler-Schritt. Dieser erweist sich als notwendig, weil zu Integrationsbeginn nur die Werte einer Zeitebene bekannt sind, das Leapfrog-Verfahren jedoch zwei zurückliegende Zeitebenen benötigt. Es folgen  $N-2$  Leapfrog-Schritte. Bei diesem Verfahren kann es durch die nur schwache Kopplung aufeinanderfolgender Zeitebenen für diffusionsdominierte Probleme zu  $2\Delta t$ -Oszillationen kommen. Um diese zu dämpfen, wird der Zyklus mit einem gemischten Euler-Leapfrog-Schritt abgeschlossen.

Verfahren	$\xi$	$\theta_K$	$\Phi_K$	$\theta_D$	$\Phi_D$	$\theta_A$	$\Phi_A$	Fehlerordnung
Euler	0	0	0	0	0	0	0	1
Leapfrog	-1/2	0	0	0	1	0	0	2
gemischt	-1/3	0	0	0	1	0	0	1

Tab. 2.1: Faktoren in Gleichung (2.16) für die verschiedenen in TURBIT verwendeten Integrationsschritte zur Lösung der Impulsgleichungen.

Wird für  $\bar{u}_i^*$  in Gleichung (2.16)  $\bar{u}_i^{n+1}$  eingesetzt und der Druckterm berücksichtigt, so ergibt sich in der Regel ein neues Geschwindigkeitsfeld  $\bar{u}_i^{n+1}$ , das nicht divergenzfrei ist und die Kontinuitätsgleichung (2.11a) nicht erfüllt. Aus diesem Grund wird das Druckglied in Gleichung (2.16) vernachlässigt und als Projektionsoperator aufgefaßt, der ein beliebiges Vektorfeld  $\bar{u}_i^*$  in ein divergenzfreies Vektorfeld  $\bar{u}_i^{n+1}$  abbildet [Chorin (1968)]. Bei diesem als Projektionsmethode von Chorin bekannten Verfahren, wird zunächst mittels Gleichung (2.16) ein genähertes Geschwindigkeitsfeld  $\bar{u}_i^*$  berechnet. Es unterscheidet sich vom exakten Geschwindigkeitsfeld  $\bar{u}_i^{n+1}$  um den Anteil des Druckterms, also um den Gradienten eines skalaren Potentials:

$$\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^* = \Delta t [-\delta_i \bar{p}^{n+1}] = -\delta_i \bar{p}^* \quad (2.17)$$

Für das unbekannte Potential  $\bar{u}_i^*$  kann durch Bildung der Divergenz von Gleichung (2.17) und unter Berücksichtigung der Divergenzfreiheit des neuen Geschwindigkeitsfeldes  $\bar{u}_i^{n+1}$  eine Bestimmungsgleichung abgeleitet werden:

$$\delta_i \delta_i \bar{p}^* = \delta_i \bar{u}_i^* \quad (2.18)$$

Dies ist eine elliptische Differentialgleichung vom Typ einer Poisson-Gleichung, für deren Lösung homogene Neumannsche Randbedingungen an den Wänden gelten. Sie muß zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Das Neumannsche Problem ist bis auf eine additive Konstante eindeutig lösbar [Bronstein & Semendjajew (1987)]. Ist Gleichung (2.18) gelöst, kann mit Hilfe von Gleichung (2.17) das divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld  $\bar{u}_i^{n+1}$  und der Druck  $\bar{p}^{n+1}$  der neuen Zeitebene berechnet werden.

Während die Schritte (2.16) und (2.17) zur Bestimmung der Geschwindigkeitsfelder  $\bar{u}_i^*$  und  $\bar{u}_i^{n+1}$  direkt ausgeführt werden können, benötigt die Bestimmung des skalaren Potentials  $\bar{p}^*$  einen erheblichen CPU-Zeitaufwand. Die Lösung der Poisson-Gleichung (2.18) muß zu jedem Zeitschritt erfolgen. Die Verwendung hocheffizienter Poisson-Löser stellt deshalb eine wichtige Voraussetzung dar, um den Lösungsaufwand bezüglich der CPU-Zeit erträglich zu gestalten. Der in TURBIT verwendete Poisson-Löser stammt von Schmidt et al. (1984).

Die Zeitdiskretisierung der Energieerhaltungsgleichung (2.11c) kann entweder mit einem expliziten Euler-Leapfrog-Verfahren oder mit einem halbimpliziten Differenzenverfahren

erfolgen. Bei letzterem werden die nichtlinearen Konvektionsterme explizit entweder mit dem Leapfrog-(LF) oder dem Adams-Bashforth-Verfahren (AB) und die Diffusionsterme implizit mit dem Crank-Nicholson-Verfahren (CN) diskretisiert:

$$(1 + \xi) \bar{T}^{n+1} - (1 + 2\xi) \bar{T}^n - \xi \bar{T}^{n-1} = \Delta t \left[ -\theta_K K^{n+1} - (1 - \theta_K - \Phi_K) K^n - \Phi_K K^{n-1} \right. \\ \left. + \theta_D D^{n+1} + (1 - \theta_D - \Phi_D) D^n + \Phi_D D^{n-1} \right. \\ \left. + \frac{Da}{\sqrt{Gr Pr}} \right] \quad (2.19)$$

Die Werte der Faktoren in Gleichung (2.19) kennzeichnen wiederum das Verfahren und sind zusammen mit dessen Fehlerordnung in Tabelle 2.2 angegeben. Bezüglich des expliziten Euler-Leapfrog-Verfahrens gelten die zuvor gemachten Aussagen. Die beiden halbimpliziten Verfahren haben sich für die direkte numerische Simulation von Flüssigmetallnaturkonvektion bei niedrigen Rayleigh-Zahlen als notwendig erwiesen, weil durch die hohe Temperaturleitfähigkeit von Flüssigmetallen der thermische Diffusionsprozeß eine starke Zeitschrittrestriktion des expliziten Verfahrens verursacht. Die halbimpliziten Verfahren sind ausführlich bei Wörner (1994) diskutiert.

Verfahren	$\xi$	$\theta_K$	$\Phi_K$	$\theta_D$	$\Phi_D$	Fehlerordnung
Euler	0	0	0	0	0	1
Leapfrog	-1/2	0	0	0	1	2
gemischt	-1/3	0	0	0	1	1
LFCN	-1/2	0	0	1/2	1/2	2
ABCN	0	0	-1/2	1/2	0	2

Tab. 2.2: Faktoren in Gleichung (2.19) für die verschiedenen in TURBIT verwendeten Integrationsverfahren zur Lösung der Energiegleichung.

Wie Schumann (1973) mit einer linearen Stabilitätsanalyse gezeigt hat, ist die Verwendung des Euler-Leapfrog-Verfahrens bezüglich der Zeitdiskretisierung der kinetischen Feinstrukturenergieerhaltungsgleichung unzulässig, da es stets instabil wäre. Die Zeitdiskretisierung der kinetischen Feinstrukturenergieerhaltungsgleichung geschieht deshalb mit einem expliziten modifizierten Euler-Verfahren:

$$\bar{E}^{n+1} = \bar{E}^n \left( 1 + \frac{C_3 \Delta t}{l_{em}} \frac{\Delta t}{2} (\bar{E}^{1/2}) \right) + \Delta t [-K^n + P^n + D^n] \quad (2.20)$$

Hierin stellen  $K$ ,  $P$  und  $D$  die Konvektions-, Produktions- und Diffusionsterme dar. Dabei werden die konvektiven Terme mit sogenannten Upwind-Differenzenformeln berechnet und der Modellansatz für die Feinstrukturdissipation (3.15) in Gleichung (2.15, 3.18) analytisch integriert, um zu vermeiden, daß im kinetischen Feinstrukturenergiefeld unphysikalische negative Werte auftreten. Sollte sich trotz dieser Maßnahmen ein negativer Wert von  $\bar{E}^{n+1}$  ergeben, so kann das an einem instabilen Verhalten wegen zu großer Zeitschritte bei der Integration der Feinstrukturenergiediffusionsterme liegen. In diesem Fall muß die Zeitschrittweite  $\Delta t$  reduziert werden. Treten negative Energiewerte auf, werden diese zu Null gesetzt.

Die maximal zulässige Zeitschrittweite  $\Delta t_{\max}$  muß aus Stabilitätsgründen beschränkt werden. Schumann (1973) hat über eine lineare Stabilitätsanalyse ein Kriterium für die zulässige maximale Zeitschrittweite des Leapfrog-Verfahrens hergeleitet. Es lautet:

$$\Delta t_{\max} \leq SF \left\{ \frac{|\bar{u}_i|_{\max}}{\Delta x_i} + \frac{4 \max(v + v_t, a + a_t)}{\Delta x_i^2} \right\}^{-1} \quad (2.21)$$

SF ist ein Sicherheitsfaktor, der zwischen  $0 < SF \leq 1$  liegt. Bei den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurden typischerweise Werte zwischen 0.5 und 0.8 vorgegeben. Der erste Summand charakterisiert den Einfluß des konvektiven, der zweite den Einfluß des viskosen und des thermischen diffusiven Transportprozesses auf die Stabilität des Zeitintegrationsverfahrens.

Gleichung (2.21) gibt zu erkennen, daß die zulässige Zeitschrittweite mit wachsender kinematischer Viskosität  $\nu$  oder wachsender Temperaturleitfähigkeit  $a$  und mit wachsender Konvektionsgeschwindigkeit  $|\bar{u}_i|_{\max}$  kleiner wird. Infolge höherer Viskositäten oder Temperaturleitfähigkeiten und größerer Transportgeschwindigkeiten wirkt sich die Änderung der physikalischen Größen viel stärker bzw. schneller aus. Im Falle einer Grobstruktursimulation wird dieser Effekt durch eine turbulente Zähigkeit oder Temperaturleitfähigkeit, die mit größer werdenden Maschenweiten zunehmen, zusätzlich verstärkt. Eine deutliche Abhängigkeit der zulässigen maximalen Zeitschrittweite von der Maschenweite  $\Delta x_i$  ist ebenfalls zu erkennen. Sehr feine Gitter erfordern auch sehr kleine Zeitschritte, d.h. eine räumlich feine Auflösung zieht automatisch eine zeitlich feine Diskretisierung nach sich. Es kann festgehalten werden, daß das Stabilitätskriterium eines expliziten Zeitintegrationsverfahrens bewirken soll, daß innerhalb einer Zeitschrittweite keine physikalische Information weiter als eine Maschenweite transportiert wird.

Um die Stabilität des modifizierten Euler-Verfahrens bezüglich der zeitlichen Diskretisierung der kinetischen Feinstrukturenergiegleichung zu gewährleisten und damit Instabilitäten, die zu einem "arithmetic overflow" führen oder unphysikalisch negative Feinstrukturenergiewerte verursachen, zu vermeiden, wird das Stabilitätskriterium (2.21) erweitert. Über eine lineare Stabilitätsanalyse kann gezeigt werden, daß sich hinsichtlich der Behandlung der konvektiven Terme keine Änderung ergibt, wohl jedoch bei der Berücksichtigung des diffusiven Transportes von kinetischer Feinstrukturenergie. Das erweiterte, hier verwendete Stabilitätskriterium lautet:

$$\Delta t_{max} \leq SF \left\{ \frac{|\bar{u}_i|_{max}}{\Delta x_i} + \frac{\max \{4(v+v_i), 4(a+a_i), 2(v+\sigma_i)\}}{\Delta x_i^2} \right\}^{-1} \quad (2.22)$$

Hierin ist  $\sigma_i$  der Koeffizient für die turbulente Diffusion von kinetischer Feinstrukturenergie. Mit dem Zeitschrittkriterium (2.22) erfolgt nach Abschluß jedes Integrationszyklusses die dynamische Anpassung des maximalen Zeitschrittes  $\Delta t_{max}$  an die aktuellen Werte.

### 3. Methodische Erweiterung von TURBIT für die Grobstruktursimulation von Auftriebsströmungen

#### 3.1 Modellierung der Feinstruktur

##### 3.1.1 Literaturstand zu Feinstrukturmodellen für Naturkonvektion

In Anlehnung an das Newtonsche Gesetz der Flüssigkeitsreibung oder in allgemeiner Form den Stokeschen Ansatz (1845), der besagt, daß die viskosen Spannungen proportional dem Gradienten der Deformationsgeschwindigkeit sind, wird für die Berechnung der Feinstrukturspannungen üblicherweise ein verallgemeinerter Ansatz von Boussinesq (1877) verwendet. Analog dazu kann gemäß dem Fourierschen Gesetz der molekularen Wärmeleitung, das den molekularen Wärmestrom proportional einem mittleren Gradienten der Temperatur setzt, für die Feinstrukturwärmeströme ein ähnlicher Ansatz formuliert werden:

$$\bar{\tau}_{ijSGS} = -\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k} \quad (3.1a)$$

$$-\bar{q}_{jSGS} = -\overline{T' u'_j} = a_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (3.1b)$$

Es wird angenommen, daß für die Feinstrukturspannungen und -wärmeströme, entsprechend den molekularen Transportvorgängen durch Diffusion, Gradientenansätze gelten, die die Feinstrukturanteile proportional den Gradienten der Grobstrukturgrößen setzen. Das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (3.1a) gewährleistet die Richtigkeit des Ansatzes für  $i=j$ . Unter Beachtung der Summationsregel verschwindet in diesem Fall der erste Term wegen der Massenerhaltungsgleichung (2.11a). Die Summe der Feinstrukturnormalspannungskomponenten ist jedoch gleich dem doppelten der kinetischen Feinstrukturenergie. Da diese wie der Druck eine skalare Größe ist und Normalspannungen wie Druckkräfte auf das Fluid wirken, muß der Zusatzterm nicht modelliert werden, sondern kann den Druckgradiententermen der Impulserhaltungsgleichungen (2.11b) zugeordnet werden. Im Gegensatz zu den molekularen Austauschkoefizienten für Impuls und Wärme,  $\hat{\nu}$  und  $\hat{a}$ , sind die turbulenten Austauschgrößen  $\nu_t$  und  $a_t$  keine Stoffgrößen, sondern vom Zustand der Turbulenz und damit von Ort und Zeit abhängig. Das Schließungsproblem der Erhaltungsgleichungen für Impuls (2.11b) und Energie (2.11c) ist damit auf die Bestimmung von  $\nu_t$  und  $a_t$  verlagert.

Analog zur gaskinetischen Erklärung der inneren Reibung, die für die kinematische Viskosität  $\hat{\nu}$  einen Zusammenhang zur mittleren freien Weglänge der Moleküle und zur mittleren Molekülgeschwindigkeit auf der Ebene der Mikrobewegung ableitet, und entsprechend der Prandtlschen Argumentationsweise [Prandtl (1925)] kann der Ansatz erfolgen, daß die turbulenten Austauschgrößen  $\nu_t$  und  $a_t$  proportional einem charakteristischen Längenmaß  $l$  und einem charakteristischen Geschwindigkeitsmaß  $u$  sind:

$$\nu_t, a_t \sim l u \quad (3.2)$$

Feinstrukturmodelle, die auf diesem sogenannten Wirbeldiffusivitätsprinzip beruhen, können analog zu statistischen Turbulenzmodellen nach Rodi (1984) danach klassifiziert werden, wieviele Transportgleichungen sie für die Turbulenzgrößen verwenden. So ist es zum Beispiel möglich, für die im Ansatz (3.2) auftretenden charakteristischen Größen der turbulenten Fluktuationsbewegung innerhalb der Feinstruktur, keine, eine oder mehrere Transportgleichungen zu lösen. Eine andere Möglichkeit ist die, für einige oder alle zentralen Momente zweiter Ordnung Bilanzgleichungen mittels der exakten Erhaltungsgleichungen (2.2b,c) abzuleiten. Diese Art der Modellierung wird deshalb auch als Schließung zweiter Ordnung bezeichnet. Zwar besteht die Hoffnung, daß ein Schließungsmodell mit jeder weiteren Transportgleichung allgemeingültiger wird und in der Lage ist, die verschiedenen Einflüsse und Transportmechanismen der turbulenten Bewegung besser zu beschreiben, jedoch wird auch der numerische Aufwand und der Aufwand die vielen neuen unbekanntenen Turbulenzkorrelationen höherer Ordnung zu modellieren sowie deren Koeffizienten zu ermitteln immer größer. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren und trotzdem Anisotropien zu berücksichtigen, gibt es Ansätze, die die instationären, die diffusiven und die konvektiven Terme in den Transportgleichungen vernachlässigen und mittels einer Gleichgewichtsbetrachtung zwischen Produktion und molekularer Vernichtung algebraische Ausdrücke für die Feinstrukturkorrelationen ableiten. Diese Form der Schließung wird deshalb als algebraische Spannungs-/Fluß-Modellierung bezeichnet. Nach dieser kurzen Darlegung der grundsätzlichen Modellierungsstrategien, werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels verschiedene Feinstrukturmodelle für Naturkonvektion vorgestellt und bezüglich der von ihnen verwendeten Koeffizienten verglichen. Die Modelle stammen durchweg aus dem meteorologischen Bereich für die Grobstruktursimulation einer konvektiven Grenzschicht und unterscheiden sich in der Anzahl der verwendeten Transportgleichungen.

Das erste von Smagorinsky (1958) vorgeschlagene und von Lilly (1962) für Auftriebsströmungen modifizierte Modell löst keine Transportgleichung, basiert auf den Ansätzen (3.1a,b) und entspricht formal einem Prandtlschen Mischungswegmodell. Aufgrund der Annahme, daß Feinstrukturproduktion und Feinstrukturdissipation in der Feinstrukturenergiegleichung (2.15) ein Gleichgewicht bilden, wird ein Feinstrukturimpulsaustauschkoeffizient definiert:

$$v_t = c_s^2 \Delta^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \{ I - Ri_{fSGS} \}^{1/2} \quad (3.3)$$

Das charakteristische Längenmaß der kleinskaligen Turbulenzbewegung ist die mittlere Maschenweite  $\Delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}$ , das charakteristische Geschwindigkeitsmaß ist das Produkt aus mittlerer Maschenweite und dem Gradienten der aufgelösten Geschwindigkeit. Der Einfluß der Auftriebskräfte wird mittels einer Feinstruktur-Fluß-Richardson-Zahl eingebracht:

$$Ri_{fSGS} = \frac{\delta_{j3} \overline{T' u'_j}}{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} \quad (3.4)$$

Diese Kennzahl ist der Quotient der Auftriebsproduktion/-vernichtung von kinetischer Feinstrukturenergie durch die Feinstrukturwärmeströme zur Produktion von kinetischer Feinstrukturenergie durch die Arbeit der aufgelösten Geschwindigkeit gegen die Feinstrukturspannungen. Der Nenner ist negativ, weil ein positiver mittlerer Geschwindigkeitsgradient immer einen negativen Impulstransport und ein negativer mittlerer Geschwindigkeitsgradient immer einen positiven Impulstransport zur Folge hat. Bei einer instabilen Schichtung des Fluids ist der turbulente Feinstrukturwärmestrom positiv und demnach  $Ri_{fSGS} < 0$ . Bei indifferenten Schichtungsverhältnissen ist  $Ri_{fSGS} = 0$  und aus Ansatz (3.3) wird das Smagorinsky-Modell für erzwungene Konvektion. Im Fall einer stabilen Schichtung ist der turbulente Feinstrukturwärmestrom negativ,  $Ri_{fSGS} > 0$  und  $v_t$  wird reduziert. Für  $Ri_{fSGS} \geq 1$  ist  $v_t = 0$  und die unbekannteren Feinstrukturkorrelationen verschwinden. Weil  $Ri_{fSGS}$  im stabilen Fall der Quotient von Auftriebsvernichtung zu Spannungsproduktion ist, in der Feinstrukturenergiegleichung (2.15) jedoch auch der Feinstrukturdispersionsterm ein Senkenterm ist, muß  $v_t$  schon bei kleineren Feinstruktur-Fluß-Richardson-Zahlen verschwinden. Diesen Einfluß erfaßt Ansatz (3.3) nicht und Mason (1989) führt deshalb einen Korrekturfaktor  $\gamma$  ein, der die kritische Feinstruktur-Fluß-Richardson-Zahl reduziert. Im stabilen Fall verschwindet bei ihm für  $\gamma Ri_{fSGS} \geq 1$ , d.h. für  $Ri_{fSGS} \geq 1/\gamma$ , der Feinstrukturaustauschkoeffizient  $v_t$  und damit die Feinstrukturkorrelationen. Nach Tennekes et al. (1972) kann Beobachtungen und Experimenten zufolge bei Fluß-Richardson-Zahlen  $Ri_f \approx 0.2$  keine turbulente Strömung mehr vorliegen.

Lilly (1962) definiert den turbulenten Feinstrukturwärmeaustauschkoeffizienten über eine turbulente Feinstruktur-Prandtl-Zahl:

$$a_t = \frac{v_t}{Pr_{tSGS}} \quad (3.5)$$

Verwendet wird dieses Modell auch von Deardorff (1970a/b/c, 1971, 1972a), Mason (1989), Mason & Callen (1986) und Mason & Thomson (1992) zur Untersuchung der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht und von Eidson (1982, 1985) zur Berechnung turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft.

Schumann (1973) und Grötzbach (1977) führen erstmals einen Energie-Längen-Ansatz, das Kolmogorov-Prandtl-Modell [Prandtl (1945)], zur Feinstrukturmodellierung ein. Deardorff (1980) verwendet diesen Ansatz zur Berechnung der konvektiven Grenzschicht. Das Modell basiert auf den Ansätzen (3.1a,b) und erfordert die Lösung einer Transportgleichung. Als charakteristisches Geschwindigkeitsmaß der kleinskaligen Turbulenz wird die Wurzel der kinetischen Feinstrukturenergie angesehen, für die eine exakte Bilanzgleichung aufgestellt werden kann. Der Vorteil dieser Modellierung ist, daß in der Feinstrukturenergiegleichung, als Konsequenz ihrer Herleitung aus den Navier-Stokes-Gleichungen, ein Auftriebsglied enthalten ist. Der turbulente Feinstrukturimpulsaustauschkoeffizient ist folgendermaßen definiert:

$$v_t = c_m l \bar{E}^{1/2} \quad (3.6)$$

Für den turbulenten Feinstrukturwärmeaustauschkoeffizienten verwendet Deardorff (1980) Gleichung (3.5). Er wählt zwar im Falle stabiler und instabiler Schichtung unterschiedliche

Feinstruktur-Prandtl-Zahlen, besser ist es jedoch, wie Grötzbach (1977, 1979), Sykes & Henn (1989) und Schumann (1991), für  $a_1$  ebenfalls einen Kolmogorov-Prandtl-Ansatz einzuführen:

$$a_1 = c_h l \bar{E}^{1/2} \quad (3.7)$$

Das charakteristische Längenmaß  $l$  ist ebenfalls von der Schichtung abhängig und Deardorff (1980) schlägt vor,  $l$  bei stabiler Schichtung wie folgt zu reduzieren:

$$l = \min \left( \Delta, \frac{0.76 \bar{E}^{1/2}}{N_b} \right) \quad (3.8)$$

Hierin ist die in Kapitel 2.1 eingeführte Brunt-Väisälä-Frequenz  $N_b$  ein Zeitmaßstab für vertikale Oszillationen in einem stabil geschichteten Fluid. Verwendet wird dieses Modell auch von Moeng (1984), Wyngaard & Brost (1984), Nieuwstadt et al. (1985), Nieuwstadt & Brost (1986), Moeng & Wyngaard (1988) und Moeng & Rotunno (1990) für die Grobstruktursimulation der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht.

Um das Schließungsproblem zu lösen, verwendet erstmals Deardorff (1973) Transportgleichungen für alle subskaligen zentralen Momente zweiter Ordnung. Der Einfluß der Schichtung wird bei dieser Art der Modellierung insofern berücksichtigt, daß die Bilanzgleichungen für die Feinstrukturkorrelationen von den Grundgleichungen abgeleitet werden und Auftriebsterme enthalten. Allerdings liegt das Problem jetzt bei den Schließungsannahmen für die zusätzlichen unbekanntenen Feinstrukturkorrelationen zweiter und dritter Ordnung, auf deren Modellierung es hinsichtlich der Genauigkeit des Verfahrens ankommt. Auch der numerische Aufwand dieser Methode ist enorm, weil neben den fünf Grundgleichungen (2.11a-c) bis zu zehn Differentialgleichungen zusätzlich über der Zeit gelöst werden müssen. Aus diesem Grund verwenden Schemm & Lipps (1976), Schmidt (1988) und Schmidt & Schumann (1989) ein auf dieser Basis neu entwickeltes Schließungsmodell, dem die Annahme zugrunde liegt, daß der anisotrope Teil der turbulenten Flüsse in stationärem Gleichgewicht ist und der Anisotropiegrad nur von lokalen Effekten bestimmt wird. Damit verschwinden in den meisten Bilanzgleichungen der subskaligen Turbulenzkorrelationen die lokalen Zeitableitungsterme. Werden zusätzlich Konvektions- und Diffusionsterme vernachlässigt, dann gelingt es, Bestimmungsgleichungen für die Feinstrukturanteile abzuleiten.

Wegen des großen numerischen Aufwandes und der Komplexität eines Schließungsmodells zweiter Ordnung kehrt Deardorff (1980) zu dem in diesem Kapitel beschriebenen Energie-Längen-Modell zurück, bei dem nur eine Transportgleichung für die kinetische Feinstrukturenergie zu lösen ist. Nieuwstadt et al. (1991) führen Grobstruktursimulationen der konvektiven atmosphärischen Grenzschicht mit drei verschiedenen Feinstrukturmodellen durch und finden eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse mit experimentellen Daten. Einzig das von Mason verwendete Smagorinsky-Modell reagiert empfindlich auf eine Veränderung des Koeffizienten  $c_s$ . Auch Schumann (1991), der bei dem Vergleich mit einem algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell vertreten war, kommt zu dem Ergebnis, zukünftig wegen des geringeren numerischen Aufwandes wieder ein Energie-Längen-Modell zu verwenden.

	$c_{\epsilon m}=C_3$	$c_m=C_2$	$c_s$	$c_h=C_{T2}$	$c_{sh}$	$Pr_{tSGS}$
<b>Smagorinsky-Modell</b>						
Lilly (1962)	-	-	0.2	-	-	1
Smagorinsky (1963)	-	-	0.28	-	-	-
Deardorff (1971)	-	-	0.21	-	-	1/3-1/2
Eidson (1982)	-	-	0.21	-	-	1/3-1/2
Mason (1989)	-	-	0.23-0.46	-	-	1/2
<b>Kolmogorov-Prandtl-Modell</b>						
Grötzbach (1977)	0.633	0.05	0.12	0.13	0.19	0.42
Deardorff (1980)	0.7	0.1	0.19	-	0.336	1/3
Moeng (1984)	0.7	0.1	0.19	-	0.336	1/3
Wyngaard & Brost (1984)	0.7	0.1	0.19	-	0.336	1/3
Nieuwstadt et al. (1985)	0.7	0.12	0.22	-	0.38	0.315
Nieuwstadt & Brost (1986)	0.7	0.1	0.19	-	0.336	1/3
Sykes & Henn (1989)	0.125	f(Schichtung)	-	f(Schichtung)	-	f(Schichtung)
<b>Seiter (1993)</b>	<b>0.633</b>	<b>0.105</b>	<b>0.2</b>	<b>0.215</b>	<b>0.29</b>	<b>0.48</b>
<b>SOC</b>						
Deardorff (1973)	0.7	0.0645	0.14	0.161	0.221	0.4
<b>ASM</b>						
Schemm & Lipps (1976)	0.7	0.0645	0.14	0.161	0.221	0.4
Schmidt & Schumann (1989)	0.845	0.0856	0.165	0.204	0.255	0.42

Tab. 3.1: Koeffizienten verschiedener Feinstrukturmodelle für Auftriebsströmungen.

Tabelle 3.1 zeigt einen Vergleich der Feinstrukturkoeffizienten verschiedener Modelle und Autoren für Naturkonvektion. Die Koeffizienten des Smagorinsky-Modells  $c_s$  und  $c_{sh}$  können mittels der folgenden Beziehungen aus den Koeffizienten der Mehrgleichungsmodelle berechnet werden [Schmidt & Schumann (1989)]:

$$c_s = \left( \frac{c_m^3}{c_{\epsilon m}} \right)^{1/4} \quad (3.9a)$$

$$c_{sh} = \left( \frac{c_m}{c_{\epsilon m}} \right)^{1/4} c_h^{1/2} \quad (3.9b)$$

Hierin ist  $c_{\epsilon m}$  der Koeffizient im Rotta-Ansatz [Rotta (1951a/b)] zur Modellierung der Feinstrukturdisipation in der Feinstrukturenergiegleichung.

## 3.1.2 Beschreibung des weiterentwickelten Feinstrukturmodells

### 3.1.2.1 Gedanken zur Modellierung

Um die unbekanntenen Feinstrukturanteile zu bestimmen, wird in TURBIT das Wirbeldiffusivitätsprinzip angewandt, d.h. für die Feinstrukturspannungen  $\overline{u'_i u'_j}$  und die Feinstrukturwärmeströme  $\overline{T' u'_j}$  gelten die Gradientenansätze (3.1a,b). Zur Berechnung der in diesen Ansätzen enthaltenen, von Ort und Zeit abhängigen, turbulenten Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$  und  $a_t$  werden Energie-Längen-Modelle nach Kolmogorov und Prandtl eingeführt:

$$v_t = C_2 {}^i C_l l_m ({}^j C_5 \overline{E'})^{1/2} \quad (3.10a)$$

$$a_t = C_{T2} {}^i C_T l_h ({}^j C_5 \overline{E'})^{1/2} \quad (3.10b)$$

Als charakteristisches Geschwindigkeitsmaß der kleinskaligen Turbulenz wird die Wurzel der kinetischen Feinstrukturenergie  $\overline{E'}^{1/2}$  angesehen, für die eine orts- und zeitabhängige Transportgleichung gelöst wird (siehe Kapitel 3.1.2.2). Die Ableitung der maschennetzabhängigen Feinstrukturkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  geschieht mit Hilfe der zeitlich gemittelten kinetischen Feinstrukturenergiegleichung, ihre Kalibrierung mit Hilfe von Daten aus direkten numerischen Simulationen (siehe Kapitel 3.1.2.3). Die charakteristischen Längenmaßstäbe der kleinskaligen Turbulenz für Impuls  $l_m$  und Wärme  $l_h$  sind ebenfalls vom Maschennetz abhängig, ihre Berechnung ist jedoch auch eine Funktion von Wandabstand und Schichtung (siehe Kapitel 3.1.2.4).

Die dimensionslosen Koeffizienten  ${}^i C$ ,  ${}^j C_T$  und  ${}^j C_5$  berücksichtigen die Anisotropie des Maschennetzes.  ${}^i C$  und  ${}^j C_T$  sind reine Maschennetzgeometriefaktoren, die die  $\Delta x_i$ -Abhängigkeit der Feinstrukturanteile, wie sie bei der Differenzenbildung der aufgelösten Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten in den Ansätzen (3.1a,b) entsteht, kompensiert. Auch die Koeffizienten  ${}^j C_5$  sind reine Geometriegrößen, mit der die volumengemittelte Feinstrukturenergie, wie sie berechnet wird, in die flächengemittelte Feinstrukturenergie, wie sie im Modell benötigt wird, umgeformt werden kann. Die Herleitung und der Gültigkeitsbereich dieser Koeffizienten, die nur bei ungleichseitigen Maschen von eins verschieden sind, ist ausführlich bei Schumann (1975) und zum Wärmetransport bei Grötzbach (1977) beschrieben und soll deshalb an dieser Stelle nicht weiter diskutiert werden.

Die Voraussetzung für die Gültigkeit der Modellansätze bezüglich der Feinstrukturkorrelationen  $\overline{u'_i u'_j}$ ,  $\overline{T' u'_j}$  (3.1a,b) und bezüglich der Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$ ,  $a_t$  (3.10a,b) sowie der in ihnen enthaltenen charakteristischen Größen  $\overline{E'}^{1/2}$ ,  $l_m$ ,  $l_h$ , Feinstrukturkoeffizienten  $C_2$ ,  $C_{T2}$  und Geometriekoeffizienten  ${}^i C$ ,  ${}^j C_T$ ,  ${}^j C_5$  ist, daß Vorgänge im Bereich der Lokal isotropie modelliert werden. Ein lokal isotropes Turbulenzfeld hat die Eigenschaft, daß seine statistischen Größen und Verteilungen lokal im Wellenzahlraum, d.h. im Bereich bestimmter Skalen, unabhängig von Ort und Richtung, d.h. invariant gegenüber Translationen und Rotationen des vorgegebenen Koordinatensystems, sind. Die physikalische Begründung für die

Existenz lokaler Isotropie liefert das Modell der Energiekaskade, das besagt, daß die großen Turbulenzelemente unter dem Einfluß der Trägheitskräfte in kleinere zerfallen. Die Druck-Geschwindigkeitskorrelationen bewirken dabei einen Energieaustausch zwischen den Geschwindigkeitsschwankungen verschiedener Richtungen, so daß die Bewegung der Turbulenzelemente mit sinkender Abmessung zunehmend isotroper wird. Die Vorstellung ist, daß wenn die mittlere Maschenweite des Gitters ausreichend klein und die Grashof-Zahl ausreichend groß ist, die kleinskaligen Turbulenzelemente sich in einem nur durch Trägheitskräfte bestimmten Wellenzahlbereich befinden, in dem die Energiespektren der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen  $\hat{E}(\hat{k})$  und turbulenten Temperaturfluktuationen  $\hat{E}_T(\hat{k})$  dem Kolmogorov- bzw. dem Batchelor-Spektrum folgen (siehe Abbildung 2.2):

$$\hat{E}(\hat{k}) = \alpha \langle \hat{\epsilon} \rangle^{2/3} \hat{k}^{-5/3} \quad (3.11a)$$

$$\hat{E}_T(\hat{k}) = \beta \langle \hat{\epsilon} \rangle^{-1/3} \langle \hat{\epsilon}_T \rangle \hat{k}^{-5/3} \quad (3.11b)$$

Die Spektren sind in diesem Wellenzahlbereich also nur von der Größe der Turbulenzelemente, d.h. ihrer Wellenzahl  $\hat{k}$ , und dem Energietransport von kleinen zu großen Wellenzahlen, d.h. der molekularen Vernichtung  $\langle \hat{\epsilon} \rangle$  und  $\langle \hat{\epsilon}_T \rangle$ , abhängig.  $\alpha=1.5$  ist die Kolmogorov-Konstante,  $\beta=1.3$  die Batchelor-Konstante. Im unteren  $\hat{k}^{-5/3}$ -Bereich, d.h. bei hohen Wellenzahlen, verhält sich die Feinstruktur turbulenz lokalisotrop (siehe Abbildung 3.1a).

Von Interesse ist der Einfluß von festen Wänden und Auftriebskräften auf die Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$ . Sie sind die Ursache für Inhomogenitäten und Anisotropien, die bei der Feinstrukturmodellierung berücksichtigt werden müssen.

In Wandnähe werden die turbulenten Fluktuationen stark gedämpft. Dort ist kein turbulenter Queraustausch senkrecht zur Wand mehr möglich. Demzufolge müssen auch die Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  abnehmen. Untermuert wird dieser Sachverhalt durch Abbildung 3.1. Die ausgewerteten Daten entstammen einer direkten numerischen Simulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft für  $Ra=630000$ . Während in Kanalmitte ( $x_3 \approx 0.5$ ) die Isotropiebedingung über den gesamten Wellenzahlbereich annähernd erfüllt ist, zeigt sich in Wandnähe im Bereich kleiner Wellenzahlen eine starke Inhomogenität der wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuationen, die bis weit in den  $\hat{k}^{-5/3}$ -Bereich hineinreicht. Insgesamt ist der Energieinhalt der Spektren über den gesamten Wellenzahlbereich und insbesondere in dem für die Modellbildung wichtigen Bereich der hohen Wellenzahlen in Wandnähe viel geringer als in Kanalmitte. Die Ansätze (3.1a,b) werden diesem Verhalten nicht gerecht, weil im Bereich der Unterschichten die in die Ansätze eingehenden Gradienten der Geschwindigkeit und der Temperatur sehr steil sind. Um die Physik dort richtig zu beschreiben, muß demnach eine geeignete Modellierung der Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $\nu_t$  und  $a_t$  erfolgen.

Eine weitere Forderung ist, daß in auftriebsbehafteten Strömungen der Einfluß der Schichtung auf die Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  berücksichtigt wird. Vor allem bei einer stabi-

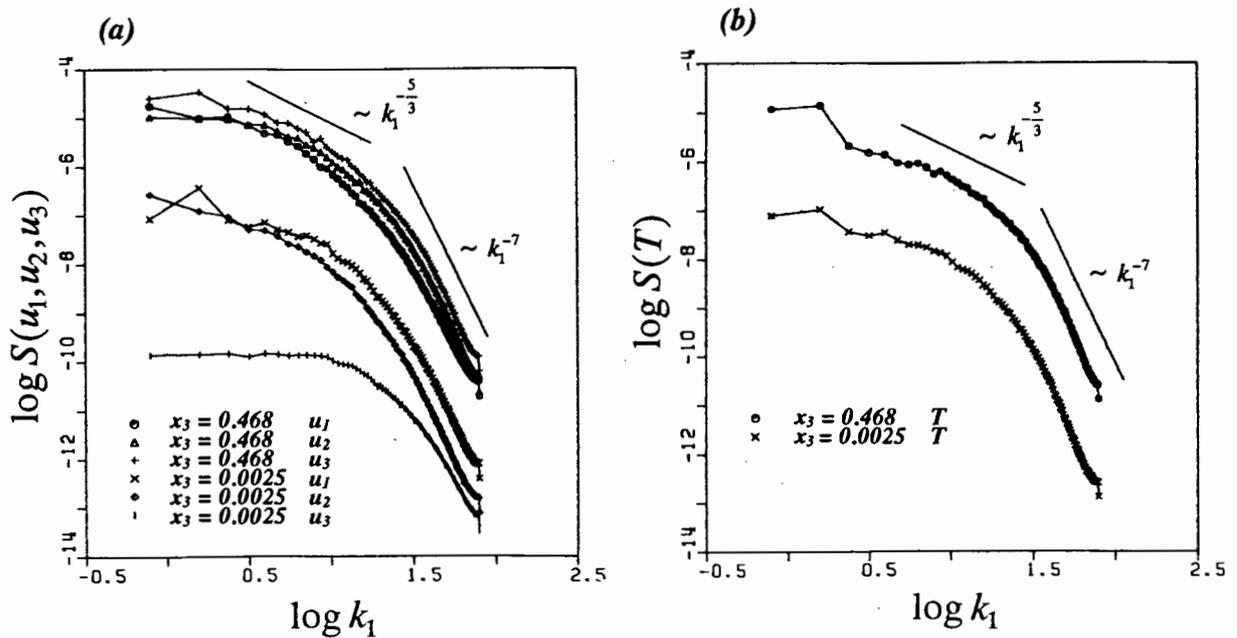


Abb. 3.1: Eindimensionale Energiespektren verschiedener Geschwindigkeits- (a) und Temperaturfluktuationen. (b) bei Rayleigh-Bénard-Konvektion in Wandnähe und in Kanalmitte.

len Schichtung kann der turbulente Austausch von Impuls und Wärme durch Auftriebseinflüsse stark gedämpft werden, Abbildung 3.2. Die ausgewerteten Daten entstammen wiederum einer direkten numerischen Simulation einer Wasserschicht mit interner Wärmequelle für  $Ra_1=4.0 \cdot 10^6$  [Grötzbach (1988)]. Deutlich ist in Abbildung 3.2a im Bereich kleiner Wellenzahlen noch ein geringer Wandeinfluß erkennbar, der eine schwache Dämpfung der wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuationen zur Folge hat. Sehr viel interessanter ist in diesen Abbildungen der Einfluß der Schichtung. Sie bewirkt im stabilen Fall eine sehr viel stärkere Reduzierung des Energieinhaltes der kleinskaligen Fluktuationsanteile als des Energieinhaltes der großskaligen Fluktuationsanteile. Dabei bleibt jedoch der Zustand der lokalen Isotropie für die kleinskaligen Geschwindigkeitsfluktuationen erhalten. Die Wirbeldiffusivitätsansätze (3.1a,b) können einer Dämpfung der Feinstruktur im stabilen Fall durch eine geeignete Modellierung der Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$  und  $a_t$  gerecht werden.

Ein weiterer Sachverhalt, der bei der Modellierung der Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  berücksichtigt werden muß, ist der immer geringer werdende Energieinhalt der subskaligen Fluktuationen bei einer Verfeinerung des Maschennetzes. Auch dieser Fall der direkten Auflösung eines größeren Wellenzahlbereiches muß demnach eine Reduktion der Feinstrukturanteile zur Folge haben.

Um die hier diskutierten physikalischen Anforderungen und Einflüsse auf die Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  zu erfüllen, stehen einer geeigneten Modellierung der Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$  und  $a_t$  gemäß den Energie-Längen-Modellen (3.10a,b) die Modellkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$ , die charakteristischen Längenmaße der Feinstruktur für Impuls  $l_m$  und

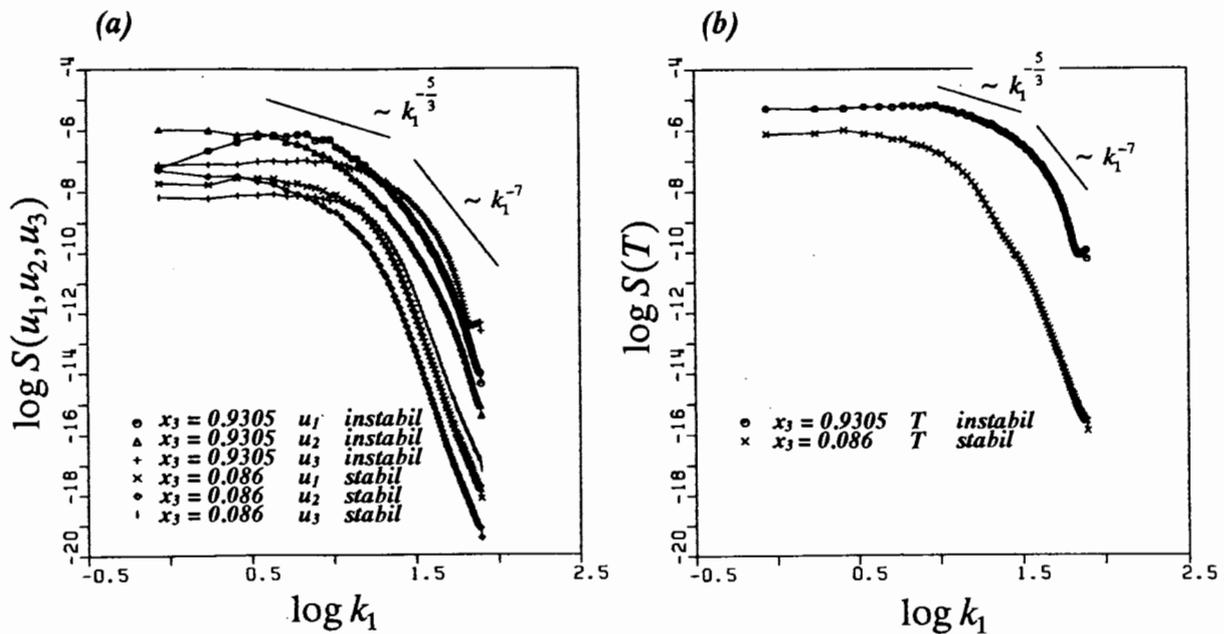


Abb. 3.2: Eindimensionale Energiespektren verschiedener Geschwindigkeits- (a) und Temperaturfluktuationen (b) einer Fluidschicht mit interner Wärmequelle bei instabiler und stabiler Schichtung.

Wärme  $l_h$  sowie als charakteristischer Geschwindigkeitsmaßstab der kleinskaligen Turbulenz die Wurzel der kinetischen Feinstrukturenergie  $\overline{E'}^{1/2}$  zur Verfügung. Sie werden in den nächsten Abschnitten besprochen.

### 3.1.2.2 Modellierter Feinstrukturenergiegleichung

Als charakteristisches Geschwindigkeitsmaß der kleinskaligen Turbulenz wird die Wurzel der kinetischen Feinstrukturenergie  $\overline{E'}^{1/2}$  angesehen. Für die kinetische Feinstrukturenergie  $\overline{E'}$  wird die orts- und zeitabhängige Transportgleichung (2.15) gelöst. In ihr treten neben den Feinstrukturanteilen  $\overline{u'_i u'_j}$  im Produktionsterm durch die aufgelöste Bewegung und  $\overline{T' u'_j}$  im Produktions-/Vernichtungsterm durch Auftriebskräfte, für die die Ansätze (3.1a,b) und (3.10a,b) verwendet werden, weitere unbekannte subskalige Korrelationen auf, die ebenfalls modelliert werden müssen. Dies sind die turbulente Diffusion von kinetischer Energie innerhalb der Feinstruktur durch die nicht aufgelösten Druckschwankungen  $\overline{p' u'_j}$  und Geschwindigkeitsschwankungen  $\overline{E' u'_j}$  sowie die Feinstrukturdissipation  $\overline{\epsilon'}$ , die in Gleichung (2.15) als Gesamtdissipation minus Grobstrukturdissipation dargestellt ist.

Ähnlich dem exakten Dissipationsterm (2.5) besteht der Feinstrukturdissipationsterm in konservativer Schreibweise aus zwei Anteilen:

$$\overline{\epsilon'} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right) \quad (3.12)$$

Auch im molekularen Diffusionsterm von Gleichung (2.15) treten bei konservativer Schreibweise zwei Anteile auf, wobei letzterer wiederum als Differenz von Gesamt- minus Grobstrukturanteil notiert ist:

$$\frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.13)$$

Werden der zweite Term in Gleichung (3.12) und der Feinstrukturanteil in Gleichung (3.13) zusammengefaßt, so ist ihre Differenz bei der Betrachtung inkompressibler Fluide unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung der kleinskaligen Turbulenz identisch Null:

$$\frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} - \frac{\partial \overline{u'_i} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.14)$$

Beide Anteile müssen demnach nicht modelliert werden. Der erste Feinstrukturdissoziations-term in Gleichung (3.12) wird nach Grötzbach (1977) mit einem von Jones et al. (1972, 1973) modifizierten Ansatz von Rotta (1951a/b) approximiert:

$$\overline{\varepsilon'} = C_3 \frac{\overline{E'}^{3/2}}{l_{em}} - \frac{C_{32} \overline{E'}}{\sqrt{Gr} l_{em}^2} - \frac{2}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial \overline{E'}^{1/2}}{\partial x_3} \right)^2 \quad (3.15)$$

Der zweite Term in diesem Modell ist eine Erweiterung für den Fall niedriger Rayleigh-Zahlen und beliebig feiner Maschennetze. Der dritte Modellterm hat nur dann eine Bedeutung, wenn starke Änderungen des Feinstrukturenergiefeldes in  $x_3$ -Richtung auftreten. Das ist z.B. der Fall, wenn die hydrodynamische Grenzschicht mit dem Maschennetz aufgelöst wird. Er ist damit eine Vervollständigung des Modells, um die Wandinhomogenität zu berücksichtigen. Für den Rotta-Koeffizienten  $C_3$  kann unter der Voraussetzung lokalisotroper Turbulenz mit Hilfe von Gleichung (3.11a) im Bereich des Kolmogorov-Spektrums der in Tabelle 3.1 aufgeführte Wert von Schmidt & Schumann (1989) abgeleitet werden:

$$C_3 = \left( \frac{2}{3\alpha} \right)^{3/2} \pi = 0.845 \quad (3.16)$$

Gemäß Deardorff (1973) und Schemm & Lipps (1976) sollte  $C_3 \approx 0.7$  gelten. Die numerische Auswertung von  $C_3$  in TURBIT ist vom gewählten Maschennetz abhängig und liefert für die in dieser Arbeit verwendeten Gitter den Wert  $C_3=0.633$ . Für den Koeffizienten  $C_{32}$  leitet Grötzbach (1977) den Wert  $C_{32}=20.0$  ab. Der charakteristische Längenmaßstab der Feinstrukturdissoziation  $l_{em}$  wird in Kapitel 3.1.2.4 erläutert.

Für die turbulenten Feinstrukturenergiediffusionsterme wird von Schumann (1973) ein Gradientenansatz eingeführt:

$$-\overline{p' u'_j} - \overline{E' u'_j} = \sigma_i \left( {}^j F \overline{E'} \right)^{1/2} C_5 \frac{\partial \overline{E'}}{\partial x_j} \quad (3.17)$$

Es wird angenommen, daß der turbulente Transport von kinetischer Feinstrukturenergie proportional dem Gradienten der transportierten Größe ist. Für den Koeffizienten  $\sigma_t$  wird in Anlehnung an Grötzbach (1977) der Wert  $\sigma_t=0.3$  gewählt, der sich in praktischen Rechnungen bewährt hat.  ${}^jF^{1/2}$  kennzeichnet als charakteristischer Längenmaßstab eine senkrecht zur  $x_j$ -Richtung stehende Maschenoberfläche.

Mit den in diesem Abschnitt eingeführten Modellansätzen hat die kinetische Feinstrukturenergiegleichung (2.15) folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial E'}{\partial t}\right)} + \delta_j ({}^jC_5 \overline{E' u_j}) = & + C_2 C_{20} {}^jC_l m \overline{E'^{1/2}} (\delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j}) \delta_j \overline{u_i} - \delta_{j3} C_{T2} {}^jC_T l_h \overline{E'^{1/2}} \delta_j \overline{T} \\ & + \delta_j \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{Gr}} + \sigma_t ({}^jF \overline{E'})^{1/2} \right] {}^jC_5 \delta_j \overline{E'} \right\} \\ & - C_3 \frac{\overline{E'^{3/2}}}{l_{\epsilon m}} - \frac{C_{32} \overline{E'}}{\sqrt{Gr} l_{\epsilon m}^2} - \frac{2}{\sqrt{Gr}} (\delta_3 \overline{E'^{1/2}})^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Der Koeffizient  $C_{20}$  im Produktionsterm durch die aufgelöste Bewegung ist ähnlich den Koeffizienten  ${}^jC_l$ ,  ${}^jC_T$  und  ${}^jC_5$  ein reiner geometrieabhängiger Korrekturfaktor, der mit der Theorie lokalisotroper Turbulenz unter Zuhilfenahme des Kolmogorov-Spektrums (3.11a) berechnet werden kann.

Der Vorteil dieser Modellierung des charakteristischen Geschwindigkeitsmaßstabes ist, daß in der Feinstrukturenergiegleichung, als Konsequenz ihrer Herleitung aus den Navier-Stokes-Gleichungen, ein Auftriebsglied enthalten ist. Je nach Art der Schichtung und Ausrichtung des Gravitationskraftvektors wirkt es entweder als Produktions- oder als Vernichtungsterm von kinetischer Feinstrukturenergie durch Auftriebskräfte. In einem lokal stabil geschichteten Fluid wirkt der Auftriebsterm als Vernichtungsglied, was zu einer Abnahme der kinetischen Feinstrukturenergie und damit zu einer Abnahme der Feinstrukturspannungen, der Feinstrukturwärmeströme und der Feinstrukturdissipation führt. Bei einer lokal instabilen Schichtung ist der Auftriebsterm ein Produktionsglied und bewirkt durch ein Ansteigen der Feinstrukturenergie eine Zunahme der Feinstrukturgrößen. Bei einem indifferent geschichteten Medium ist der Auftriebsterm durch seine Art der Modellierung mit einem Gradientenansatz der momentanen, lokalen Temperaturdifferenz identisch Null und hat damit keinen Einfluß auf die Feinstrukturenergie und die übrigen subskaligen Größen.

In Wandnähe nimmt die Feinstrukturdissipation zu und die Feinstrukturspannungen und Feinstrukturwärmeströme nehmen ab, weil die Fluktuationsänderungen in diesem Bereich groß sind und die turbulenten Fluktuationen klein werden. Sie werden stark gedämpft, weil in unmittelbarer Wandnähe kein turbulenter Queraustausch mehr möglich ist. In Wandnähe muß die Feinstrukturenergie deshalb abnehmen, an der Wand ist sie identisch Null. In der modellierten Feinstrukturenergiegleichung wird dieser Effekt über die verschiedenen Terme der Feinstrukturdissipation und die Änderung der charakteristischen Längenmaßstäbe sowie der modellbestimmenden Koeffizienten gesteuert. In Wandnähe nehmen  $l_m$ ,  $l_h$  und  $l_{\epsilon m}$  sowie  $C_2$

und  $C_{T2}$  ab. Damit nimmt die Feinstrukturproduktion ab und die Feinstrukturdisipation zu, womit die Reduktion der Feinstrukturenergie in Wandnähe erreicht wird.

Wird das Maschennetz verfeinert, so werden die charakteristischen Längenmaßstäbe  $l_m$ ,  $l_h$  und  $l_{em}$  reduziert. Dies führt ebenso wie die Modellierung in Wandnähe zu einer Verringerung der Feinstrukturproduktion und damit zu einer insgesamt reduzierten Feinstrukturenergie im gesamten Kanal. Die turbulenten Austauschkoefizienten  $v_t$  und  $a_t$  und als Folge davon die Feinstrukturanteile  $\overline{u_i' u_j'}$  und  $\overline{T' u_j'}$  werden geringer. Die Grobstruktursimulation nähert sich einer direkten numerischen Simulation.

### 3.1.2.3 Modellkoeffizienten

Die modellbestimmenden Koeffizienten für die Feinstrukturaustauschkoefizienten  $v_t$  und  $a_t$  in den Gleichungen (3.10a,b) und damit für die Feinstrukturanteile  $\overline{u_i' u_j'}$  und  $\overline{T' u_j'}$  in den Ansätzen (3.1a,b) sind  $C_2$  und  $C_{T2}$ . Sie können mit Hilfe der Gleichung für die Geschwindigkeitsschwankungsquadrate (2.15) und einer analog dazu abgeleiteten Gleichung für die Temperaturschwankungsquadrate [Grötzbach (1977)] innerhalb der Feinstruktur durch deren zeitliche Mittelung bestimmt werden. Unter der Voraussetzung stationärer, lokalisotroper Turbulenz fallen in beiden skalaren Gleichungen die Zeitableitungs-, Konvektions- und Diffusionsterme weg. In der Gleichung der Geschwindigkeitsschwankungsquadrate innerhalb der Feinstruktur (2.15) fällt außerdem der Auftriebsproduktions-/vernichtungsterm heraus, weil dieser ein Korrelationstensor erster Ordnung ist, der bei lokalisotroper Turbulenz im zeitlichen Mittel verschwindet. Das Ergebnis dieser Vorgehensweise ist ein lokales Gleichgewicht zwischen dem verbleibenden Produktionsterm und dem molekularen Vernichtungsterm in beiden nunmehr algebraischen Gleichungen, die nach den gesuchten Koeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  aufgelöst werden können. Es folgt:

$$C_2 = \frac{\langle \bar{\epsilon} \rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{Gr}} (\delta_j \bar{u}_i \delta_j \bar{u}_i + \delta_j \bar{u}_i \delta_i \bar{u}_j) \right\rangle}{\left\langle C_{20} {}^{ij} C l_m \bar{E}'^{1/2} (\delta_j \bar{u}_i \delta_j \bar{u}_i + \delta_j \bar{u}_i \delta_i \bar{u}_j) \right\rangle} \quad (3.19a)$$

$$C_{T2} = \frac{\langle \bar{\epsilon}_T \rangle - \left\langle \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} (\delta_j \bar{T} \delta_j \bar{T}) \right\rangle}{\left\langle {}^j C_T l_h \bar{E}'^{1/2} (\delta_j \bar{T} \delta_j \bar{T}) \right\rangle} \quad (3.19b)$$

Die im Nenner dieser beiden Bestimmungsgleichungen auftretenden Dreifachkorrelationen zwischen aufgelösten Größen und der Feinstrukturenergie sind unter Zuhilfenahme der Theorie isotroper Turbulenz nur mit erheblichem Aufwand und zusätzlicher empirischer Information berechenbar. Sie werden deshalb bei Einführung der Korrekturfaktoren  $\gamma_1$  und  $\gamma_T$  getrennt und in einfacher berechenbare Korrelationen aufgespalten. Alle in den Gleichungen (3.19a,b) auftretenden Zweipunktkorrelationen sowie die Feinstrukturenergie können jetzt mit der Theorie lokalisotroper Turbulenz im  $k^{-5/3}$ -Bereich unter Zuhilfenahme des Kolmogorov-

und des Batchelor-Spektrums (3.11a,b) exakt bestimmt werden. Für die charakteristischen Längenmaßstäbe  $l_m$  und  $l_h$  werden bei der Koeffizientenberechnung die jeweiligen Maschenoberflächen  ${}^jF^{1/2}$  eingesetzt. Es folgt:

$$C_2 = \frac{1 - \alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{18}{55} \left(\frac{1}{Gr^{3/2} h^4 \langle \epsilon \rangle}\right)^{1/3} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D2_{ij}\right)}{\gamma_I \left[\alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{3/2} \left(\frac{9}{20}\right)^{1/2} \frac{18}{55} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{{}^jC D2_{ij} \left({}^jF EN2(j)\right)^{1/2}\right\}\right)} \quad (3.20a)$$

$$C_{T2} = \frac{\frac{1}{2} - \beta \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{9}{20} \left(\frac{1}{Gr^{3/2} Pr^3 h^4 \langle \epsilon \rangle}\right)^{1/3} \left(\sum_{j=1}^3 DT2_j\right)}{\gamma_T \alpha^{1/2} \beta \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{3/2} \left(\frac{9}{20}\right)^{3/2} \left(\sum_{j=1}^3 \left\{{}^jC_T DT2_j \left({}^jF EN2(j)\right)^{1/2}\right\}\right)} \quad (3.20b)$$

In diesen Bestimmungsgleichungen sind alle Längen mit der mittleren Maschenweite  $h$  normiert.  $\alpha$  und  $\beta$  sind die Kolmogorov- und die Batchelor-Konstanten,  $\Gamma$  ist die Gamma-Funktion.  $D2_{ij}$ ,  $DT2_j$  und  $EN2(j)$  sind Volumen- und Flächenintegrale, die aufgrund der Auswertung der Zweipunktkorrelationen entstehen und ausschließlich geometrische Informationen des Maschenennetzes beinhalten. Noch bestimmt werden müssen die zeitlich gemittelte Gesamtdissipation von kinetischer turbulenter Energie sowie die Korrekturfaktoren  $\gamma_I$  und  $\gamma_T$ . Die Einführung der Korrekturfaktoren erfolgt, weil die Dreipunktkorrelationen in den Nennern der Bestimmungsgleichungen (3.19a,b) in Zweipunktkorrelationen umgewandelt werden, die problemlos berechnet werden können.

Eine Näherung für die Dissipation kann aus der Analyse numerischer Ergebnisse unter Zuhilfenahme der Reynolds-Analogie gefunden werden. Bei einem Vergleich von Termen der Differentialgleichung der turbulenten kinetischen Energie (siehe Abbildung 3.3) ist zu erkennen, daß bei vergleichbarer Grashof-Zahl die Dissipationsprofile ähnlich sind, während dieser Sachverhalt für die Diffusions- und Produktionsterme nicht zutrifft. Das liegt daran, daß bis auf die Kopplung der Impuls- (2.2b) mit der Energiegleichung (2.2c) durch den Auftriebs- und den Trägheitsterm, die Grashof-Zahl die einzige dimensionslose Kennzahl ist, die die physikalische Ähnlichkeit zweier geometrisch ähnlicher Strömungsfelder gewährleistet. Allerdings variieren die Diffusions- und Produktionsterme im Natriumfall in Kanalmitte sehr stark, während sich im Luftfall beide Profile nur in Wandnähe ändern und in Kanalmitte weitgehend konstant bleiben. Die Variation im Natriumfall kann durch die Kopplung mit der Energiegleichung erklärt werden. Durch die hohe Temperaturleitfähigkeit von Natrium erreicht die Produktion von turbulenter kinetischer Energie in Kanalmitte ein Maximum. Das hängt bei der hier betrachteten niedrigen Rayleigh-Zahl mit der Dicke der thermischen Grenzschicht zusammen, die fast bis zur Kanalmitte reicht. Dies hat allerdings keinen Einfluß auf das Dissipationsprofil. Die Änderung der Produktion wird durch die Diffusion von turbulenter kinetischer Energie kompensiert. Das Dissipationsprofil wird aber weitgehend von der Dicke der hydrodynamischen Grenzschicht, das Produktionsprofil von der Dicke der thermischen Grenzschicht und das Diffusionsprofil von beiden Grenzschichtdicken beeinflusst. Weil

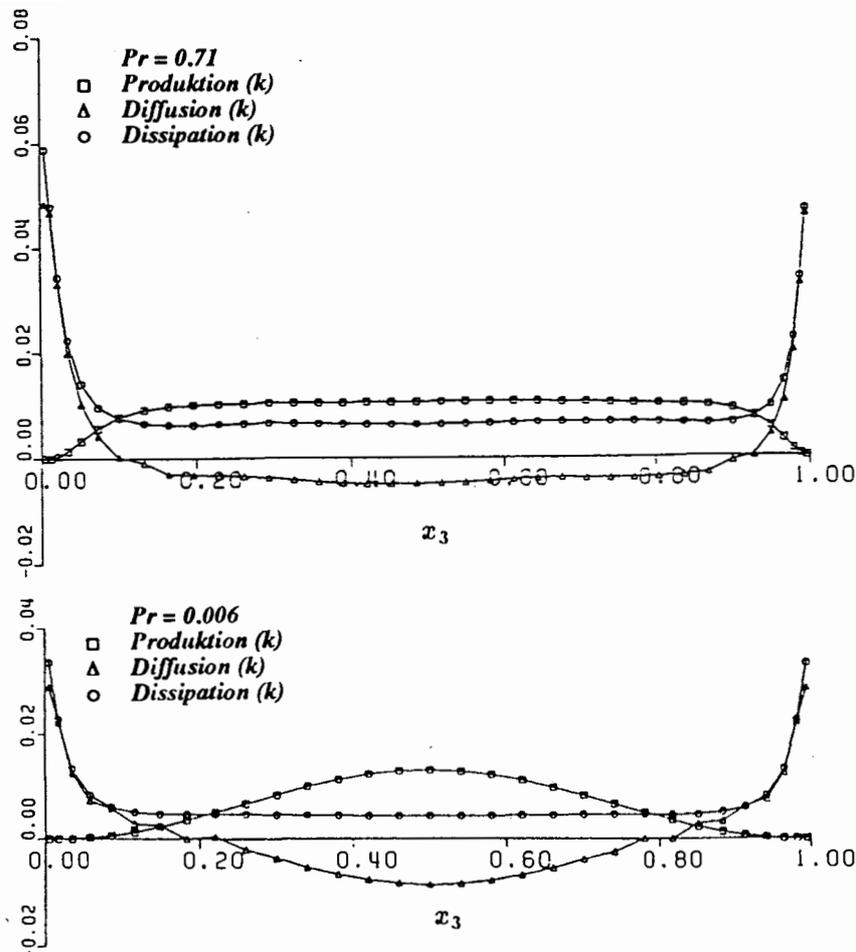


Abb. 3.3: Terme der turbulenten kinetischen Energiegleichung für Luft ( $Pr=0.71$ ,  $Ra=6.3 \cdot 10^5$ ) und Natrium ( $Pr=0.006$ ,  $Ra=6.0 \cdot 10^3$ ) bei ähnlicher Grashof-Zahl nach Wörner (1994).

sich im Natriumfall die Grenzschichtdicken stark unterscheiden, kann daraus nur schwer eine analytische Beziehung zur Bestimmung der zeitlich gemittelten Dissipation hergeleitet werden. Einen möglichen Ausweg bietet die Theorie der Reynolds-Analogie [Walz (1966)], die für Fluide unterschiedlicher Prandtl-Zahl einen Zusammenhang zwischen Wärmeübergang und Reibung an der Wand herstellt. Bei ähnlichen Grashof-Zahlen sind auch die Dissipationsprofile ähnlich und für den Luftfall, bei dem wegen der Prandtl-Zahl von ungefähr eins die Dicken der hydrodynamischen und thermischen Grenzschicht in etwa gleich sind, kann abgeschätzt werden:

$$\langle \varepsilon \rangle \approx \langle T'' u_3'' \rangle \quad (3.21)$$

Diese Abschätzung gilt nach Abbildung 3.3 nur in Kanalmitte außerhalb der hydrodynamischen Grenzschicht. Der in dieser Gleichung auftretende zeitlich gemittelte, vertikale turbulente Wärmestrom  $\langle T'' u_3'' \rangle$  ist unter Verwendung von empirischen Daten für die Nusselt-Zahl abschätzbar:

$$\langle \varepsilon(x_3) \rangle = \frac{Nu-1}{\sqrt{Gr}} \quad x_3 \geq \delta_u \quad (3.22)$$

Diese Beziehung ist ausschließlich für Rayleigh-Bénard-Konvektion und ein Fluid mit einer Prandtl-Zahl  $Pr=1$  gültig. Die Nusselt-Zahl muß deshalb mittels einer Korrelation  $Nu=f(Ra, Pr=1)$  berechnet werden. Im Fall der Fluidschicht mit interner Wärmequelle ist die Abschätzung (3.22) nicht gültig. Hier kann jedoch eine von Grötzbach (1986) abgeleitete Beziehung zur Bestimmung der Dissipation Verwendung finden.

Die Einführung der Korrekturfaktoren  $\gamma_1$  und  $\gamma_T$  ist aufgrund der Aufspaltung der Dreifachkorrelationen im Nenner der Gleichungen (3.19a,b) notwendig. Sie werden wie die zeitlich gemittelte Gesamtdissipation  $\langle \varepsilon \rangle$  mit Hilfe von Daten aus direkten numerischen Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft bestimmt. Die Vorgehensweise ist, durch eine Veränderung der Korrekturfaktoren  $\gamma_1$  und  $\gamma_T$  eine Variation der mit den Gleichungen (3.20a,b) berechneten Feinstrukturkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  zu erreichen und deren Einfluß auf den Energieinhalt der durch das Maschennetz aufgelösten Skalen im hohen Wellenzahlbereich zu untersuchen. Um die Gültigkeit des Feinstrukturmodells zu gewährleisten, muß die Steigung der Energiespektren in diesem Bereich zumindest dem Kolmogorov- und dem Batchelor-Spektrum (3.11a,b) folgen oder besser einen steileren Abfall als  $k^{-5/3}$  aufweisen. Nur dort ist die Theorie lokalisotroper Turbulenz gültig. Zu flach verlaufende Energiespektren in diesem gerade noch durch das Maschennetz aufgelösten Bereich deuten auf eine unzureichende Dämpfung der aufgelösten Grobstruktur durch das Feinstrukturmodell hin, das im Bereich der kleinen, nicht aufgelösten Skalen dissipativen Charakter haben muß. In Abbildung 3.4 ist dazu ein Vergleich verschiedener eindimensionaler Energiespektren dargestellt.

Bei den Grobstruktursimulationen sind alle anderen in die Koeffizientenberechnung eingehenden und der numerischen Simulation zugrundeliegenden Einflußparameter konstant, d.h. das Maschennetz, die Periodenlängen und die physikalischen Einflußgrößen  $Ra$ ,  $Pr$  und  $\langle \varepsilon \rangle$  werden nicht verändert. Die Periodenlängen der direkten numerischen Simulationen ( $Ra=3.8 \cdot 10^5$ ,  $6.3 \cdot 10^5$ ) betragen  $X_1=X_2=7.92$ , die der Grobstruktursimulationen ( $Ra=2.5 \cdot 10^6$ )  $X_1=X_2=8$ . Ist  $\gamma_1=\gamma_T=1.0$ , dann beträgt der maximale Wert der Feinstrukturkoeffizienten gemäß den Gleichungen (3.20a,b) für  $C_2=0.04$  und  $C_{T2}=0.13$ . Das Ergebnis sind die in Abbildung 3.4 dargestellten zu flach verlaufenden Energiespektren im hohen Wellenzahlbereich, d.h. ein zu geringer dämpfender Einfluß des Feinstrukturmodells. Die Feinstrukturkoeffizienten liegen in diesem Fall im Vergleich zu den in Tabelle 3.1 aufgezählten Koeffizienten anderer Autoren sehr niedrig.

Werden die Korrekturfaktoren  $\gamma_1$ ,  $\gamma_T$  so gewählt, daß die Feinstrukturkoeffizienten  $C_2$ ,  $C_{T2}$  mit den von Schmidt & Schumann (1989) mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz und der Spektren im Trägheitsbereich (3.11a,b) berechneten Koeffizienten

$$C_2 = \left( \frac{2}{3\alpha} \right)^{3/2} \frac{1}{\pi} = 0.0856 \quad (3.23a)$$

$$C_{T2} = \left( \frac{2}{3\alpha} \right)^{1/2} \frac{4}{3\beta} \frac{1}{\pi} = 0.204 \quad (3.23b)$$

übereinstimmen, dann repräsentieren die größten durch das Maschennetz aufgelösten Wellenzahlen genau das erwartete Kolmogorov- und Batchelor-Spektrum und zeigen einen  $k_1^{-5/3}$ -

Abfall. Diese Werte für  $C_2$  und  $C_{T2}$  entsprechen in etwa den maximal möglichen Koeffizienten in der TURBIT-Berechnung, wenn die Subtrahenden im Zähler der beiden Bestimmungsgleichungen (3.20a,b) im Fall hoher Rayleigh-Zahlen oder sehr grober Gitter gegen Null gehen ( $C_2=0.07$ ,  $C_{T2}=0.18$ ). Im Vergleich zu den dimensionslosen Energiespektren der direkten numerischen Simulationen verlaufen die Spektren der Grobstruktursimulation im gleichen Wellenzahlbereich jedoch immer noch zu flach.

Aus diesem Grund werden die Korrekturfaktoren  $\gamma_1$ ,  $\gamma_T$  so gewählt, daß die Feinstrukturkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  einen vergleichbaren Verlauf der Energiespektren der Grobstruktursimulation mit den Energiespektren der direkten numerischen Simulationen bewirken. Die maximalen Werte der Feinstrukturkoeffizienten betragen in diesem Fall  $C_2=0.105$  und  $C_{T2}=0.215$ . Sie bilden die Grundlage für alle in dieser Arbeit vorgestellten Grobstruktursimulationen und werden durch die Anpassung der Korrekturfaktoren  $\gamma_1$  und  $\gamma_T$  in den Bestimmungsgleichungen (3.20a,b) ermittelt. Diese Vorgehensweise erscheint deshalb zulässig, weil es sich in Abbildung 3.4 um dimensionslose Energiespektren handelt, die zwar mit zunehmender Rayleigh-Zahl einen breiteren Wellenzahlbereich umfassen, jedoch der dimensionslose Energieinhalt einer bestimmten Wellenzahl mit der gewählten Normierung von der Rayleigh-Zahl unabhängig ist. Darauf deuten auch die Energiespektren der direkten numerischen Simulationen in Abbildung 3.4 hin, die bei unterschiedlichen Rayleigh-Zahlen, mit Ausnahme des sehr hohen Wellenzahlbereichs, ähnlich verlaufen. Diese Ähnlichkeit muß demnach auch von den Grobstruktursimulationen bei hohen Rayleigh-Zahlen erfüllt werden.

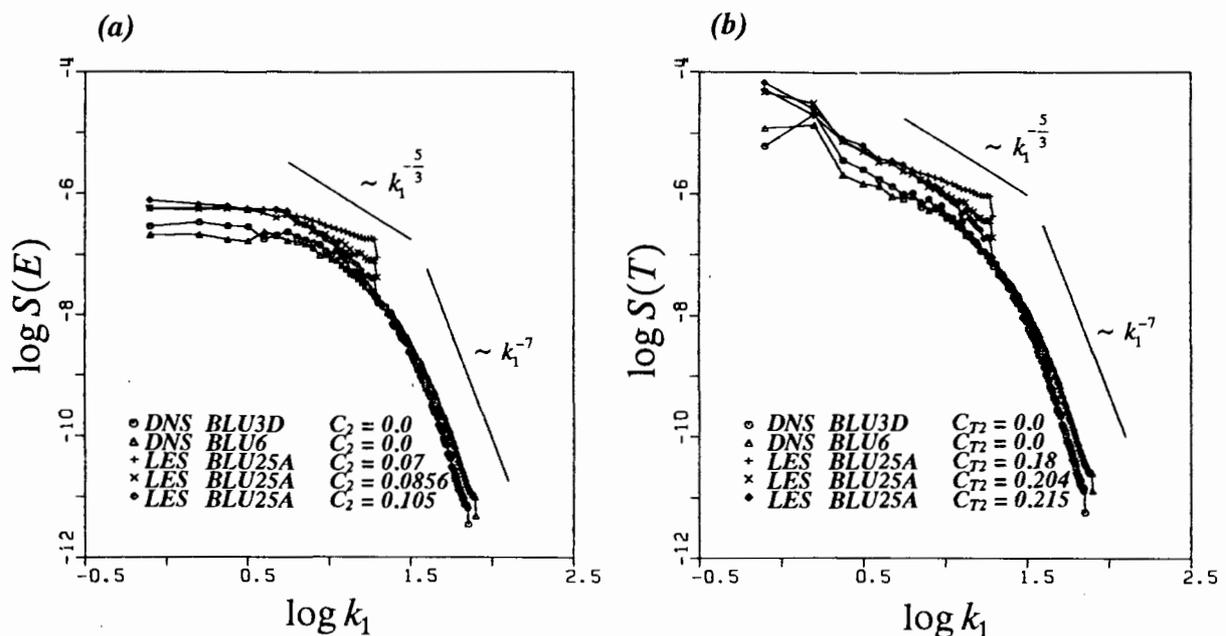


Abb. 3.4: Eindimensionale Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie (a) und der Temperaturfluktuationen (b) bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft in Kanalmitte. Variation der Feinstrukturkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  bei der Grobstruktursimulation ( $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ) im Vergleich zu direkten numerischen Simulationen ( $Ra=3.8 \cdot 10^5$ ,  $6.3 \cdot 10^5$ ).

Die unterschiedlichen Verläufe der Spektren der direkten numerischen Simulationen bei den hohen Wellenzahlen kann in diesem Fall mit der Auflösungsgrenze des gewählten Maschennetzes erklärt werden. Sie deutet sich in der zunehmenden Abflachung der Spektren in diesem Bereich an. Dieses sogenannte "Aliasing" bewirkt, daß der Energieinhalt der höheren nicht mehr aufgelösten Wellenzahlen den kleineren Wellenzahlen zugeschlagen wird und den physikalischen Energietransport von kleinen zu großen Wellenzahlen teilweise rückgängig macht. Der zu hohe Energiegehalt der in Abbildung 3.4 dargestellten Energiespektren aller Grobstruktursimulationen bei kleinen Wellenzahlen wird nicht durch das Feinstrukturmodell bedingt, sondern hat seine Ursache in der Wahl der Periodenlängen. Sie sind, wie es scheint, für die berechnete Rayleigh-Zahl zu klein und bewirken ähnlich dem eben beschriebenen "Aliasing" im hohen Wellenzahlbereich ein "Aliasing" im niederen Wellenzahlbereich. Der Energieinhalt der nicht durch die zu geringen Kanalabmessungen auflösbaren makroskopischen Strukturen wird größeren Wellenzahlen zugeschlagen. Dieser Sachverhalt und die geeignete Wahl der Periodenlängen wird ausführlich in Kapitel 4.2.1 diskutiert.

Die so ermittelten Modellkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  bleiben während der gesamten Simulation konstant. Sie beinhalten keinen Schichtungseinfluß, variieren jedoch als Funktion der Ortsvariablen  $x_3$  und sind damit in der Lage, Wandeinflüsse zu berücksichtigen:

$$C_2, C_{T2} = f(x_3) \quad (3.24)$$

Wenn in Wandnähe das Maschennetz feiner wird, d.h.  $\Delta x_3(x_3)$  abnimmt, werden die Modellkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$ , daraus folgend die Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$  und  $a_t$  und damit die Feinstrukturgrößen  $\overline{u_i' u_j'}$  und  $\overline{T' u_j'}$  ebenfalls reduziert. Dieser Einfluß wird zum Teil durch das Ansteigen der Dissipation in der viskosen Grenzschicht kompensiert. Ihre Maximalwerte haben die Koeffizienten immer in Kanalmitte, weil dort das Maschennetz in der Regel am größten ist. Sie sind in diesem Bereich nahezu konstant.

Die Möglichkeit einer dynamischen Feinstrukturmodellierung mit TURBIT, bei der

$$C_2, C_{T2} = f(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.25)$$

eine Funktion von Ort und Zeit sind, wäre durch die Berechnung der Gesamtdissipation aus Grobstrukturgrößen und die Verwendung der momentanen, lokalen Feinstrukturenergie sowie des momentanen, lokalen Deformationstensors für jeden Gitter- und zu jedem Zeitpunkt in den Gleichungen (3.20a,b) gegeben. Wesentliche Änderungen in der Grobstruktur würden so durch die dynamische Modellkoeffizientenberechnung sofort auf die Feinstruktur der turbulenten Fluktuationsbewegung zurückwirken, die damit ihrerseits wieder die Grobstruktur beeinflussen könnte. Das wäre natürlich auch mit einem erhöhten Speicherplatz- und Rechenaufwand verbunden, der zunächst abgeschätzt werden müßte. Analog zu der dynamischen Modellkoeffizientenberechnung von Germano et al. (1991) ist ein Vorteil dieser Vorgehensweise, daß die Feinstrukturterme in den Erhaltungsgleichungen sowohl Senken- als auch Quellterme sein können. Damit wird entweder eine Dämpfung oder eine Anfachung der

Grobstruktur durch das Feinstrukturmodell erreicht. Ein Nachteil ist allerdings die mögliche Instabilität des Lösungsverfahrens bei zu geringer Dämpfung der aufgelösten Größen.

### 3.1.2.4 Längenmaßstäbe

Ist die mittlere Gitterweite  $h$  des Maschennetzes so klein, daß sich die Feinstruktur turbulenz isotrop verhält, dann werden für flächengemittelte Größen die Quadratwurzel der senkrecht zur jeweiligen physikalischen Größe stehenden Maschenoberfläche und für volumengemittelte Größen die Kubikwurzel des jeweils betrachteten Maschenvolumens als die charakteristischen Längenmaßstäbe der subskaligen turbulenten Fluktuationsbewegung angesehen. Gemäß Abbildung 3.1 ist die Forderung isotroper Turbulenz bei den hier untersuchten Strömungen außerhalb des unmittelbaren Wandbereiches erfüllt und gemäß Abbildung 3.4 wird der Trägheitsbereich bei den in dieser Arbeit durchgeführten Grobstruktursimulationen erreicht. Demnach gilt ganz allgemein für die charakteristischen Längenmaßstäbe der Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $l_m, l_h$  in (3.10a,b) und der Feinstrukturdissipation  $l_{em}$  in (3.15):

$$l_m, l_h = [ {}^j F(x_3) ]^{1/2} = [ \Delta x_1 \Delta x_2, \Delta x_1 \Delta x_3(x_3), \Delta x_2 \Delta x_3(x_3) ]^{1/2} \quad (3.26a)$$

$$l_{em} = [ V(x_3) ]^{1/3} = [ \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3(x_3) ]^{1/3} \quad (3.26b)$$

Der Vorteil dieser Modellierung ist, daß bei einer Gitterverfeinerung die charakteristischen Längenmaßstäbe abnehmen. Als Folge davon werden die Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$  und  $a_t$  und damit die Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  reduziert. Im dissipativen Wellenzahlbereich werden kleinere Wirbel durch das Maschennetz aufgelöst, d.h. die Grobstruktursimulation nähert sich einer direkten numerischen Simulation. Dieser Einfluß besteht direkt, weil  $l_m$  und  $l_h$  in die Ansätze (3.10a,b) explizit eingehen. Ein indirekter Einfluß ist die gleichzeitige Reduktion der kinetischen Feinstrukturenergie. Kleinere Längenmaßstäbe führen zu einer Verringerung der Feinstrukturproduktion in der modellierten kinetischen Feinstrukturenergiegleichung (3.18) und damit zu einer insgesamt reduzierten Feinstrukturenergie, deren Wurzel in die Ansätze für die Feinstrukturaustauschkoeffizienten (3.10a,b) eingeht.

Eine weitere Anforderung die in Kapitel 3.1.2.1 an das Feinstrukturmodell gestellt wird, ist die Verringerung der Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  in Wandnähe. Dort werden die turbulenten und damit auch die subskaligen turbulenten Fluktuationen senkrecht zur Wand wegen der Behinderung des turbulenten Austausches stark gedämpft. Innerhalb der laminaren Unterschichten in unmittelbarer Wandnähe, so die physikalische Vorstellung, gehen sie gegen Null. Im Feinstrukturmodell wird dieser Einfluß ähnlich der im vorigen Abschnitt beschriebenen Vorgehensweise durch eine Reduktion der charakteristischen Längenmaßstäbe  $l_m, l_h$  und  $l_{em}$  im Wandbereich beschrieben. Dies geschieht durch zwei unterschiedliche Maßnahmen. Werden die Grenzschichten durch das Maschennetz aufgelöst, dann ist dies mit einer lokalen Gitterverfeinerung im Wandbereich verbunden, d.h.  $\Delta x_3(x_3)$  nimmt ab. Es gelten die Erläuterungen des vorigen Abschnittes, in der eine Gitterverfeinerung im gesamten Kanalbereich disku-

tiert wird. Um die Inhomogenität in unmittelbarer Wandnähe verstärkt zu berücksichtigen, werden die charakteristischen Längenmaßstäbe entsprechend der Prandtl'schen Theorie der Mischungsweglänge [Prandtl (1925)] ( $l = \kappa x_3$ , von Kármán-Konstante  $\kappa = 0.41$  [Kármán (1930)]) gegebenenfalls mit folgender Beziehung noch weiter reduziert:

$$l_m, l_h, l_{em} = C_w |n_w| \quad (3.27)$$

$|n_w|$  ist der kürzeste Wandabstand. Die Reduktion der Längenmaßstäbe in Wandnähe hat einen direkten und indirekten lokalen Einfluß auf die Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$  und  $a_t$ . Einerseits gehen  $l_m$  und  $l_h$  explizit in die Ansätze (3.10a,b) ein, andererseits bewirken die reduzierten Längenmaßstäbe  $l_m$ ,  $l_h$  und  $l_{em}$  implizit reduzierte Feinstrukturaustauschkoeffizienten durch eine verringerte Feinstrukturenergie in Wandnähe, weil die Feinstrukturproduktion dort abnimmt und die Feinstrukturdissipation ansteigt. Laut Schmidt & Schumann (1989) sollte der Wert für den Wandkoeffizienten  $C_w$  im Bereich des Feinstrukturdissipationskoeffizienten  $C_3$  liegen. Sie wählen  $C_w = C_3 = 0.845$ . In dieser Arbeit wird  $C_w = 0.74$  verwendet. Dieser Wert kann durch eine zeitliche Mittelung des Rotta-Ansatzes für die Feinstrukturdissipation und nachfolgender Abschätzung dieser sowie der Feinstrukturenergie hergeleitet werden. Er erfüllt die Forderung von Schmidt & Schumann (1989) und hat einen dem Koeffizienten  $C_3 = 0.633$  ähnlichen Wert.

Ansatz (3.27) gilt laut Prandtl in Wandnähe, jedoch außerhalb der Unterschichten. In diesem Zusammenhang spricht er auch von Wandturbulenz und macht die Annahme, daß hier ebenso wie in der Reibungsschicht die gesamte Schubspannung identisch der Wandschubspannung und damit konstant ist. Analoges gilt auch für den gesamten Wärmestrom, der in diesem Bereich identisch dem Wandwärmestrom und damit konstant ist. Es ist davon auszugehen, daß diese von Prandtl für erzwungene Konvektion abgeleitete Beziehung in dem betrachteten Bereich auch für natürliche Konvektion gültig ist, weil dort durch die horizontale Umverteilung des auf die Wände aufprallenden Fluides lokale Scherschichten existieren.

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, daß die reduzierten Längenmaßstäbe in Gleichung (3.27) nicht die physikalische Bedeutung von charakteristischen Längen im Sinne der Größe von nicht aufgelösten kleinskaligen Turbulenzelementen haben. Dies zeigen die Spektren in Abbildung 3.1. Es handelt sich vielmehr, entsprechend der Prandtl'schen Betrachtungsweise, um einen Mischungsweg, den in diesem Fall ein kleinskaliger Turbulenzballen zurücklegt, bis die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen der alten und der neuen Umgebung (Scherschicht) des Fluidballens gleich der mittleren Schwankungsgeschwindigkeit ist. Dieser Feinstrukturmischungsweg, so die physikalische Vorstellung, wird in Wandnähe durch den behinderten turbulenten Queraustausch reduziert. Zwar stimmt laut Prandtl der Mischungsweg der Größenordnung nach mit dem Durchmesser oder genauer ausgedrückt dem Bremsweg des Flüssigkeitsballens, der dem Durchmesser jedoch proportional ist, überein, das gilt jedoch nicht mehr in Wandnähe. Hier könnten sich nur noch Fluidballen, deren Durchmesser kleiner als der Wandabstand wäre, quer zur Strömungsrichtung bewegen, so daß der Mischungsweg an der Wand gegen Null gehen muß. Gemäß dieser Argumentation kann der Mischungsweg außerhalb der Wandschicht auch als diejenige Länge interpretiert werden, die ein

Turbulenzelement im Mittel zurücklegt, bevor es sich mit der Umgebung vermischt und damit seine Individualität aufgibt. Laut Zierep (1982a) ist er damit ein makroskopisches Analogon zur mittleren freien Weglänge der Gaskinetik.

Andere Autoren, wie z.B. Deardorff (1980) und Moeng (1984), wählen eine alternative Methode, um die Wandinhomogenität zu berücksichtigen. Sie greifen nicht direkt in die Berechnung der Feinstrukturaustauschkoeffizienten ein, sondern nur indirekt, indem sie die Feinstrukturenergie reduzieren. Das erreichen sie durch eine Erhöhung der Feinstrukturdispipation im Wandbereich, indem der Modellkoeffizient  $C_3=0.7$  auf den Wert  $C_3=3.9$  angehoben wird. Die charakteristischen Längenmaße bleiben bei ihnen unverändert.

Wie in Kapitel 3.1.2.1 diskutiert und in Abbildung 3.2 dargestellt, haben Auftriebskräfte einen großen Einfluß auf den Energieinhalt der Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen aller Wellenzahlbereiche. Es wird aber deutlich, daß vor allem der Energieinhalt der kleinen Turbulenzstrukturen bei stabiler Schichtung verhältnismäßig stärker reduziert wird, als der der großen Skalen. Dies muß bei der Modellierung der Feinstruktur berücksichtigt werden. Die Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  können durch eine Veränderung der Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$  und  $a_t$  beeinflußt werden.  $v_t$  und  $a_t$  sind wegen der Modellierung des charakteristischen Geschwindigkeitsmaßstabes mit der Wurzel der kinetischen Feinstrukturenergie schichtungsabhängig, d.h. ihr Wert steigt oder sinkt je nach Art der Schichtung. Es liegt deshalb nahe, daß auch die charakteristischen Längenmaßstäbe von der Art der Schichtung beeinflußt werden. Werden sie, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, als eine Mischungsweglänge interpretiert, so ist es dieser Feinstrukturmischungsweg, der, z.B. im Falle einer stabilen Schichtung, verringert wird.

In einem stabil geschichteten Medium nehmen die Feinstrukturdispipation  $\overline{\varepsilon'}$  ebenso wie die Feinstrukturkorrelationen  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T' u'_j}$  ab. Diesem Sachverhalt liegt die physikalische Vorstellung zugrunde, daß die kleinskaligen turbulenten Fluktuationen, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, gedämpft und die Fluktuationsänderungen als Funktion von Ort und Zeit insgesamt geringer werden. Dieses Ergebnis kann aus Untersuchungen der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht oder einer Fluidschicht mit interner Wärmequelle abgeleitet werden. Demnach müßte, um diesen Einfluß mit den hier vorgestellten Modellen richtig zu erfassen, der Feinstrukturdispersionslängenmaßstab  $l_{em}$  in stabiler Schichtung ansteigen, die Feinstrukturmaßstäbe für Impuls und Wärme,  $l_m$  und  $l_h$ , absinken.

In dem von Deardorff (1980) in Kapitel 3.1.1 durch die Gleichungen (3.6-8) beschriebenen Modell werden jedoch alle Längenmaßstäbe, d.h. insbesondere auch der Feinstrukturdispersionslängenmaßstab  $l_{em}$  im Rotta-Ansatz, bei stabiler Schichtung reduziert. Diesen Einfluß, aus dem eine zu große Feinstrukturdispersion resultiert, versucht er durch einen kleineren Wert des Koeffizienten  $C_3$  in stabiler Schichtung auszugleichen. Bei instabiler oder indifferenter Schichtung verwendet er  $l_{em}=\Delta$  und  $C_3=0.7$ , bei stabiler Schichtung  $l_{em}$  gemäß Gleichung (3.8) und  $C_3=0.19$ . Gerz & Schumann (1991) und Schumann (1991) stellen jedoch durch die Analyse von Daten aus direkten numerischen Simulationen fest, daß der Feinstrukturdispersionslängenmaßstab  $l_{em}$  in Strömungen ohne mittlere Geschwindigkeit, d.h. ohne

mittlere Scherung, nahezu konstant bleibt oder wie zuvor erläutert sogar leicht ansteigt. Sie greifen im Falle stabiler Schichtung überhaupt nicht auf die charakteristischen Längenmaßstäbe ein, sondern reduzieren mit einer Funktion, die die Feinstrukturenergie und die Brunt-Väisälä-Frequenz enthält, ausschließlich den Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $a_t$  für die vertikalen Feinstrukturwärmeflüsse  $\overline{T'u'_j}$ .

Die Vorgehensweise in dieser Arbeit ist, aufgrund der Energiespektren der subskaligen turbulenten Fluktuationen in Abbildung 3.2 und der zuvor beschriebenen physikalischen Interpretation der kleinskaligen Transportvorgänge in einem geschichteten Medium, im instabilen oder indifferenten Fall alle Längenmaßstäbe unverändert zu lassen, d.h. es gelten die Gleichungen (3.26a,b). Im Fall einer lokal stabilen Temperaturschichtung werden dagegen die Feinstruktur­längenmaßstäbe für Impuls und Wärme,  $l_m$  und  $l_h$ , reduziert, um eine Abnahme der Feinstrukturaustauschkoeffizienten  $v_t$  und  $a_t$  und damit der Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  und  $\overline{T'u'_j}$  zu bewirken. Der Feinstruktur­dissipations­längenmaßstab  $l_{em}$  wird, den Ergebnissen von Schumann (1991) folgend, nicht verändert. Die notwendige Abnahme der Feinstruktur­dissipation  $\overline{\varepsilon'}$  wird indirekt, durch die Abnahme der Feinstruktur­produktion durch die Hauptströmung und der Wirkung des Auftriebstermes als Vernichtungsterm in der Feinstruktur­energiegleichung (3.18), verursacht. Dies führt im stabilen Fall zu einer reduzierten Feinstruktur­energie, die, weil sie in den Rotta-Ansatz (3.15) zur Modellierung der Feinstruktur­dissipation eingeht, diese ebenfalls wie gewünscht reduziert.

Deardorff (1980) verringert die Längenmaßstäbe mit der Begründung, die Turbulenz werde mit zunehmend stabilerer Schichtung kleinskaliger. Dieser physikalischen Vorstellung kann hier nicht gefolgt werden. Kleinskaligere Turbulenz müßte sich in einer Verschiebung der Energiespektren der turbulenten Fluktuationen hin zu höheren Wellenzahlen  $k=2\pi/l$  bemerkbar machen. Dies ist jedoch, wie die Spektren in Abbildung 3.2 und auch Spektren der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht von Schmidt (1988) zeigen, nicht der Fall. Eher das Gegenteil trifft zu. Das Intensitätsmaximum der turbulenten Fluktuationen bleibt im langwelligeren Bereich und der Energieinhalt bei hohen Wellenzahlen verarmt. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Reduktion der Längenmaßstäbe  $l_m$  und  $l_h$  wird vielmehr, wie schon zuvor angedeutet, mit einer Dämpfung des turbulenten Queraustausches und daraus folgend reduzierten Feinstruktur­mischungsweglängen in stabiler Schichtung begründet. Diese müssen mit zunehmend stabilerer Schichtung gegen Null gehen und bewirken, wie Abbildung 3.2 zeigt, zunächst eine sehr viel stärkere Dämpfung der hochfrequenten Fluktuationen, als derjenigen im niederfrequenten Bereich.

Die Ableitung charakteristischer Längenmaßstäbe erfolgt mit Hilfe der Feinstruktur­energiegleichung. In stationärer, homogener Turbulenz kann die Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie innerhalb der Feinstruktur (2.15), bei Vernachlässigung von Konvektions- und Diffusionstermen, auf eine Bilanz zwischen dem Produktionsterm durch die Hauptströmung, dem Produktions-/Vernichtungsterm durch Auftriebskräfte und dem molekularen Vernichtungsterm reduziert werden:

$$\left(\frac{\partial E'}{\partial t}\right) = -\overline{u'_i u'_j} \delta_j \overline{u_i} + \delta_{j3} \overline{T' u'_j} - \frac{1}{\sqrt{Gr}} \overline{\delta_j u'_i \delta_j u'_i} = 0 \quad (3.28)$$

Es ist davon auszugehen, daß diese Näherungsgleichung in genügendem Abstand von der Wand bei mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen im Wellenzahlbereich der kleinskaligen Fluktuationen gültig ist.

Werden in diese Gleichung die in Kapitel 3.1.2.2 eingeführten Modellannahmen für die unbekanntenen Feinstrukturkorrelationen eingesetzt, wobei für die Feinstrukturdissipation  $\overline{\epsilon'}$  gemäß (3.15) wegen der Forderung des ausreichenden Wandabstandes ausschließlich der erste Term, d.h. der Rotta-Ansatz, berücksichtigt wird, so folgt:

$$\left(\frac{\partial E'}{\partial t}\right) = C_2 C_{20} {}^i C l_m \overline{E'}^{1/2} (\delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j}) \delta_j \overline{u_i} - \delta_{j3} C_{T2} {}^j C_T l_h \overline{E'}^{1/2} \delta_j \overline{T} - C_3 \frac{\overline{E'}^{3/2}}{l_{\epsilon m}} = 0 \quad (3.29)$$

Diese Gleichung wird so umgeformt, daß sie ausschließlich Größen mit der Dimension einer Länge und dimensionslose Koeffizienten enthält. Das Ergebnis lautet:

$$\frac{C_2 C_{20} {}^i C l_m l_{\epsilon m}}{C_3 l_s^2} - \frac{C_{T2} {}^j C_T l_h l_{\epsilon m}}{C_3 l_b^2} = 1 \quad (3.30)$$

Hierin treten die beiden neuen Größen  $l_s$  und  $l_b$  auf, die die Dimension einer Länge besitzen. Sie sind definiert als:

$$l_s^2 = \frac{\overline{E'}}{(\delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j}) \delta_j \overline{u_i}} = \frac{2 \overline{E'}}{(\delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j})^2} \quad (3.31a)$$

$$l_b^2 = \frac{\overline{E'}}{\delta_{j3} \delta_j \overline{T}} \quad (3.31b)$$

$l_s$  ist damit als Quotient von Feinstrukturenergie zu dem Quadrat des Deformationstensors der aufgelösten Ableitungen der Geschwindigkeit ein neuer charakteristischer Längenmaßstab für die Feinstrukturanteile  $\overline{u'_i u'_j}$  im Impulsfeld.  $l_b$  entspricht dem mit Gleichung (3.8) von Deardorff (1980) eingeführten Längenmaßstab. Im Gegensatz zu Deardorff wird hier  $l_b$  als Quotient von Feinstrukturenergie zu dimensionsloser Brunt-Väisälä-Frequenz jedoch bei stabiler Schichtung nicht zur Reduzierung aller charakteristischen Längenmaße verwendet, sondern dient ausschließlich als charakteristischer Längenmaßstab der Feinstrukturanteile  $\overline{T' u'_j}$  im Temperaturfeld.

Für den Quotienten der neuen charakteristischen Längenmaßstäbe gilt folgende Identität:

$$\frac{l_s^2}{l_b^2} = \frac{2 \delta_{j3} \delta_j \overline{T}}{(\delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j})^2} = Ri_G = Ri_{fSGS} Pr_{tSGS} \quad (3.32)$$

$Ri_{fSGS}$  ist hierin identisch mit der in Gleichung (3.4) eingeführten Feinstruktur-Fluß-Richardson-Zahl,  $Pr_{fSGS}$  mit der in Gleichung (3.5) eingeführten turbulenten Feinstruktur-Prandtl-Zahl.  $Ri_G$  ist eine Gradienten-Richardson-Zahl, die ähnlich  $Ri_{fSGS}$  von der Art der Schichtung abhängt. Sie ist definiert als der Quotient des durch das Maschennetz aufgelösten Gradienten der Temperatur zu dem Quadrat des Deformationstensors der aufgelösten Ableitungen der Geschwindigkeit. Der Nenner dieser Kennzahl ist immer positiv. Bei einem instabil geschichteten Medium gilt  $Ri_G < 0$ , bei indifferenter Schichtung existiert kein Temperaturgradient und es ist  $Ri_G = 0$  und bei stabiler Schichtung gilt  $Ri_G > 0$ .

Gleichung (3.30) kann unter Berücksichtigung von Gleichung (3.32) nach  $l_s$  oder  $l_b$  aufgelöst werden und stellt sich als Funktion der Gradienten-Richardson-Zahl dar. Dabei werden alle Geometrie-Koeffizienten vernachlässigt, d.h. ein isotropes Maschennetz betrachtet:

$$\frac{l_s}{l} = \sqrt{\frac{C_2}{C_3}} \sqrt{1 - \frac{C_{T2}}{C_2} Ri_G} \quad (3.33a)$$

$$\frac{l_b}{l} = \sqrt{\frac{C_{T2}}{C_3}} \sqrt{\frac{C_2}{C_{T2}} \frac{l}{Ri_G} - 1} \quad (3.33b)$$

Für die kritische Gradienten-Richardson-Zahl folgt aus beiden Gleichungen der Zusammenhang  $Ri_{Gkrit} = C_2/C_{T2}$ . Sie ist demnach von der Wahl der Modellkoeffizienten abhängig. Diese betragen, wie in Kapitel 3.1.2.3 beschrieben, im betrachteten Kanalbereich  $C_2 = 0.105$  und  $C_{T2} = 0.215$ . Damit folgt  $Ri_{Gkrit} = 0.48$ .  $l$  entspricht dem charakteristischen Längenmaßstab im Falle instabiler oder indifferenter Schichtung gemäß den Gleichungen (3.26a,b).

Für den Fall der stabilen Schichtung werden folgende neuen Längenmaßstäbe definiert:

$$l_m = G_m = l_s \sqrt{\frac{C_3}{C_2}} = l \sqrt{1 - \frac{C_{T2}}{C_2} Ri_G} = \left( \frac{2 C_3 \overline{E'}}{C_2 (\delta_j \overline{u}_i + \delta_i \overline{u}_j)^2} \right)^{1/2} \quad (3.34a)$$

$$l_h = G_h = l_b \sqrt{C_3} = l \sqrt{\frac{C_2}{Ri_G} - C_{T2}} = \left( \frac{C_3 \overline{E'}}{\delta_{j3} \delta_j \overline{T}} \right)^{1/2} \quad (3.34b)$$

Für  $Ri_G \rightarrow Ri_{Gkrit}$  gehen beide charakteristischen Längenmaßstäbe,  $G_m$  und  $G_h$ , gegen Null. Dabei wird  $G_h$  stärker reduziert als  $G_m$ . Die Modellkoeffizienten werden so bestimmt, daß der Längenmaßstab  $G_m$  im Fall indifferenter Schichtung, d.h.  $Ri_G \rightarrow 0$ , in den Längenmaßstab der instabilen Schichtung übergeht. Der Längenmaßstab  $G_h$  ist nicht definiert für  $Ri_G \leq 0$ . Der in Gleichung (3.34b) abgeleitete Modellkoeffizient  $\sqrt{C_3} = 0.79$  kommt dem von Deardorff (1980) vorgeschlagenen Koeffizienten in Gleichung (3.8) sehr nahe. Nach Schumann (1991) sollte dieser Koeffizient für isotrope Turbulenz  $(2/3)^{1/2} = 0.82$  betragen.

Abbildung 3.5 zeigt den Verlauf der charakteristischen Längenmaßstäbe  $G_m$  und  $G_h$  bei stabiler Schichtung gemäß den Gleichungen (3.34a,b). Sie werden dynamisch als Funktion von

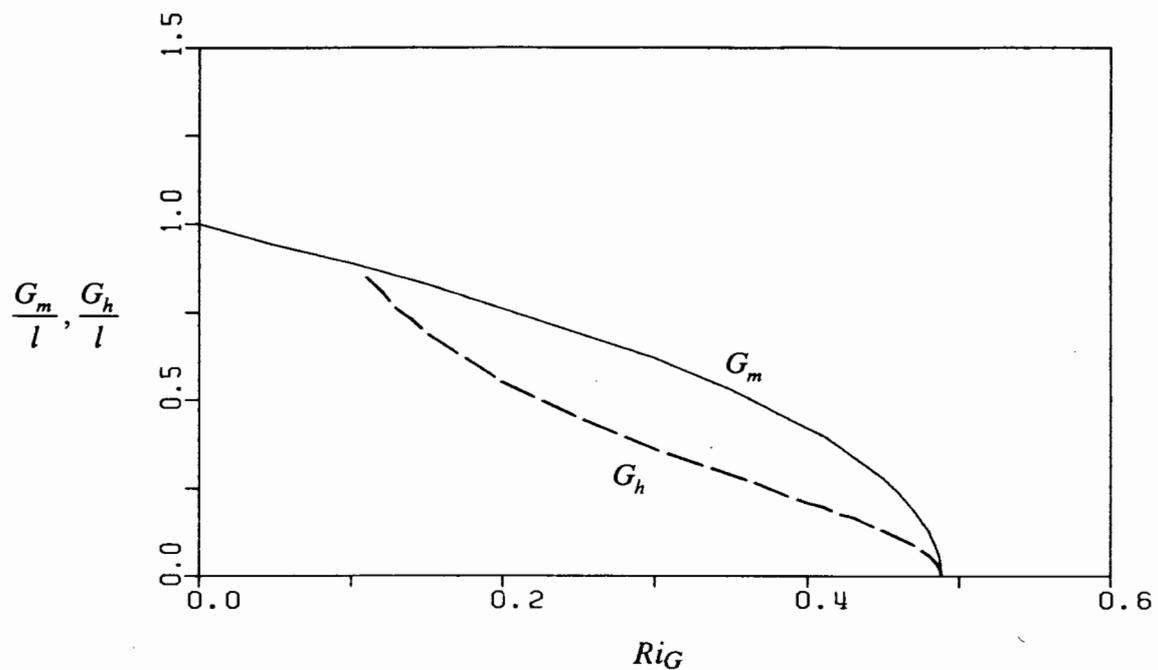


Abb. 3.5: Charakteristische Längenmaßstäbe  $G_m$  und  $G_h$  bei stabiler Schichtung gemäß den Gleichungen (3.34a,b).

Ort und Zeit berechnet und immer dann wirksam, wenn an einer Stelle im Temperaturfeld lokal eine stabile Schichtung auftritt. Außerdem sind sie so in TURBIT implementiert, daß die Berechnung beliebig orientierter Kanäle möglich ist. Der Verlauf von  $G_m$  und  $G_h$  stimmt gut mit Analysen von Schumann (1991) überein, der den Längenmaßstäben  $l_s$  und  $l_b$  aus Gleichung (3.31a,b) ähnliche Größen mittels Daten aus direkten numerischen Simulationen von Gerz & Schumann (1991) berechnet hat.

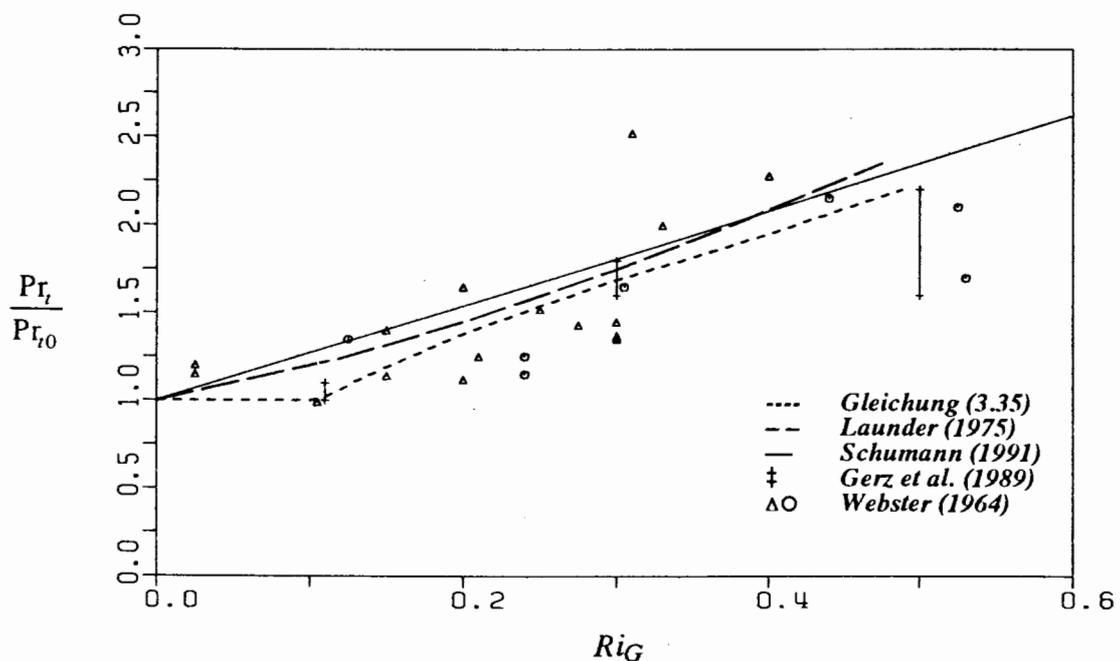


Abb. 3.6: Turbulente Feinstruktur-Prandtl-Zahl  $Pr_{tSGS}$  gemäß Gleichung (3.35), normalisiert mit ihrem Wert bei indifferenter Schichtung und aufgetragen über der Gradienten-Richardson-Zahl  $Ri_G$ , im Vergleich zu Daten aus Experimenten und direkten numerischen Simulationen sowie anderen Modellansätzen.

Unter Beachtung der Ansätze (3.10a,b) sowie den Beziehungen (3.26a) und (3.34a,b), folgt für eine turbulente Feinstruktur-Prandtl-Zahl  $Pr_{t,SGS}$  bei instabiler, indifferenter und stabiler Schichtung der Zusammenhang:

$$Pr_{t,SGS} = \frac{v_t}{a_t} = \begin{cases} \frac{C_2}{C_{T^2}} & Ri_G \leq 0 \\ \frac{C_2 G_m}{C_{T^2} G_h} & Ri_G > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Das Ergebnis dieser Modellierung bei stabiler Schichtung ist in Abbildung 3.6 im Vergleich zu experimentellen Daten von Webster (1964), Daten aus direkten numerischen Simulationen von Gerz et al. (1989) und Modellansätzen für  $Pr_t$  von Launder (1975) und Schumann (1991) aufgetragen. Die gute Übereinstimmung von  $Pr_{t,SGS}$  gemäß Gleichung (3.35) mit den Daten aus Experimenten und direkten numerischen Simulationen deutet auf die prinzipielle Richtigkeit der in diesem Kapitel vorgeschlagenen Feinstrukturmodellierung hin.

Zusammengefaßt gelten für die charakteristischen Feinstrukturlängenmaßstäbe für Impuls und Wärme,  $l_m$  und  $l_h$ , sowie den charakteristischen Feinstrukturdispersionslängenmaßstab  $l_{em}$  folgende Beziehungen:

$$l_m = \min \left( j F^{1/2}, C_w |n_w|, G_m \right) \quad (3.36a)$$

$$l_h = \min \left( j F^{1/2}, C_w |n_w|, G_h \right) \quad (3.36b)$$

$$l_{em} = \min \left( V^{1/3}, C_w |n_w| \right) \quad (3.36c)$$

## 3.2 Anfangs- und Randbedingungen

### 3.2.1 Anfangsbedingungen

Nach Rotta (1972) ist die Annahme, daß eine turbulente Strömung einem von den Anfangsbedingungen unabhängigen statistischen Zustand zustrebt, nicht bewiesen, jedoch durch eine Vielzahl experimenteller Untersuchungen bestätigt worden. Diese Hypothese liegt auch den hier durchgeführten numerischen Simulationen zugrunde (siehe dazu Kapitel 4.2.4).

Es werden Anfangswerte für das Geschwindigkeitsfeld, das Temperaturfeld und das Feld der kinetischen Feinstrukturenergie benötigt. Da sie einen entscheidenden Einfluß darauf haben, wie schnell eine turbulente Strömung einen im statistischen Sinne stationären Zustand erreicht, werden sie, um die Gesamtrechnenzeit möglichst klein zu halten, so festgelegt, daß sie diesem schon weitgehend entsprechen.

Für das Geschwindigkeitsfeld wird als Anfangsbedingung von einem in Ruhe befindlichen Fluid ausgegangen, d.h. es gilt:

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3, t=0) = 0 \quad i = 1(1)3 \quad (3.37)$$

Als Anfangsbedingung für das Temperaturfeld wird bei der numerischen Simulation von turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion und der Fluidschicht mit interner Wärmequelle ein aus experimentellen Untersuchungen bekanntes Profil näherungsweise vorgegeben. In beiden Fällen werden zufällige Störungen mit kleiner Amplitude überlagert.

Für das Feld der kinetischen Feinstrukturenergie wird die Anfangsbedingung aus dem aufgelösten Geschwindigkeitsfeld zum zweiten Zeitschritt so bestimmt, daß sie bei Vernachlässigung konvektiver und diffusiver Terme der stationären Lösung der modellierten Erhaltungsgleichung von kinetischer Feinstrukturenergie (3.18) entspricht. Sie wird demzufolge aus einer Gleichgewichtsbetrachtung zwischen Produktion und Dissipation von kinetischer Feinstrukturenergie abgeleitet (siehe Gleichung (3.29)):

$$\bar{E}'(x_1, x_2, x_3, t \approx 0) = \frac{l_{em} (C_2 C_{20} {}^j C l_m (\delta_j \bar{u}_i + \delta_i \bar{u}_j) \delta_j \bar{u}_i - \delta_{j3} C_{T2} {}^i C_T l_h \delta_j \bar{T})}{C_3} \quad (3.38)$$

Diese Vorgehensweise wird deshalb gewählt, weil der Produktionsterm durch das aufgelöste Geschwindigkeitsfeld aufgrund der Geschwindigkeitsanfangsbedingung (3.37) zum ersten Zeitschritt immer Null ist und der Produktions-/Vernichtungsterm durch Auftrieb bei einer gemischten Simulation, d.h. einer direkten numerischen Simulation des Temperaturfeldes und einer Grobstruktursimulation des Geschwindigkeitsfeldes, wegen  $C_{T2}=0$  verschwindet. Die Anfangswerte für die kinetische Feinstrukturenergie müssen jedoch wegen der modellierten Transportgleichung (3.18) größer als Null sein und werden aus diesem Grund erst zum zweiten Zeitschritt bestimmt.

Eine weitere Möglichkeit zur Vorgabe sinnvoller Anfangsbedingungen für alle Felder, die im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls angewendet wird, ist die Übernahme von Lösungen aus zuvor durchgeführten Simulationen.

### 3.2.2 Randbedingungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen (2.11b) sind ebenso wie die Wärmetransportgleichung (2.11c) und die kinetische Feinstrukturenergiegleichung (2.15) partielle, nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung und von elliptischem Typ. Für ihre Lösung sind deshalb Vorgaben an allen Rändern des betrachteten Rechengebietes erforderlich.

In  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung werden periodische Randbedingungen verwendet, d.h. es gilt:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_1 + X_1, x_2, x_3) \quad (3.39a)$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_1, x_2 + X_2, x_3) \quad (3.39b)$$

Der Grund für die Verwendung periodischer Randbedingungen ist, daß auf allen offenen Rändern physikalisch sinnvolle Größen für jeden Orts- und Zeitpunkt vorgegeben werden müssen. Die Vorteile periodischer Randbedingungen liegen in ihrer sehr einfachen programmtechnischen Umsetzung. Sie machen es jedoch erforderlich, daß physikalische Ereignisse über die Periodenlängen  $X_i$  ( $i=1,2$ ) hinweg statistisch entkoppelt sind. Dies ist eine wichtige Voraussetzung für die korrekte Abbildung des physikalischen Problems durch die Numerik (siehe dazu Kapitel 4.2.1).

In  $x_3$ -Richtung gelten für die Geschwindigkeitskomponenten die Wandhaftbedingungen (A.13a,b) und für die Temperatur die vorgegebenen Werte gemäß (A.14a,b). Da auch die Geschwindigkeitsschwankungskomponenten verschwinden, ist die Feinstrukturenergie an der Wand Null. Damit lauten die Wandbedingungen:

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = 0 \quad i = 1(1)3 \quad (3.40a)$$

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 = 1, t) = 0 \quad i = 1(1)3 \quad (3.40b)$$

$$\bar{T}(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = \begin{cases} 1 & \text{Rayleigh-Benard-Konvektion} \\ 0 & \text{Fluidschicht mit interner Wärmequelle} \end{cases} \quad (3.40c)$$

$$\bar{T}(x_1, x_2, x_3 = 1, t) = 0 \quad (3.40d)$$

$$\bar{E}'(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = 0 \quad (3.40e)$$

$$\bar{E}'(x_1, x_2, x_3 = 1, t) = 0 \quad (3.40f)$$

Die Realisierung dieser Randwerte in den Konvektionstermen der Erhaltungsgleichungen (2.11b,c) und (2.15) bereitet keine Schwierigkeiten, da die geforderten Beziehungen (3.40a-f) ohne Näherung exakt erfüllt werden können. Ganz anders verhalten sich die viskosen und thermischen Diffusionsterme sowie die Feinstrukturenergiediffusionsterme. Hier müssen Gradienten der Geschwindigkeit für die Wandschubspannungen, Gradienten der Temperatur für die Wandwärmeströme und Gradienten der Feinstrukturenergie diskretisiert werden:

$$\bar{\tau}_{3i}|_{w1,2} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \Big|_{w1,2} \quad i = 1(1)3 \quad (3.41a)$$

$$-\bar{q}|_{w1,2} = \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \Big|_{w1,2} \quad (3.41b)$$

$$\bar{e}|_{w1,2} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial \bar{E}'}{\partial x_3} \Big|_{w1,2} \quad (3.41c)$$

### 3.2.2.1 Literaturstand zu Wandgesetzen für Naturkonvektion

Bei erzwungener Konvektion ist es möglich, die universellen logarithmischen Wandgesetze der Geschwindigkeit und der Temperatur zu verwenden [Schumann (1973), Grötzbach (1977), Piomelli et al. (1989)], um die Wandgradienten in den Gleichungen (3.41a,b) zu bestimmen. Sie beschreiben die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in Wandnähe, jedoch außerhalb der viskosen und der durch molekulare Wärmeleitung bestimmten Unterschicht, für die meisten Grenzschichtströmungen mit ausreichender Genauigkeit.

Der Einsatz von universellen, allgemeingültigen Geschwindigkeits- und Temperaturwandgesetzen für Naturkonvektion gestaltet sich erheblich schwieriger. Eidson (1985) hat Grobstruktursimulationen turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in Luft durchgeführt. Er vermutet, daß aufgrund der Existenz verschiedener Unterschichten, in denen unterschiedliche physikalische Phänomene dominieren, ein dem logarithmischen Wandgesetz für erzwungene Konvektion vergleichbares universelles Wandgesetz für natürliche Konvektion überhaupt nicht existiert. Er löst deshalb soweit wie möglich die Reibungs- und Wärmeleitungsunterschicht direkt auf. Henkes und Hoogendorn (1990) haben die analytisch hergeleiteten Wandfunktionen von George & Capp (1979) und Cheesewright (1986) für eine Grenzschicht bei natürlicher Konvektion an einer beheizten senkrechten Platte mit numerischen Berechnungen für Luft, unter Verwendung eines für kleine Reynolds-Zahlen modifizierten  $k$ - $\epsilon$ -Turbulenzmodells, verglichen. Auch sie kommen zum Ergebnis, daß es sicherer ist, die Reibungs- und Wärmeleitungsunterschicht bei Naturkonvektion aufzulösen.

Monin & Obuchow (1954) geben erstmals universelle Funktionen zur Beschreibung der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile bei Naturkonvektion in einer wandnahen Schicht an, die den Einfluß der Schichtung berücksichtigen, aber die Existenz einer mittleren Geschwindigkeit voraussetzen. Sie verwenden dabei ein aus Ähnlichkeitsbetrachtungen gewonnenes charakteristisches Längenmaß  $\hat{L}_*$ , Temperaturmaß  $\hat{T}_*$  und als charakteristisches Geschwindigkeitsmaß die Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $\hat{u}_*$ .  $\hat{L}_*$  wird auch als Monin-Obuchow-Länge bezeichnet und beschreibt den Abstand von der Wand, in der das Geschwindigkeitsprofil mit kleinskaliger Scherturbulenz bestimmend ist. Darüber führt eine instabile Schichtung zu auftriebsbedingten Vertikalbewegungen. Das Fehlen einer mittleren Geschwindigkeit bei Naturkonvektion erschwert die Anwendung der Monin-Obuchow-Theorie. Im Mittel verschwinden auch die Schubspannungen und daher ist die Schubspannungsgeschwindigkeit  $\hat{u}_*$  identisch Null.

Für diesen Fall schlägt Deardorff (1972b) vor, den RMS-Wert der horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen zu verwenden, um eine Schubspannungsgeschwindigkeit  $\hat{u}_*$  für die Verwendung der Monin-Obuchow-Theorie zu bestimmen. Das Verschwinden der Schubspannungsgeschwindigkeit erkennt Businger (1973) als Charakteristikum der freien Konvektion. Er argumentiert aber, daß trotz dem Verschwinden der mittleren Geschwindigkeit und daraus folgend  $\hat{u}_* = 0$  noch wesentliche horizontale Bewegungen in Wandnähe existieren, die durch die großräumigen Wirbel verursacht werden. Daraus schließt er, daß die Konvektion stationäre, lokale Geschwindigkeitsprofile in Wandnähe erzeugt, die jedoch einen viel kleineren Zeitmaßstab als den Konvektionszeitmaßstab haben. In diesem Fall existiert auch lokal

Produktion von turbulenter kinetischer Energie durch das mittlere Geschwindigkeitsfeld und eine lokale Schubspannungsgeschwindigkeit  $\hat{u}_\tau$  kann definiert werden. Ausgehend von der Annahme Deardorffs (1972b) und der physikalischen Betrachtungsweise Busingers (1973) leitet Schumann (1988) ein Modell zur Berechnung der lokalen Schubspannungsgeschwindigkeit in der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht her, um die Anwendung der Monin-Obuchow-Theorie zu ermöglichen. Schmidt (1988) und Schmidt & Schumann (1989) verwenden für den gleichen Anwendungsfall integrierte Fluß-Profil-Beziehungen von Paulson (1970), Dyer (1974) und Holtslag & van Ulden (1983), um eine lokale Schubspannungsgeschwindigkeit zu definieren.

Erste Aussagen über den Verlauf des mittleren Temperaturprofils bei Naturkonvektion stammen ebenfalls von Monin & Obuchow (1954). Um die instabile Schichtung zu untersuchen, betrachten sie den Fall rein thermischer Turbulenz. Hier erhält die Turbulenz ihre kinetische Energie ausschließlich aus der Energie der instabilen Schichtung. Sie leiten ein Potenzgesetz ab, das für den mittleren Gradienten der Temperatur in Wandnähe, jedoch außerhalb der wandnahen Unterschicht, einen  $\hat{x}_3^{-\alpha}$ -Verlauf mit  $\alpha=4/3$  voraussagt:

$$\frac{\partial \langle \hat{T} \rangle}{\partial \hat{x}_3} \sim \hat{x}_3^{-\alpha} \quad (3.42)$$

In der wandnahen Unterschicht ist der mittlere Gradient der Temperatur konstant und damit  $\alpha = 0$ . Durch Integration von (3.42) folgt deshalb ein lineares Profil der mittleren Temperatur in der Unterschicht und ein  $\hat{x}_3^{-1/3}$ -Verlauf in der Übergangsschicht. Auch Priestley (1955) leitet unabhängig von Monin & Obuchow (1954) mittels einer Dimensionsanalyse den Zusammenhang (3.42) mit  $\alpha=4/3$  her. Im Gegensatz dazu finden Malkus (1954), Townsend (1959),

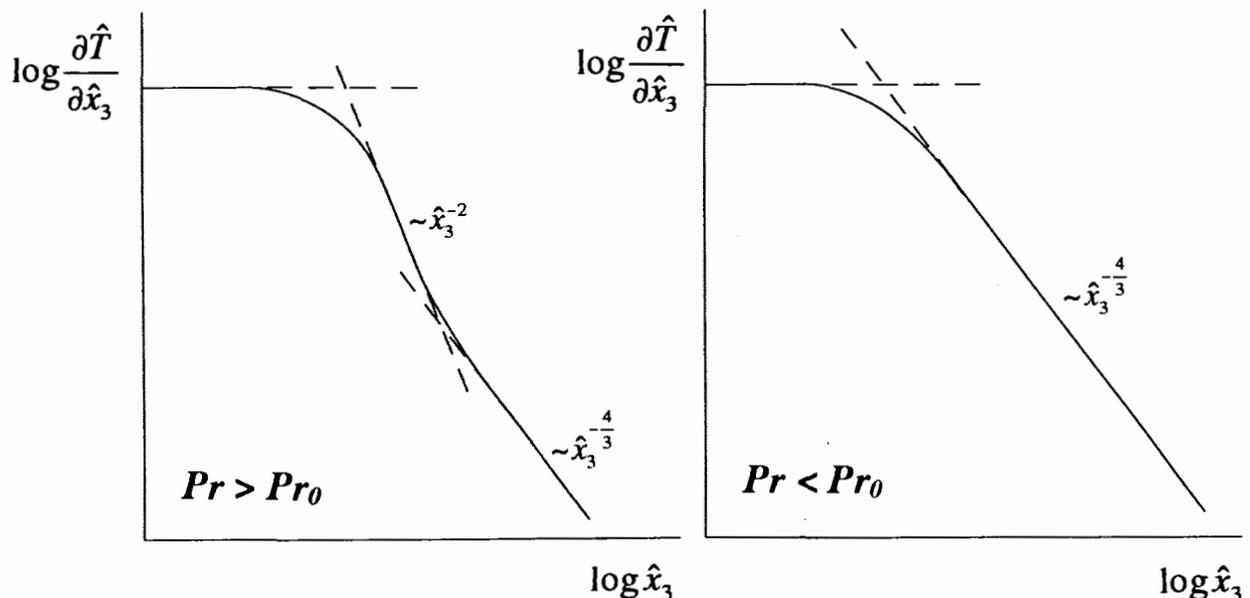


Abb. 3.7: Mittlere Gradienten der Temperatur in turbulenter Naturkonvektion nach der Theorie von Kraichnan (1962).

Goldstein & Chu (1969) und Chu & Goldstein (1973) in experimentellen Untersuchungen mit den Fluiden Luft und Wasser den Wert  $\alpha=2$ .

Kraichnan (1962), der für die Analyse der Grenzschichten bei Naturkonvektion eine modifizierte Mischungswegtheorie entwickelt hat, schlägt ein 3-Schichtenmodell in Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl vor. In den Unterschichten werden Wärme und Impuls weitgehend durch molekulare Diffusion transportiert, während in der Konvektionsschicht der konvektive Transport dominiert. Dazwischen liegt eine Übergangsschicht. Wenn die Prandtl-Zahl des Fluids größer als eine Übergangs-Prandtl-Zahl ist, die er mit  $Pr_0=0.1$  angibt, existiert eine Übergangsschicht, in der ein Potenzgesetz für den mittleren Temperaturgradienten mit  $\alpha=2$  gilt, Abbildung 3.7. In der durch Wärmeleitung bestimmten Unterschicht ist der mittlere Gradient der Temperatur konstant, das mittlere Profil der Temperatur linear. Für  $Pr > Pr_0$  folgt darauf eine Übergangsschicht, in der der mittlere Gradient der Temperatur proportional  $\hat{x}_3^{-2}$ , das mittlere Profil der Temperatur proportional  $\hat{x}_3^{-1}$  ist. Diese Übergangsschicht existiert nicht für Fluide mit Prandtl-Zahlen  $Pr < Pr_0$ . Aus diesem Grund folgt für diese Medien nach der Wärmeleitungsunterschicht sofort die Konvektionsschicht, in der der mittlere Gradienten der Temperatur proportional  $\hat{x}_3^{-4/3}$ , das mittlere Profil der Temperatur proportional  $\hat{x}_3^{-1/3}$  ist.

Chung et al. (1992a), die eine Analyse der charakteristischen Bezugsgrößen verschiedener Wandschichtbereiche durchführen, knüpfen an die physikalische Vorstellung Kraichnans (1962) an und schlagen für die Ermittlung einer universellen Wandfunktion des mittleren Gradienten der Temperatur ein 4-Schichtenmodell vor, in denen verschiedene physikalische Transportmechanismen dominieren, Abbildung 3.8. In der ersten Schicht bestimmen die kinematische Zähigkeit  $\hat{\nu}$  und die Temperaturleitfähigkeit  $\hat{a}$  den Impuls- und Wärmetransport. Für  $Pr < Pr_0$  wird die Übergangsschicht durch die turbulente Zähigkeit  $\hat{\nu}_t$  und die Temperaturleitfähigkeit  $\hat{a}$  bestimmt. Das erklärt auch das Fehlen eines  $\hat{x}_3^{-2}$ -Verlaufs des mittleren Gra-

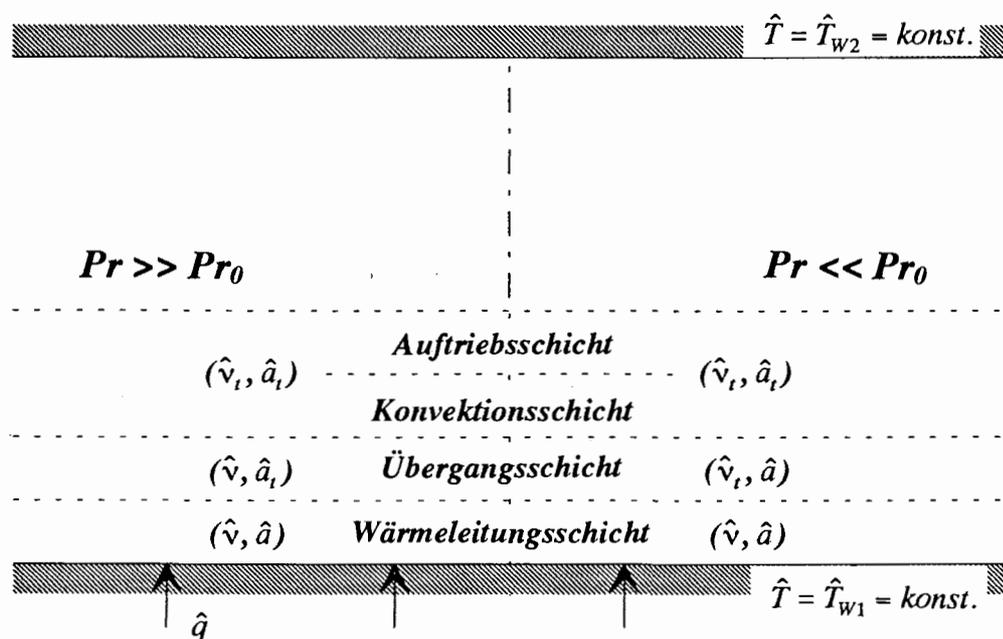


Abb. 3.8: 4-Schichtenmodell und Transportmechanismen in turbulenter Naturkonvektion nach Chung et al. (1992a).

dienten der Temperatur. Bei Fluiden mit einer großen Temperaturleitfähigkeit wird in der Übergangsschicht die Wärme genau wie in der Wärmeleitungsschicht weitgehend durch molekulare thermische Diffusion transportiert. Für  $Pr > Pr_0$  sind dagegen die molekulare viskose Diffusion und die turbulente thermische Diffusion die ausschlaggebenden Transportmechanismen. Als Resultat ändert sich der Verlauf des Gradienten der Temperatur in der Übergangsschicht. In der Konvektionsschicht sind in beiden Fällen die turbulenten Austauschgrößen  $\hat{v}_t$  und  $\hat{a}_t$  für den Impuls- und Wärmetransport maßgebend. Als Folge davon haben die mittleren Gradienten der Temperatur in diesem Bereich wieder dieselbe Steigung. Das trifft auch auf die vierte, neu definierte Schicht zu, in der der mittlere Gradient der Temperatur gegen Null geht. Dies entspricht einem Zustand, bei dem mit zunehmendem Wandabstand die mittlere Temperatur konstant bleibt.

Ausgehend von diesem Wandgrenzschichtmodell leiten sie ein Wandgesetz für den mittleren Gradient der Temperatur her, das im Bereich ihrer experimentellen Vergleichsdaten für Luft und Wasser unabhängig von der Prandtl- und der Rayleigh-Zahl ist. Dabei verwenden sie die charakteristischen Bezugsgrößen der Wärmeleitungsunterschicht, um den mittleren Gradienten der Temperatur in Wandnähe und den Wandabstand dimensionslos zu machen:

$$\hat{u}_* = \left( \frac{\hat{a}^2}{\hat{v}} \hat{g} \hat{\beta} \frac{\langle \hat{q} \rangle}{\hat{\rho} \hat{c}_p} \right)^{1/4} \quad (3.43a)$$

$$\hat{L}_* = \frac{\hat{a}}{\hat{u}_*} \quad (3.43b)$$

$$\hat{T}_* = \frac{\langle \hat{q} \rangle}{\hat{\rho} \hat{c}_p \hat{u}_*} \quad (3.43c)$$

Das von ihnen abgeleitete Wandgesetz hat die Form:

$$\frac{\partial \langle T \rangle^+}{\partial z^+} = \frac{1 + \kappa_b c z^{+5/3}}{1 + \kappa_b c z^{+5/3} + c z^{+3}} \quad (3.44)$$

Für  $z^+ \rightarrow 0$  kommt der erwartete konstante Verlauf, während für  $z^+ \rightarrow \infty$  der mittlere Gradient der Temperatur proportional  $z^{+4/3}$  ist. Chung et al. (1992a) kommen durch einen Vergleich mit experimentellen Daten für Luft und Wasser zu der Schlußfolgerung, daß  $c$  ein von der Prandtl-Zahl abhängiger Koeffizient ist, während  $\kappa_b$  ein der von Kármánschen-Konstante  $\kappa$  ähnlicher universeller Koeffizient ist, der auch als Proportionalitätskonstante des  $-4/3$  Potenzgesetzes der Konvektionsschicht angesehen werden kann:

$$\frac{\partial \langle T \rangle^+}{\partial z^+} = \kappa_b z^{+4/3} \quad (3.45)$$

Durch die Analyse experimenteller Daten von Goldstein & Chu (1969) für Luft, Chu & Goldstein (1973) für Wasser und Yun & Chung (1988) für Luft und Wasser kommen sie zu

dem Ergebnis, daß der Koeffizient  $\kappa_b$  zwischen 0.4 und 0.85 liegt. Sie geben  $\kappa_b=0.6$ ,  $c=0.045$  für Luft und  $\kappa_b=0.6$ ,  $c=0.05$  für Wasser an. Die Konvektionsschicht in der das  $-4/3$ -Potenzgesetz gültig ist, beginnt bei einem dimensionslosen Wandabstand  $z^+ \approx 15$ .

Zu einem ähnlichen Ergebnis kommen auch Angirasa & Nieuwstadt (1992). Sie geben für den in der Konvektionsschicht relevanten Koeffizienten  $\kappa_b$  einen Wert zwischen 0.75-1.0 an und finden in dieser Schicht ebenfalls ein  $-4/3$ -Potenzgesetz für den mittleren Gradienten der Temperatur. Bezogen auf die charakteristischen Größen der Wärmeleitungsunterschicht, beginnt die von ihnen ermittelte Konvektionsschicht für Wasser ebenfalls bei einem dimensionslosen Wandabstand  $z^+ \approx 15$ .

### 3.2.2.2 Geschwindigkeitswandbedingungen

Um Randbedingungen für die viskosen Diffusionsterme der Impulserhaltungsgleichungen (2.11b) vorzugeben, ist es notwendig, die in Gleichung (3.41a) auftretenden unbekannt momentanen, lokalen Gradienten der Geschwindigkeiten an der Wand zu bestimmen. Abbildung 3.9 zeigt schematisch die Verläufe der momentanen, lokalen Geschwindigkeitsprofile der  $\bar{u}_{1,2}$ - und der  $\bar{u}_3$ -Komponente bei Rayleigh-Bénard-Konvektion an der unteren Wand.

Durch eine Taylorreihenentwicklung der Geschwindigkeit  $\bar{u}_i(x_i)$  um die Stelle  $x_3=0$ , nachfolgendem Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung (2.11a) und einem abschließenden Koeffizientenvergleich folgt, daß der Gradient der Geschwindigkeit der  $\bar{u}_3$ -Komponente an der

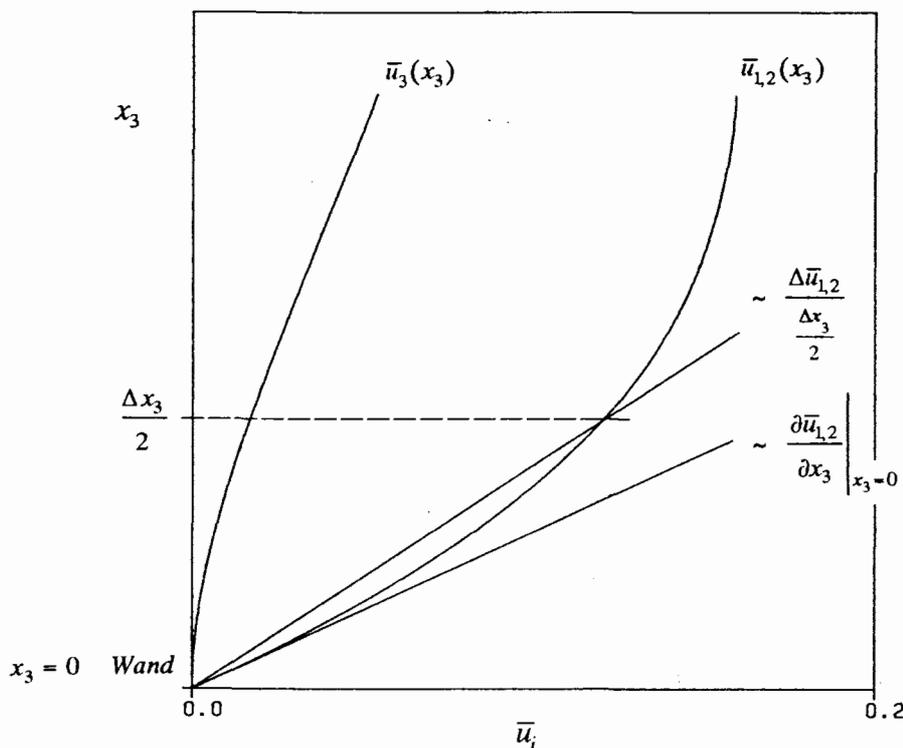


Abb. 3.9: Schematischer Verlauf der Geschwindigkeit in Wandnähe.

Wand identisch Null ist:

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right|_{w_{1,2}} = 0 \quad (3.46)$$

Die Realisierung dieses Randwertes der viskosen Diffusionsterme bereitet demnach keine Schwierigkeiten. Das gilt jedoch nicht für die Gradienten der Geschwindigkeit der  $\bar{u}_1$ - und der  $\bar{u}_2$ -Komponente an der Wand. Hier gilt, daß in laminaren Strömungen und allen turbulenten Strömungen, in denen die viskose Unterschicht direkt durch das Maschennetz aufgelöst wird, die gesuchten Gradienten der Geschwindigkeit linear approximiert werden können:

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w_1} = \frac{\bar{u}_{i k=J} - 0}{\frac{\Delta x_{3 k=J}}{2}} \quad i = I(1)2 \quad (3.47a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w_2} = \frac{0 - \bar{u}_{i k=KM}}{\frac{\Delta x_{3 k=KM}}{2}} \quad i = I(1)2 \quad (3.47b)$$

Der Index k kennzeichnet, um welche Masche es sich in wandnormaler Richtung handelt.

Gelingt die Auflösung der viskosen Unterschicht nicht, wie in Abbildung 3.9 angedeutet, dann wird der Gradient der Geschwindigkeit an der Wand unterschätzt und führt zu falschen Geschwindigkeitswerten. In diesem Fall wird ein modifizierter Ansatz gemacht, der den momentanen, lokalen Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand proportional dem zeitlichen gemittelten Betrag des Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand setzt:

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w_1} = \frac{\bar{u}_{i k=J}}{\langle \bar{u}_{i k=J} \rangle} \left\langle \left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w_1} \right\rangle \quad i = I(1)2 \quad (3.48a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w_2} = -\frac{\bar{u}_{i k=KM}}{\langle \bar{u}_{i k=KM} \rangle} \left\langle \left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w_2} \right\rangle \quad i = I(1)2 \quad (3.48b)$$

Bei erzwungener Konvektion besagt ein verbesserter Ansatz von Piomelli et al. (1989), daß die Geschwindigkeit im wandnächsten Gitterpunkt nicht ganz in Phase mit der instationären Wandschubspannung ist. Es ist dort günstiger, dies zeigen Korrelationsmessungen von Rajagopalan & Antonia (1979), zwischen Geschwindigkeit und Wandschubspannungen eine Verschiebung  $\Delta_s$  der Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung durchzuführen. Ausgehend von der Annahme, daß der Ansatz (3.48a,b) auch für Naturkonvektion gültig ist, müßte dieser Einfluß der Phasenverschiebung erst noch experimentell untersucht werden. Da es bei Naturkonvektion an einer horizontalen beheizten Platte keine Hauptströmungs- und damit keine Vorzugsrichtung gibt, ist jedoch auch keine Phasenverschiebung  $\Delta_s$  zu erwarten.

In Abbildung 3.10 sind die zeitlich gemittelten Beträge der Geschwindigkeit  $\langle |\bar{u}_1| \rangle$  bei Rayleigh-Bénard-Konvektion für Luft und Natrium bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen aufgetragen. Die ausgewerteten Daten entstammen direkten numerischen Simulationen von Wörner (1994). Deutlich erkennbar sind die mit zunehmender Grashof-Zahl steiler verlaufenden Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand, die ihre Ursache in den mit steigender Grashof-Zahl dünner werdenden hydrodynamischen Grenzschichten haben.

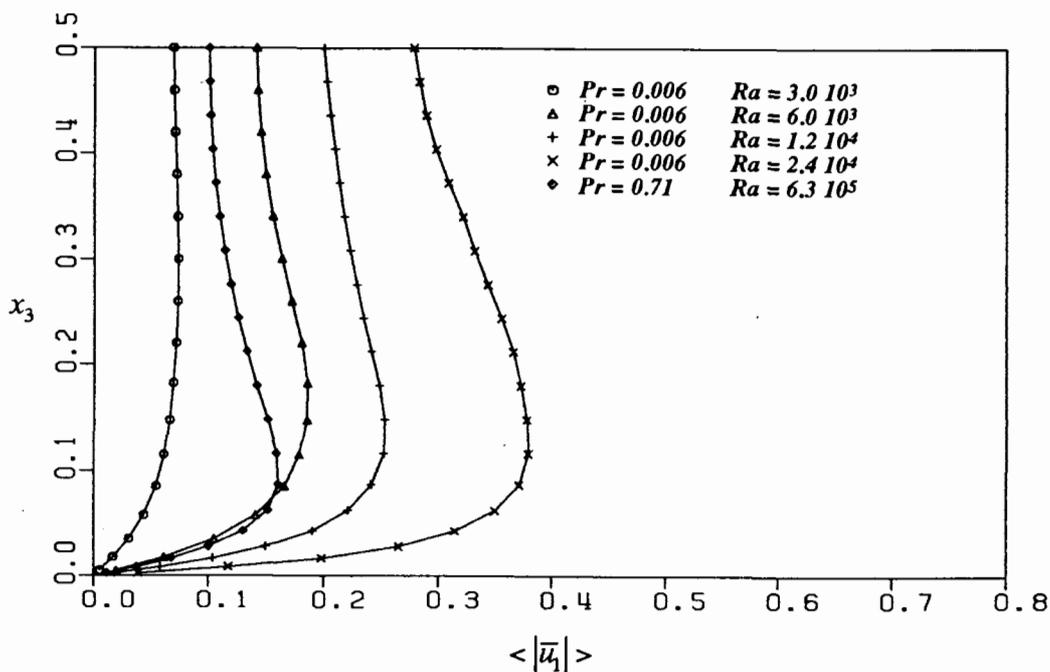


Abb. 3.10: Geschwindigkeitsbeträge  $\langle |\bar{u}_1| \rangle$  bei Rayleigh-Bénard-Konvektion für Luft und Natrium und verschiedenen Rayleigh-Zahlen.

Die für die Herleitung der neuen Bestimmungsgleichungen zugrundeliegenden Ideen bezüglich der gesuchten Beträge der Geschwindigkeitsgradienten an der Wand sowie der eingeschlagene Weg für deren Berechnung, werden im folgenden kurz skizziert:

- In unmittelbarer Wandnähe werden die turbulenten Fluktuationen senkrecht zur Wand stark gedämpft und sehr kleinskalig, da kein turbulenter Queraustausch mehr möglich ist. Der Impulstransport erfolgt weitgehend durch viskose Diffusion.
- Bezüglich der kleinen Skalen im Geschwindigkeitsfeld ist die Grashof-Analogie gültig (siehe Kapitel 4.4.3).
- Daraus folgt, daß die Beträge der Geschwindigkeitsgradienten an der Wand bei gleicher Grashof-Zahl ähnlich und von der Prandtl-Zahl unabhängig sind (siehe Abbildung 3.10).
- In diesem Fall kann für eine Bestimmung der Beträge der Geschwindigkeitsgradienten an der Wand bei kleinen Prandtl-Zahlen der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Temperatur für Fluide mit einer Prandtl-Zahl von eins verwendet werden.

- Für  $Pr=1$  ist es möglich, eine Beziehung zwischen dem gesuchten Betrag des Geschwindigkeitsgradienten und dem Temperaturgradienten an der Wand herzustellen.
- Der Temperaturgradient an der Wand kann bei einer Prandtl-Zahl von eins mittels einer empirischen Nusselt-Zahl-Korrelation abgeschätzt werden.

Bis auf die Kopplung der Impuls- (2.2b) mit der Energiegleichung (2.2c) durch den Auftriebs- und den Trägheitsterm, ist die Grashof-Zahl in TURBIT die einzige dimensionslose Kennzahl, die die physikalische Ähnlichkeit zweier geometrisch ähnlicher Stromfelder charakterisiert. Der Vergleich der Geschwindigkeitsprofile im Luftfall mit der Rayleigh-Zahl  $Ra=630000$  und im Natriumfall mit der Rayleigh-Zahl  $Ra=6000$  in Abbildung 3.10, die ungefähr dieselbe Grashof-Zahl besitzen, deutet auf die Gültigkeit der Grashof-Analogie hin. Im Wandgrenzschichtbereich sind die Gradienten der Geschwindigkeitsbeträge ähnlich, d.h. bei gleichen Grashof-Zahlen gilt:

$$\left\langle \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{W1,2} \right\rangle_{Natrium} \approx \left\langle \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{W1,2} \right\rangle_{Luft} \approx \left\langle \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{W1,2} \right\rangle_{Pr=1} \quad i = 1, 2 \quad (3.49)$$

Bei einer Prandtl-Zahl von eins sind die Dicken der

- Unterschichten  $\hat{\delta}_{Lu} = \hat{\delta}_{LT} = \hat{\delta}_L$  und
- Übergangsschichten  $\hat{\delta}_{Üu} = \hat{\delta}_{ÜT} = \hat{\delta}_Ü$

im Geschwindigkeits- und im Temperaturfeld gleich, Abbildung 3.11.

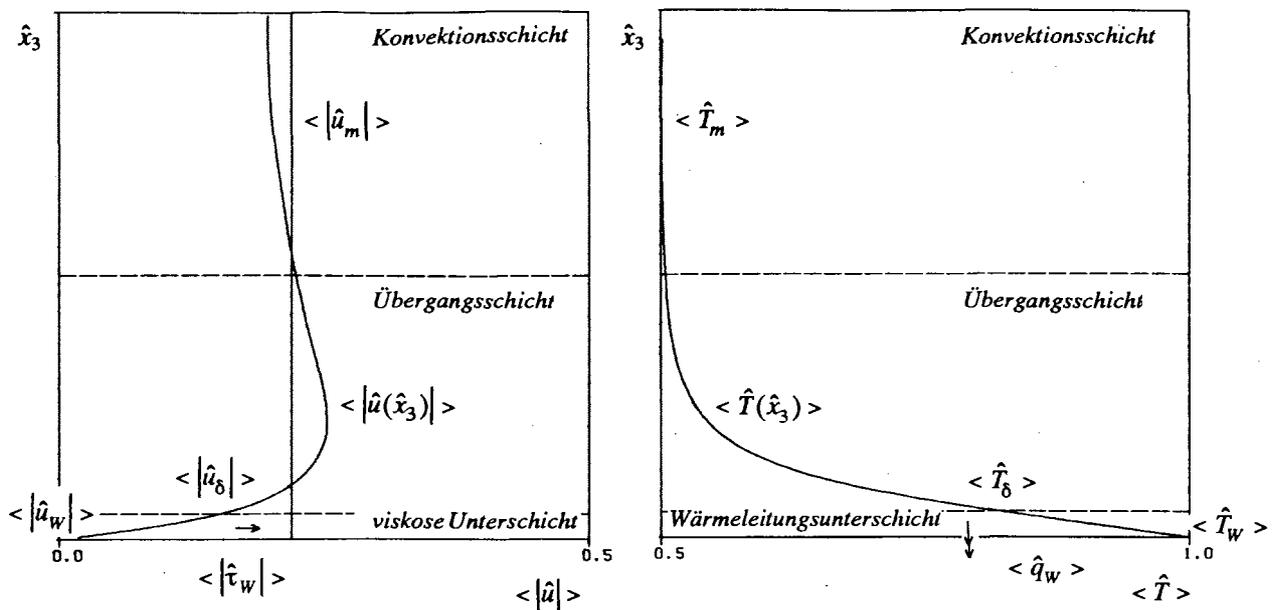


Abb. 3.11: Mittleres Geschwindigkeits- und Temperaturprofil für Rayleigh-Bénard-Konvektion bei  $Pr=1$  an der unteren Wand.

In unmittelbarer Wandnähe existiert eine viskose Unterschicht  $\hat{\delta}_{Lu}$  und eine Wärmeleitungs-  
 unterschicht  $\hat{\delta}_{LT}$ . Dort gelten das Newtonsche Gesetz der Flüssigkeitsreibung und das Foui-  
 riersche Gesetz der Wärmeleitung:

$$\langle |\hat{\tau}|_w \rangle = \hat{\rho} \hat{\nu} \frac{|0 - \langle |\hat{u}_\delta| \rangle|}{\hat{\delta}_L} \quad (3.50a)$$

$$-\langle \hat{q} \rangle_w = \hat{\rho} \hat{c}_p \hat{a} \frac{\langle \hat{T}_w \rangle - \langle \hat{T}_\delta \rangle}{\hat{\delta}_L} \quad (3.50b)$$

Für den Übergangsbereich werden Boussinesq-Ansätze [Boussinesq (1877)] mit den turbulen-  
 ten Austauschgrößen  $\hat{\nu}_t$  und  $\hat{a}_t$  eingeführt:

$$\langle |\hat{\tau}|_w \rangle = \hat{\rho} \hat{\nu}_t \frac{|\langle |\hat{u}_\delta| \rangle - \langle |\hat{u}_m| \rangle|}{\hat{\delta}_U} \quad (3.51a)$$

$$-\langle \hat{q} \rangle_w = \hat{\rho} \hat{c}_p \hat{a}_t \frac{\langle \hat{T}_\delta \rangle - \langle \hat{T}_m \rangle}{\hat{\delta}_U} \quad (3.51b)$$

Die Größen  $\langle |\hat{u}_m| \rangle$  und  $\langle \hat{T}_m \rangle$  charakterisieren die Volumenmittelwerte des Geschwindig-  
 keitsbetrages und der Temperatur über den gesamten Kanal. Für die Temperatur gilt bei  
 Rayleigh-Bénard-Konvektion:

$$\langle \hat{T}_m \rangle = \frac{\langle \hat{T}_{w1} \rangle + \langle \hat{T}_{w2} \rangle}{2} \quad (3.52)$$

Für das betrachtete Fluid mit der Prandtl-Zahl  $Pr=1$  wird angenommen, daß die turbulenten  
 Transportvorgänge von Impuls und Wärme in der Übergangsschicht ähnlich sind. Dann gilt:

$$Pr_t = \frac{\hat{\nu}_t}{\hat{a}_t} \approx 1 \quad (3.53)$$

Durch Elimination der unbekanntenen Größen  $\langle |\hat{u}_\delta| \rangle$  und  $\langle \hat{T}_\delta \rangle$  in den Gleichungen (3.50a,b)  
 und (3.51a,b) kann unter Bezugnahme auf die Zusammenhänge (3.52) und (3.53) für ein  
 Fluid mit der Prandtl-Zahl  $Pr=1$  eine Beziehung zwischen dem Wandschubspannungsbetrag  
 und dem Wandwärmestrom abgeleitet werden:

$$\frac{\langle |\hat{\tau}|_w \rangle}{\langle \hat{q} \rangle_w} = \frac{2 \langle |\hat{u}_m| \rangle}{\hat{c}_p (\langle \hat{T}_{w1} \rangle - \langle \hat{T}_{w2} \rangle)} \quad (3.54)$$

Wird das Newtonsche Gesetz der Flüssigkeitsreibung nach dem zeitlich gemittelten Betrag des Geschwindigkeitsgradienten an der Wand aufgelöst, für den Wandschubspannungsbetrag Gleichung (3.54) eingesetzt und die Beziehung mit den für TURBIT charakteristischen Bezugsgrößen und Transformationen (siehe Anhang A) entdimensionalisiert, so folgt:

$$\left\langle \left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w1,2} \right\rangle = 2 c_{wu} Nu|_{w1,2} \left\langle |\bar{u}_m| \right\rangle_{Pr=1} \quad i = I(I)2 \quad (3.55)$$

Der Koeffizient  $c_{wu}$  kann mit Hilfe von Daten aus direkten numerischen Simulationen für Luft und Natrium bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen bestimmt werden. Dazu wird Gleichung (3.55) nach  $c_{wu}$  aufgelöst und dessen Wert durch Einsetzen der Simulationsergebnisse für die Geschwindigkeitsbeträge und deren Gradienten sowie einem experimentellen Zusammenhang für die Nusselt-Zahl ermittelt. Da es sich in dem hier betrachteten Fall bei höheren Rayleigh-Zahlen um ein homogenes Problem ohne Vorzugsrichtung in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung handelt, ist  $c_{wu}$  für die  $\bar{u}_1$ - und die  $\bar{u}_2$ -Komponente gleich und liegt im Bereich 2 bis 3.  $c_{wu}$  ist damit ein von der Rayleigh- und der Prandtl-Zahl unabhängiger Korrekturkoeffizient, der aufgrund der Näherungen (3.53) und (3.57) und der eventuell unzureichenden empirischen Nusselt-Zahl-Korrelation (3.56) notwendig wird. Den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen liegt der Wert  $c_{wu}=2.5$  zugrunde.

Die Beziehung (3.54) zwischen Wandschubspannungsbetrag und Wandwärmestrom ist für  $Pr=1$  gültig. Deshalb muß die Nusselt-Zahl in Gleichung (3.55) mit einer Korrelation

$$Nu = f(Ra, Pr = 1) \quad (3.56)$$

berechnet werden.

Die Geschwindigkeitsprofile in Rayleigh-Bénard-Konvektion sind bei gleicher Grashof-Zahl ähnlich. Deshalb gilt für den zeit- und volumengemittelten Geschwindigkeitsbetrag:

$$\left\langle |\bar{u}_m| \right\rangle_{Pr=1} \approx \left\langle |\bar{u}_m| \right\rangle_{Luft} \approx \left\langle |\bar{u}_m| \right\rangle_{Natrium} \quad (3.57)$$

Dieser Wert wird während einer Simulation berechnet.

Damit sind alle unbekanntten Größen in Gleichung (3.55) auf bekannte Größen zurückgeführt und durch Einsetzen von Beziehung (3.55) in die Gleichungen (3.48a,b) folgt zur Bestimmung der momentanen, lokalen Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand als Ergebnis:

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w1} = \frac{\bar{u}_{i k=1}}{\left\langle |\bar{u}_{i k=1}| \right\rangle} 2 c_{wu} Nu|_{w1} \left\langle |\bar{u}_m| \right\rangle \quad i = I(I)2 \quad (3.58a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \right|_{w2} = - \frac{\bar{u}_{i k=KM}}{\left\langle |\bar{u}_{i k=KM}| \right\rangle} 2 c_{wu} Nu|_{w2} \left\langle |\bar{u}_m| \right\rangle \quad i = I(I)2 \quad (3.58b)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung wird bei der Grobstruktursimulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion die Berechnung der Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand möglich, wenn die Auflösung der viskosen Grenzschicht aufgrund des zu hohen numerischen Aufwandes nicht gelingt. Bei der Grobstruktursimulation der Fluidschicht mit interner Wärmequelle sind diese Bestimmungsgleichungen wegen Zusammenhang (3.52) nicht gültig. Prinzipiell ist diese Methode zur Ableitung geeigneter Formulierungen für die Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand jedoch auch für andere physikalische Anwendungsfälle möglich.

### 3.2.2.3 Temperaturwandbedingungen

Die unbekannte Größe in Gleichung (3.41b) ist der Gradient der Temperatur an der Wand. Abbildung 3.12 zeigt den schematischen Verlauf der momentanen, lokalen Temperatur bei Rayleigh-Bénard-Konvektion an der unteren Wand.

In laminaren Strömungen und allen turbulenten Strömungen, in denen die Wärmeleitungsunterschicht direkt durch das Maschennetz aufgelöst wird, kann der gesuchte Gradient der Temperatur linear approximiert werden:

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right|_{w1} = \frac{\bar{T}_{k=l} - \bar{T}_{w1}}{\frac{\Delta x_{3k=l}}{2}} \quad (3.59a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right|_{w2} = \frac{\bar{T}_{w2} - \bar{T}_{k=KM}}{\frac{\Delta x_{3k=KM}}{2}} \quad (3.59b)$$

Gelingt die Auflösung der Wärmeleitungsunterschicht, wie in Abbildung 3.12 angedeutet, nicht, dann wird der Gradient der Temperatur an der Wand unterschätzt und führt zu falschen Temperaturwerten. In diesem Fall wird angenommen, daß der momentane, lokale Gradient der Temperatur an der Wand proportional dem zeitlich gemittelten Gradienten der Temperatur an der Wand ist:

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right|_{w1} = \frac{\bar{T}_{k=l} - \bar{T}_{w1}}{\langle \bar{T}_{k=l} - \bar{T}_{w1} \rangle} \left\langle \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right|_{w1} \right\rangle \quad (3.60a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right|_{w2} = \frac{\bar{T}_{w2} - \bar{T}_{k=KM}}{\langle \bar{T}_{w2} - \bar{T}_{k=KM} \rangle} \left\langle \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right|_{w2} \right\rangle \quad (3.60b)$$

Bei vorgegebenen Wandtemperaturwerten muß bei diesem Ansatz eine Möglichkeit zur Bestimmung des zeitlich gemittelten Gradienten der Temperatur an der Wand bestehen. In der Wärmeleitungsunterschicht gilt das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung:

$$-\langle \hat{q}|_{w1,2} \rangle = \hat{\rho} \hat{c}_p \hat{a} \left\langle \left. \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}_3} \right|_{w1,2} \right\rangle \quad (3.61)$$

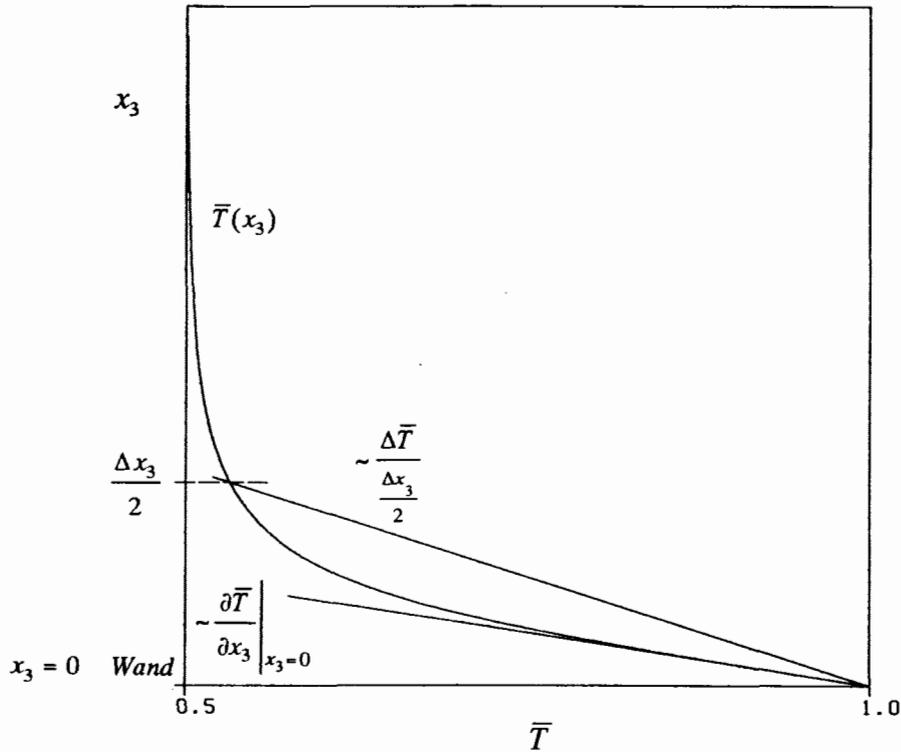


Abb. 3.12: Schematischer Verlauf der Temperatur in Wandnähe.

Wird Gleichung (3.61) nach dem zeitlich gemittelten Gradienten der Temperatur an der Wand aufgelöst und die Beziehung mit den für TURBIT charakteristischen Bezugsgrößen und Transformationen entdimensionalisiert, dann folgt:

$$\left\langle \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \Big|_{w_{1,2}} \right\rangle = Nu|_{w_{1,2}} \quad (3.62)$$

Durch das Einsetzen von Gleichung (3.62) in die Gleichungen (3.60a,b) folgt als Ergebnis:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \Big|_{w_1} = \frac{\bar{T}_{k=1} - \bar{T}_{w1}}{\langle \bar{T}_{k=1} - \bar{T}_{w1} \rangle} Nu|_{w_1} \quad (3.63a)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \Big|_{w_2} = \frac{\bar{T}_{w2} - \bar{T}_{k=KM}}{\langle \bar{T}_{w2} - \bar{T}_{k=KM} \rangle} Nu|_{w_2} \quad (3.63b)$$

In diesem Fall ist die Nusselt-Zahl eine unbekannte Größe, die mit Hilfe einer geeigneten empirischen Korrelation

$$Nu = f(Ra, Pr) \quad (3.64)$$

bestimmt werden muß.

Wird in TURBIT der Wandwärmestrom als Randbedingung vorgegeben, dann muß der Temperaturwert in der wandnächsten Masche berechnet werden. Dazu kann das in Kapitel 3.2.2.1 beschriebene, von Chung et al. (1992a) abgeleitete Wandgesetz herangezogen werden. Gleichung (3.44) hat mit der in TURBIT verwendeten Normierung die dimensionslose Form:

$$\left\langle \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \right\rangle = Nu \left\{ \frac{1 + \kappa_b c (Ra Nu)^{5/12} x_3^{5/3}}{1 + \kappa_b c (Ra Nu)^{5/12} x_3^{5/3} + c (Ra Nu)^{3/4} x_3^3} \right\} \quad (3.65)$$

Der Zusammenhang zwischen den in Gleichung (3.44) auftretenden und den in TURBIT verwendeten dimensionslosen Größen lautet:

$$T^+ = \bar{T} \left( \frac{Ra}{Nu^3} \right)^{1/4} \quad (3.66a)$$

$$z^+ = x_3 (Ra Nu)^{1/4} \quad (3.66b)$$

Für  $x_3 \rightarrow 0$  geht Gleichung (3.65) in die hier hergeleitete Beziehung (3.62) über, die den mittleren Gradienten der Temperatur an der Wand in der Wärmeleitungsunterschicht vorhersagt. Durch den Einsatz von Gleichung (3.65) wird es möglich, auch mittlere Gradienten der Temperatur außerhalb der Wärmeleitungsunterschicht vorauszusagen und durch Integration von (3.65) die dazugehörigen Temperaturwerte zu berechnen. Weil für Gleichung (3.65) keine analytische Stammfunktion angegeben werden kann, muß eine numerische Integration erfolgen. Dazu wird hier eine Newton-Cotes-Formel, die Simpson-Keplersche-Regel [Bronstein & Semendjajew (1987)], verwendet und die gesuchte Temperaturdifferenz über Teilintervalle bis zu dem vorgegebenen wandnächsten Gitterpunkt integriert.

In Abbildung 3.13 sind die dimensionslosen mittleren Temperaturprofile über dem dimensionslosen Wandabstand bei Rayleigh-Bénard-Konvektion für Luft und Natrium dargestellt. Ein Vergleich des Wandgesetzes (3.65) mit Daten aus direkten numerischen Simulationen für Luft und Natrium, Grobstruktursimulationen für Luft mit und ohne Auflösung der Wärmeleitungsunterschicht, gemischten Simulationen mit einer direkten numerischen Simulation des Temperaturfeldes für Natrium und experimentellen Daten für Luft [Goldstein & Chu (1969), Yun & Chung (1988)] und Natrium [Kek (1989)] zeigt mit dem von Chung et al. (1992a) ermittelten Koeffizientensatz  $\kappa_b=0.6$  und  $c=0.045$  eine gute Übereinstimmung für beide Fluide in der Wärmeleitungsunterschicht bis  $z^+ \approx 2$ , jedoch eine deutliche Abweichung für das Fluid Natrium in der Übergangsschicht. Um das Wandgesetz (3.65) in der Praxis anwenden zu können, ist es deshalb notwendig, den Proportionalitätskoeffizienten  $\kappa_b$  und den Koeffizienten  $c$  für die Fluide Luft und Natrium anzupassen. Aufgrund dieser Diskrepanz kann auch nicht von einem universellen Temperaturwandgesetz gesprochen werden. Die Koeffizienten  $\kappa_b$  und  $c$  sind von der Prandtl-Zahl abhängig und müssen mit Hilfe von Experimenten oder numerischen Simulationen bestimmt werden. In Abbildung 3.14 sind dazu die dimensionslosen mittleren Gradienten der Temperatur über dem dimensionslosen Wandabstand gemäß Gleichung (3.65) für Luft und Natrium aufgetragen. Aus diesem Diagramm kann der Koeffizient  $\kappa_b$  als Schnittpunkt von  $z^+=1$  und dem  $-4/3$ -Verlauf ermittelt werden.

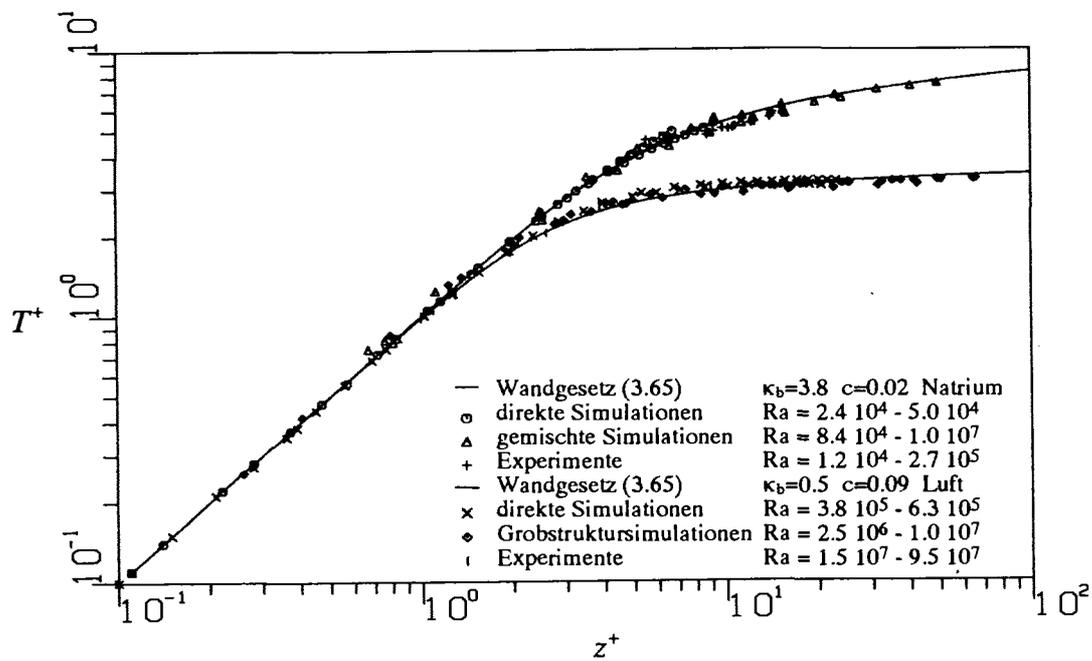


Abb. 3.13: Mittlere Temperaturprofile bei Rayleigh-Bénard-Konvektion für Luft und Natrium aus Experimenten, direkten numerischen Simulationen und Grobstruktursimulationen im Vergleich mit Gleichung (3.65) unter Verwendung der Koeffizienten in Tabelle 3.2.

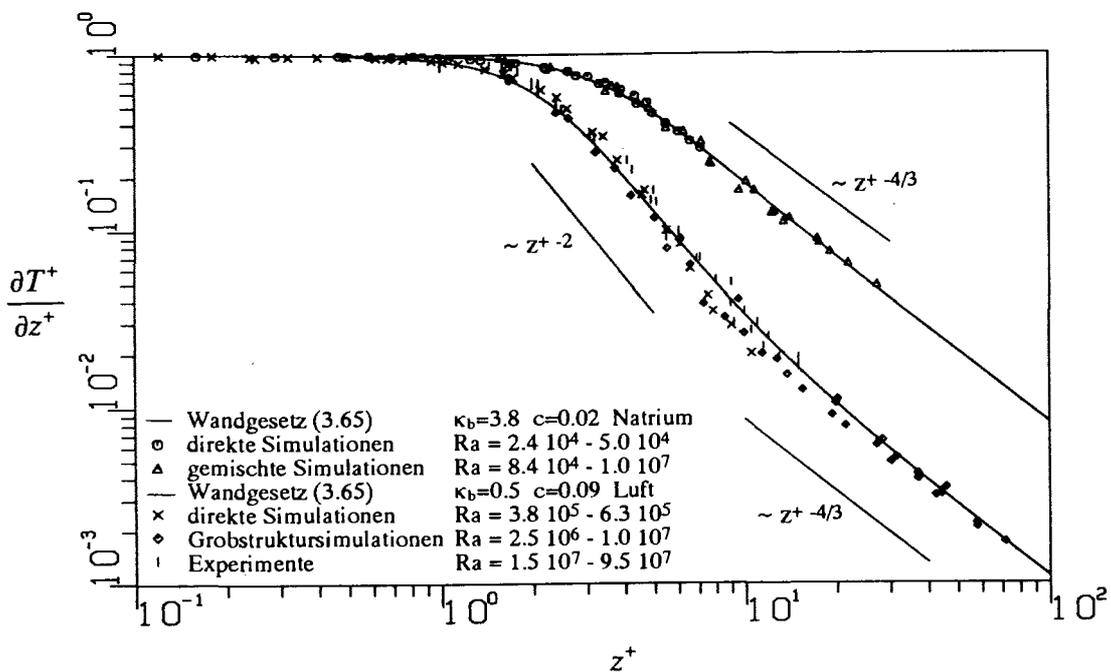


Abb. 3.14: Mittlere Temperaturgradientenprofile bei Rayleigh-Bénard-Konvektion für Luft und Natrium aus Experimenten, direkten numerischen Simulationen und Grobstruktursimulationen im Vergleich mit Gleichung (3.65) unter Verwendung der Koeffizienten in Tabelle 3.2.

Das Ergebnis der Analyse sind die in Tabelle 3.2 aufgeführten Werte für  $\kappa_b$  und  $c$  bei Luft und Natrium. Auch das Fehlen einer Übergangsschicht für Prandtl-Zahlen  $Pr < Pr_0 = 0.1$ , in der der dimensionslose Gradient der Temperatur, wie z.B. bei Luft, proportional  $z^{+2}$  ist, kann, wie in Abbildung 3.14 dargestellt, bestätigt werden. Während bei Luft zwischen der Wärmeleitungsunterschicht mit einem konstanten Gradienten der Temperatur und der Konvektionsschicht mit einem  $z^{+4/3}$ -Verlauf eine Übergangsschicht mit einem  $z^{+2}$ -Verlauf liegt, fehlt diese bei Natrium völlig. Dem konstanten Verlauf der Wärmeleitungsunterschicht folgt sofort der  $z^{+4/3}$ -Verlauf der Konvektionsschicht.

Fluid	Pr	$\kappa_b$	$c$
Luft	0.71	0.5	0.09
Natrium	0.006	3.8	0.02

Tab. 3.2: Koeffizienten in Gleichung (3.65) für die Fluide Luft und Natrium.

Mit Hilfe der Beziehungen (3.63a,b) und dem Wandgesetz (3.65) wird bei der Grobstruktursimulation von Naturkonvektion wahlweise die Berechnung des Gradienten der Temperatur an der Wand oder die Berechnung des Temperaturwertes in der wandnächsten Masche möglich, wenn als Randbedingung entweder die Wandtemperatur vorgegeben oder die Wandwärmeströme aufgeprägt werden. Die Beziehungen (3.63a,b) und das Wandgesetz (3.65) werden dann herangezogen, wenn die Auflösung der thermischen Grenzschicht aufgrund des damit verbundenen hohen numerischen Aufwandes nicht gelingt. Die Beziehungen (3.63a,b) sind für beide in dieser Arbeit untersuchten Anwendungsfälle gültig, wenn eine geeignete empirische Korrelation (3.64) für die Nusselt-Zahl verfügbar ist. Das Wandgesetz (3.65) gilt dagegen ausschließlich für den Fall einer instabilen Schichtung, also nicht für die untere Wand bei der Fluidschicht mit interner Wärmequelle. Das ist jedoch nicht von Bedeutung, da die thermische Grenzschicht bei stabiler Schichtung um ein Vielfaches dicker ist als bei instabiler Schichtung und selbst bei den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen mit sehr hohen Rayleigh-Zahlen aufgelöst wird. Mit den hier vorgestellten Methoden ist es demnach möglich, bei der Grobstruktursimulation von Naturkonvektion für nahezu alle beliebigen Anwendungsfälle ohne die Auflösung der thermischen Grenzschichten auszukommen.

#### 3.2.2.4 Feinstrukturenergiewandbedingungen

In den diffusiven Termen der Erhaltungsgleichung der kinetischen Feinstrukturenergie (2.15) müssen Gradienten der Feinstrukturenergie an der Wand vorgegeben werden. In Abbildung 3.15 ist der zu erwartende Verlauf der momentanen, lokalen kinetischen Feinstrukturenergie  $\overline{E'}$  an der unteren Wand angedeutet. Dieser Verlauf ist anschaulich zu erklären mit dem Verlauf der Geschwindigkeitskomponenten in Abbildung 3.9 und der Definition der Energie als die Hälfte der Summe der Geschwindigkeitsquadrate. Wegen Gleichung (3.46) und dem linearen Anstieg der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten in der viskosen Unterschicht erfolgt zunächst ein schwacher Anstieg der kinetischen Energie. Außerhalb dieser Schicht,

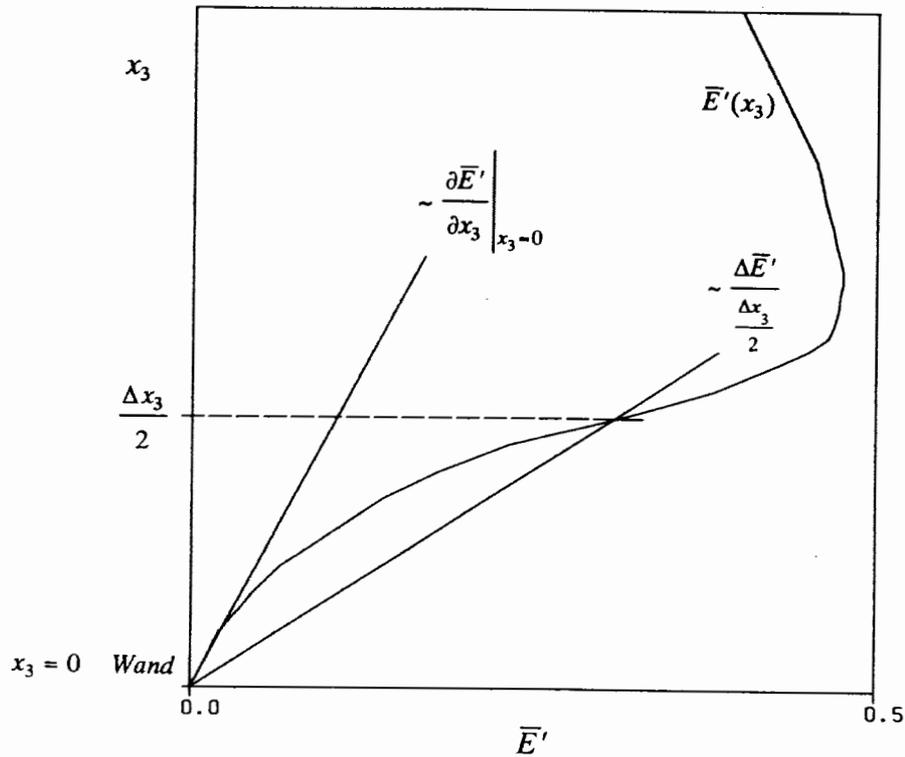


Abb. 3.15: Schematischer Verlauf der Feinstrukturenergie in Wandnähe.

jedoch immer noch in Wandnähe, nimmt die Vertikalgeschwindigkeitskomponente zu und die kinetische Energie erreicht am Grenzschichttrand ihr Maximum. Dieser Sachverhalt wird durch zahlreiche Experimente [Deardorff (1967)], direkte numerische Simulationen [Grötzbach & Wörner (1992)] und auch die hier durchgeführten Simulationen, in denen die Grenzschichten durch das Maschennetz aufgelöst werden, bestätigt.

Eine lineare Approximation der Gradienten der Feinstrukturenergie an der Wand ist deshalb nur dann möglich, wenn mindestens ein Gitterpunkt in der viskosen Unterschicht liegt:

$$\left. \frac{\partial \bar{E}'}{\partial x_3} \right|_{w1} = \frac{\bar{E}'_{k=l} - 0}{\frac{\Delta x_{3k=l}}{2}} \quad (3.67a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{E}'}{\partial x_3} \right|_{w2} = \frac{0 - \bar{E}'_{k=KM}}{\frac{\Delta x_{3k=KM}}{2}} \quad (3.67b)$$

Ist das nicht der Fall, wie in Abbildung 3.15 angedeutet, dann führt die lineare Näherung (3.67a,b) bei zu grober Auflösung dazu, daß der Gradient der Feinstrukturenergie an der Wand überschätzt wird und zu falschen Feinstrukturenergiewerten führt. Es wird daher in Anlehnung an Schumann (1973) ein Korrekturkoeffizient  $c_{WE}$  eingeführt mit  $0 < c_{WE} \leq 1$ :

$$\left. \frac{\partial \bar{E}'}{\partial x_3} \right|_{w1} = c_{WE} \frac{\bar{E}'_{k=1}}{\frac{\Delta x_{3k=1}}{2}} \quad (3.68a)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{E}'}{\partial x_3} \right|_{w2} = -c_{WE} \frac{\bar{E}'_{k=KM}}{\frac{\Delta x_{3k=KM}}{2}} \quad (3.68b)$$

Für die Rechnungen in dieser Arbeit wird  $c_{WE}=0.2$  verwendet.

## 4. Ergebnisse

### 4.1 Einführung

#### 4.1.1 Physikalische Anwendungsfälle

##### 4.1.1.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion

Durch Beheizung der unteren ( $\hat{T}_{w1} = \text{konst.}$ ) und Kühlung der oberen Wand ( $\hat{T}_{w1} > \hat{T}_{w2}$ ) kommt es in einem Kanal zu einer instabilen Schichtung des Fluides. Überschreitet die Temperaturdifferenz ( $\hat{T}_{w1} - \hat{T}_{w2}$ ) ein kritisches Maß, so bleibt der bis dahin vorliegende reine Wärmeleitungszustand nicht erhalten. In der Fluidschicht stellt sich eine Konvektionsbewegung ein, die in Abhängigkeit vom Fluid über regelmäßige Strömungsformen bis hin zur unregelmäßigen turbulenten Strömung führen kann. In Abbildung 2.1 sind alle Einflußgrößen des in der Literatur als Rayleigh-Bénard-Konvektion bekannten Wärmeübertragungs- und Stabilitätsproblems dargestellt. Eine Dimensionsanalyse liefert die charakteristischen Kennzahlen des Rayleigh-Bénard-Problems. Zum einen ist dies die Rayleigh-Zahl:

$$Ra = \frac{\hat{g} \hat{\beta} (\hat{T}_{w1} - \hat{T}_{w2}) \hat{D}^3}{\hat{\nu} \hat{a}} \quad (4.1)$$

In ihr sind die Einflußgrößen enthalten, die die Konvektion bestimmen. Dem antreibenden Einfluß des Auftriebs im Zähler der Rayleigh-Zahl wirken konvektionshemmend Reibungseffekte und Wärmeausgleichsvorgänge zwischen Fluidballen und Umgebung entgegen. Die charakteristischen Stoffgrößen dieser beiden auf molekularer Ebene wirkenden Mechanismen, die kinematische Viskosität  $\hat{\nu}$  und die Temperaturleitfähigkeit  $\hat{a}$ , treten daher im Nenner der Rayleigh-Zahl auf. Das Einsetzen einer Konvektionsbewegung ist unabhängig vom Fluid ausschließlich von der Rayleigh-Zahl abhängig und erfolgt im idealen Fall bei einer Überschreitung des kritischen Wertes  $Ra_c = 1708$  [Zierep (1982b)]. Eine weitere dimensionslose Kennzahl ist die Prandtl-Zahl:

$$Pr = \frac{\hat{\nu}}{\hat{a}} \quad (4.2)$$

Sie kennzeichnet als Verhältnis der molekularen Transportkoeffizienten von Impuls und Energie die Stoffeigenschaften des Fluides. Charakteristisch für Flüssigmetalle sind ihre sehr kleinen Prandtl-Zahlen (Natrium:  $Pr = 0.006$ ). Luft und Wasser liegen dagegen im Bereich mittlerer Prandtl-Zahlen (Luft:  $Pr = 0.71$ , Wasser:  $Pr = 7.0$ ). Eine Kombination der Rayleigh- und der Prandtl-Zahl führt zur Grashof-Zahl:

$$Gr = \frac{Ra}{Pr} = \frac{\hat{g} \hat{\beta} (\hat{T}_{w1} - \hat{T}_{w2}) \hat{D}^3}{\hat{\nu}^2} \quad (4.3)$$

Sie beschreibt den Einfluß, den Trägheits- und Auftriebskräfte im Verhältnis zu den Reibungskräften einer Strömung haben.

Eine weitere Kennzahl ist die Nusselt-Zahl, die im Falle der Naturkonvektion grundsätzlich eine Funktion der übrigen charakteristischen Kenngrößen ist:

$$Nu = \frac{\hat{q} \hat{D}}{\hat{\lambda} (\hat{T}_{w1} - \hat{T}_{w2})} = f(Ra, Pr) \quad (4.4)$$

Sie setzt die Gesamtwärme flußdichte ins Verhältnis zur Wärme flußdichte durch reine Wärmeleitung und ist damit ein charakteristisches Maß für die durch den Konvektionsmechanismus hervorgerufene Wärme flußdichte. Unterhalb der kritischen Rayleigh-Zahl befindet sich das Fluid in Ruhe, die gesamte Wärme wird durch molekulare Wärmeleitung übertragen und die Nusselt-Zahl hat einen Wert von eins. Das Temperaturprofil verläuft in diesem Fall linear.

Abbildung 4.1a zeigt ein Interferogramm aus einem Experiment von Jahn (1975) für Rayleigh-Bénard-Konvektion in Wasser bei  $Ra=4270$ . Sichtbar sind Linien gleicher Dichte, die in dieser Abbildung, aufgrund der linearen Dichte-Temperatur-Beziehung im Gültigkeitsbereich der Boussinesq-Approximation, als Isothermen gedeutet werden können. Bei dieser niedrigen Rayleigh-Zahl ist noch ein regelmäßiges Konvektionsmuster mit abwechselnd auf- und abwärts gerichteten Strömungsbereichen erkennbar.

(a) *Rayleigh-Bénard-Konvektion*



(b) *Fluidschicht mit interner Wärmequelle*



Abb. 4.1: Temperaturverteilung in einer Vertikalebene bei (a) laminarer Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Wasser ( $Pr=7.0$ ,  $Ra=4270$ ) und (b) einer turbulenten Wasserschicht mit interner Wärmequelle ( $Pr=7.0$ ,  $Ra=3.7 \cdot 10^6$ ). Interferogramme aus Jahn (1975).

#### 4.1.1.2 Fluidschicht mit interner Wärmequelle

Werden in dem in Abbildung 2.1 dargestellten Kanal die untere und obere Wand auf gleicher, konstanter Temperatur gehalten und eine in Raum und Zeit konstante innere, volumetrische Wärmequellendichte vorgegeben, dann kommt es in der Fluidschicht sowohl zu stabil als auch instabil geschichteten Bereichen. Die der Volumeneinheit pro Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge wird über beide horizontalen Wände abgeführt. An der nach außen Wärme abgebenden oberen Wand entsteht eine instabile Grenzschicht, weil sich hier kälteres Fluid mit höherer Dichte über wärmerem mit geringerer Dichte befindet. An der nach außen Wärme abgebenden unteren Wand liegt dagegen das kältere, schwerere unterhalb dem wärmeren, leichteren Fluid, so daß hier eine stabile Grenzschicht vorliegt. Dies wird in einem weiteren Interferogramm aus einem Experiment von Jahn (1975) bei  $Ra_1=3.7 \cdot 10^6$  verdeutlicht, Abbildung 4.1b. Aus der oberen Schicht strömt Fluid, verursacht durch die Rayleigh-Taylor-Instabilität, in unregelmäßigen, schmalen Zonen, die durch die Auslenkung der Isothermen zu erkennen sind, nach unten und durchwirbelt den Bereich maximaler Fluidtemperatur. Im unteren Bereich stabiler Schichtung verlaufen die Isothermen parallel.

Eine Dimensionsanalyse liefert auch in diesem Fall die relevanten charakteristischen Kennzahlen. Wie bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion treten auch hier Rayleigh-, Prandtl-, Grashof- und Nusselt-Zahl gemäß den Gleichungen (4.1-4) auf. Sie werden jedoch nicht mit der Wandtemperaturdifferenz  $(\hat{T}_{w1} - \hat{T}_{w2})$  gebildet, die hier Null wäre, sondern mit der maximal im Kanal auftretenden Temperaturdifferenz  $(\hat{T}_{max} - \hat{T}_w)$ . Diese Temperaturdifferenz wird mit der volumetrischen Wärmequellendichte über die Damköhler-Zahl verknüpft:

$$Da = \frac{\hat{Q} \hat{D}^2}{\hat{\lambda} (\hat{T}_{max} - \hat{T}_w)} = Nu_{w1} + Nu_{w2} \quad (4.5)$$

Sie beschreibt das Verhältnis von freigesetzter Wärme durch eine innere, volumetrische Wärmequelle zum Wärmetransport durch Leitung und ist ein Maß für die Temperaturerhöhung in der Fluidschicht. Sie ist außerdem gleich der Summe der an der oberen und unteren Wand auftretenden Nusselt-Zahlen, da nur soviel Gesamtwärme im Verhältnis zum Wärmeübertrag durch reine Leitung an beide Wände abgegeben werden kann, wie durch die innere, volumetrische Wärmequelle im Verhältnis zum Wärmeübertrag durch reine Leitung freigesetzt wird. Im Wärmeleitungszustand entspricht das Temperaturprofil einer Parabel. Daraus folgt für die Nusselt-Zahlen ein Wert von vier ( $Nu_{w1}=Nu_{w2}=4$ ), für die Damköhler-Zahl demzufolge ein Wert von acht ( $Da=8$ ).

Durch Multiplikation der Damköhler-Zahl (4.5) mit der Rayleigh-Zahl (4.1) folgt die wesentliche, problemkennzeichnende, charakteristische Kenngröße der Fluidschicht mit interner Wärmequelle:

$$Ra_1 = Ra Da = \frac{\hat{g} \hat{\beta} \hat{Q} \hat{D}^5}{\hat{v} \hat{a} \hat{\lambda}} \quad (4.6)$$

Sie hat eine der Rayleigh-Zahl  $Ra$  gemäß Gleichung (4.1) ähnliche physikalische Bedeutung und kann als modifizierte Rayleigh-Zahl gedeutet werden. Nach theoretischen Untersuchungen von Sparrow et al. (1964), Debler (1966) und Watson (1968) erfolgt das Einsetzen einer Konvektionsbewegung, unabhängig vom Fluid, im idealen Fall bei einer Überschreitung des kritischen Wertes  $Ra_{lc}=3.7 \cdot 10^4$ .

#### 4.1.2 Übersicht der Grobstruktursimulationen

Für beide im vorigen Kapitel beschriebenen physikalischen Problemfälle werden numerische Simulationen durchgeführt. Dabei ist die Wahl der Simulationsmethode, wie in Kapitel 2.2 diskutiert, sowie die Frage nach der Behandlung der Grenzschichten vom Anwendungsfall, von der Rayleigh-Zahl (d.h. von  $Ra$  oder  $Ra_T$ ) und vom gewählten Modellfluid (d.h. von  $Pr$ ) abhängig. Allen durchgeführten gemischten Simulationen und Grobstruktursimulationen, mit oder ohne Auflösung der Wandbereiche durch das Maschennetz, liegen die in Kapitel 3 beschriebenen Modelle zugrunde. Eine Spezifikation der berechneten Fälle bezüglich der wesentlichen numerischen und physikalischen Kenngrößen enthält Tabelle 4.1. In den Spalten u-Feld und T-Feld ist angegeben, welche Simulationsmethode verwendet (LES=Large Eddy Simulation, DNS=Direct Numerical Simulation) und wie die hydrodynamische bzw. die thermische Grenzschicht behandelt (WG=Wandgesetz gemäß Kapitel 3.2) wird.

Zur Verifikation der in Kapitel 3 beschriebenen Modellansätze für die Feinstruktur sowie die Randbedingungen und zur Durchführung numerischer Studien bezüglich des Einflusses der Größe des Rechengebietes, des Einflusses des Maschennetzes sowie der in Kapitel 3.1.2.3 beschriebenen Studie zur Kalibrierung der Modellkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  (BLU25A), werden Grobstruktursimulationen mit und ohne Auflösung der Grenzschichten von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft bei  $Ra=2.5 \cdot 10^6$  (BLU25A-J) und  $Ra=10^7$  (BLU100AB) durchgeführt. Sie werden mit Experimenten von Deardorff & Willis (1967), Goldstein & Chu (1969) und Yun & Chung (1988) verglichen.

Um das Feinstrukturmodell bei stabilen Schichtungseinflüssen zu testen, werden Grobstruktursimulationen einer horizontalen Wasserschicht mit interner Wärmequelle bei  $Ra_T=1.5 \cdot 10^{10}$  (IWA15AB) durchgeführt. Hier ist der Gegenstand numerischer Studien der Einfluß der Größe des Integrationsgebietes und die Wahl der Anfangsbedingungen im Temperaturfeld. Die Grenzschichten werden bei diesen Simulationen durch das Maschennetz aufgelöst. Hier können nur Vergleiche qualitativer Art mit Experimenten von Jahn (1975) im Temperaturfeld und direkten numerischen Simulationen von Grötzbach (1987) im Geschwindigkeits- und Temperaturfeld erfolgen.

Aufbauend auf den Ergebnissen der vorangegangenen Luft- und Wassersimulationen werden, das eigentliche Ziel dieser Arbeit verfolgend, gemischte Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium bei mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen durchgeführt und eine Datenbasis für die Rayleigh-Zahlen  $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ,  $2.5 \cdot 10^5$ ,  $10^6$  und  $10^7$  erstellt (BNA84, BNA250, BNA1000, BNA10000). Im Temperaturfeld erfolgt in allen Fällen eine direkte numerische Simulation und die thermischen Grenzschichten werden durch das Maschennetz aufgelöst. Das Geschwindigkeitsfeld dagegen wird in allen Fällen mit Grobstruktur-

Fall	Fluid	Ra, Ra <sub>f</sub>	Pr	u-Feld	T-Feld	X <sub>1,2</sub>	ΔX <sub>1,2</sub>	ΔX <sub>3W1,2</sub>	N <sub>1,2</sub>	N <sub>3</sub>	t	N <sub>t</sub>	CPU-Zeit
BLU25A	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES+WG	LES+WG	8	0.1	0.08	80	10	963.5	20440	3h
BLU25B	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES+WG	LES+WG	10	0.1	0.08	100	10	1285.4	29480	5h
BLU25C	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES+WG	LES+WG	12	0.1	0.08	120	10	1055.8	24200	6h
BLU25D	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES+WG	LES+WG	16	0.1	0.08	160	10	670.9	15600	6h
BLU25E	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES	LES	8	0.16	0.007	50	26	130.0	11520	3h
BLU25F	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES	LES	8	0.16	0.01	50	20	184.6	9640	2h
BLU25G	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES	LES	8	0.16	0.014	50	16	248.3	14640	2h
BLU25H	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES	LES	8	0.2	0.014	40	16	333.0	18600	2h
BLU25I	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES	LES	8	0.4	0.014	20	16	266.4	20960	1h
BLU25J	Luft	2.5 10 <sup>6</sup>	0.71	LES	LES	8	0.8	0.014	10	16	215.6	34800	1h
BLU100A	Luft	1.0 10 <sup>7</sup>	0.71	LES+WG	LES+WG	10	0.1	0.08	100	10	1080.1	22640	4h
BLU100B	Luft	1.0 10 <sup>7</sup>	0.71	LES	LES	10	0.1	0.007	100	26	196.6	47760	24h
IWA15A	Wasser	1.5 10 <sup>10</sup>	7.0	LES	LES	6	0.15	W1 0.0135 W2 0.004	40	18	973.0	73040	10h
IWA15B	Wasser	1.5 10 <sup>10</sup>	7.0	LES	LES	4.5	0.15	W1 0.0135 W2 0.004	30	18	1177.0	140680	14h
BNA84	Natrium	8.4 10 <sup>4</sup>	0.006	LES+WG	DNS	10	0.1	0.08	100	10	401.1	19280	4h
BNA250	Natrium	2.5 10 <sup>5</sup>	0.006	LES+WG	DNS	10	0.1	0.08	100	10	523.1	35120	7h
BNA1000	Natrium	1.0 10 <sup>6</sup>	0.006	LES+WG	DNS	10	0.1	0.035	100	14	235.9	24120	7h
BNA10000	Natrium	1.0 10 <sup>7</sup>	0.006	LES+WG	DNS	10	0.1	0.015	100	16	180.7	31760	10h

Tab. 4.1: Spezifikation der berechneten Fälle für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft (BLU...) und Natrium (BNA...) sowie der Wasserschicht mit interner Wärmequelle (IWA...).

simulationen berechnet und die hydrodynamischen Grenzschichten werden nicht aufgelöst. Hier kommen die in Kapitel 3 beschriebenen Modelle zum Einsatz. Vergleiche erfolgen mit Experimenten von Kek (1989) und Kek & Müller (1993).

Alle Simulationen wurden im Kernforschungszentrum Karlsruhe auf dem Vektorrechner VP400-EX durchgeführt, der über eine Speicherkapazität von 512 MByte RAM, d.h. bei doppelt genauer Rechnung 64 MWords RAM, verfügt. Er hat eine Peak Performance von 1.7 GFLOPS. Bei dem verwendeten Lösungsverfahren werden in jedem Gitterpunkt mindestens 16 Feldwerte benötigt. Bezüglich des größten verwendeten Maschennetzes im Fall BLU25D beträgt die Speicheranforderung demnach etwa 4 MWords (plus ca. 0.3 MWords für das Programm) und liegt weit unterhalb der maximal möglichen Speicherkapazität der VP400-EX. Es fällt keine Lese-/Schreib-Zeit für das Auslagern und Wiedereinlesen von Datenblöcken an und die CPU-Zeit für  $N_t=15600$  Zeitschritte beträgt im Fall BLU25D 6 Stunden. Dies entspricht einer charakteristischen, durch das Rechenprogramm, den Rechner und das Maschennetz bestimmten CPU-Zeit pro Masche und Zeitschritt von 5.4  $\mu$ s.

### 4.1.3 Übersicht der direkten numerischen Simulationen

Neben den in Tabelle 4.1 aufgezählten gemischten Simulationen und Grobstruktursimulationen, werden zusätzlich eine Reihe von direkten numerischen Simulationen zur Analyse herangezogen, die von Grötzbach (1987, 1989) und Wörner (1994) durchgeführt und im Rahmen dieser Arbeit teilweise weitergeführt wurden. Eine Übersicht über diese Simulationen gibt Tabelle 4.2. Die Nomenklatur zur Klassifizierung der verschiedenen Fälle entspricht der in Kapitel 4.1.2 erläuterten.

Zum einen werden die verschiedenen direkten numerischen Simulationen eingesetzt, um Analysen bezüglich der in Kapitel 3 eingeführten Modellansätze zu machen, dort diskutierte physikalische Vorstellungen und Aussagen zu untermauern und die in die Modellansätze der Feinstrukturkorrelationen und der Wandbedingungen der viskosen und thermischen Diffusionsterme eingehenden Modellkoeffizienten zu bestimmen. Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigen die Abbildungen 3.1-4, Tabelle 3.1, die Abbildungen 3.10, 3.13, 3.14 und Tabelle 3.2. Dort werden eindimensionale Energiespektren verschiedener turbulenter Fluktuationsgrößen und Profile diverser Korrelationen der turbulenten Energiegleichung sowie der Temperatur und dem Geschwindigkeitsbetrag ausgewertet.

Zum anderen werden die Daten der direkten numerischen Simulationen bei niedrigen Rayleigh-Zahlen auch eingesetzt, um Vergleiche mit den hier durchgeführten gemischten Simulationen und Grobstruktursimulationen bei mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen anzustellen und neue statistische Auswertungen vorzunehmen. Dies wird ein Diskussionsgegenstand nachfolgender Unterkapitel im Ergebnisteil sein. Als Beispiel kann die in Kapitel 4.6.2 durchgeführte Analyse der exakten und modellierten Dissipationsgleichung bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium genannt werden. Diese Gleichung enthält zum Teil Mehrfachkorrelationen zwischen Ableitungen hochfrequenter, turbulenter Fluktuationsgrößen, so daß statistische Auswertungen nur dann sinnvoll sind, wenn auch die hohen Wellenzahlen im Energiespektrum durch das Maschennetz aufgelöst werden. Für eine detaillierte

Fall	Fluid	Ra, Ra <sub>1</sub>	Pr	X <sub>1,2</sub>	Δx <sub>1,2</sub>	Δx <sub>3w1,2</sub>	N <sub>1,2</sub>	N <sub>3</sub>
BLU3A	Luft	3.8 10 <sup>5</sup>	0.71	7.92	0.044	0.005	180	32
BLU3B	Luft	3.8 10 <sup>5</sup>	0.71	7.92	0.044	0.0025	180	46
BLU3C	Luft	3.8 10 <sup>5</sup>	0.71	7.92	0.044	0.0015	180	52
BLU3D	Luft	3.8 10 <sup>5</sup>	0.71	7.92	0.044	0.001	180	58
BLU6	Luft	6.3 10 <sup>5</sup>	0.71	7.92	0.0396	0.005	200	39
IWA4	Wasser	4.0 10 <sup>6</sup>	7.0	7.2	0.04	W1 0.0325 W2 0.005	180	32
BNA3	Natrium	3.0 10 <sup>3</sup>	0.006	8	0.0625	0.01	128	31
BNA6	Natrium	6.0 10 <sup>3</sup>	0.006	8	0.04	0.01	200	31
BNA12	Natrium	1.2 10 <sup>4</sup>	0.006	8	0.032	0.005	250	39
BNA24	Natrium	2.4 10 <sup>4</sup>	0.006	8	0.032	0.005	250	39
BNA50	Natrium	5.0 10 <sup>4</sup>	0.006	8	0.032	0.005	250	39

Tab. 4.2: Übersicht der analysierten direkten numerischen Simulationen für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft (BLU...) und Natrium (BNA...) sowie der Wasserschicht mit interner Wärmequelle (IWA...).

Analyse der Wandbereiche wird deshalb der Fall BLU3 in mehreren Schritten auf ein feineres Maschennetz interpoliert und in der Zeit weiterintegriert. Tabelle 4.3 verdeutlicht, daß eine Simulation auf dem feinsten Gitter vom Ruhezustand aus in diesem Fall wegen dem großen CPU-Zeitaufwand praktisch nicht durchführbar wäre. Dieser wird durch die sehr feinen Wandmaschen bedingt, die aufgrund des Zeitschrittkriteriums (2.22) sehr kleine Zeitschrittweiten zur Folge haben.

Die Speicheranforderung im Fall BLU3D beträgt etwa 30 MWords (plus 3.5 MWords für das Programm) und liegt damit immer noch im Bereich der maximal möglichen Speicherkapazität der VP400-EX. Die CPU-Zeit für N<sub>t</sub>=12320 Zeitschritte beträgt im Fall BLU3D 18 Stunden. Dies entspricht einer charakteristischen CPU-Zeit pro Masche und Zeitschritt von 2.7 μs.

Fall	t	N <sub>t</sub>	CPU-Zeit
BLU3A	107.2	49120	
BLU3B	109.9	52560	4h
BLU3C	113.1	63560	14h
BLU3D	114.6	75880	18h

Tab. 4.3: Problemzeit, Zeitschrittzahl und Rechenzeit bei der Interpolation von Fall BLU3 auf ein feineres Maschennetz.

Die direkte numerische Simulation mit TURBIT ist damit bezüglich der CPU-Zeit pro Masche und Zeitschritt um einen Faktor zwei schneller als die gemischte Simulation oder die Grobstruktursimulation, weil dort keine Transportdifferentialgleichung für die Feinstrukturenergie gelöst werden muß.

#### 4.1.4 Analysemethode

Eine Auswertung der Simulationsergebnisse bezüglich statistischer Daten des Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes erweist sich im Rahmen der in dieser Arbeit untersuchten Fälle nur dann als sinnvoll, wenn die Strömung einen im statistischen Sinne stationären Zustand erreicht. Um zu beurteilen, wann dies der Fall ist, werden während einer Simulation die Zeitsignale charakteristischer, physikalischer Größen gespeichert. Für das Geschwindigkeitsfeld sind dies die turbulente kinetische Energie  $k$  und die Feinstrukturenergie  $\overline{E'}$ , für das Temperaturfeld die Wandtemperaturen, die Maximaltemperatur, die Wandwärmeströme und der RMS-Wert der Temperatur in der Kanalmittelebene.

Die statistische Auswertung der turbulenten Felder besteht im wesentlichen aus der Betrachtung der primären physikalischen Variablen, der zweiten und höheren statistischen Momente, räumlicher Korrelationen vom Zweipunkttypus und räumlicher eindimensionaler Energiespektren. Bei vollturbulenter Naturkonvektion ohne aufgeprägte Vorzugsrichtung gilt im Idealfall einer ebenen, horizontal unendlich ausgedehnten Fluidschicht, daß die Strömung in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung homogen ist. Es existieren dann keine Gradienten der zeitabhängigen Strömungsgrößen in diesen Richtungen, ausreichend große Mittelungszeiträume vorausgesetzt. Gradienten der Zeitmittelwerte sind nur in der Richtung senkrecht zur Wand, d.h. in  $x_3$ -Richtung, vorhanden. Die Auswertung einer beliebigen Strömungsvariablen in TURBIT erfolgt deshalb zunächst durch Mittelung über horizontale Flächen. Dies führt zu einem vertikalen Profil horizontaler Flächenmittelwerte, die nun zusätzlich durch die Berücksichtigung mehrerer Zeitpunkte zeitlich gemittelt werden. Die räumlichen Korrelationen vom Zweipunkttypus und die räumlichen eindimensionalen Energiespektren werden in  $x_1$ -Richtung ausgewertet. Dies kann ebensogut in  $x_2$ -Richtung geschehen, macht jedoch wegen der horizontalen Homogenität keinen Unterschied. Alle in  $x_1$ -Richtung ausgewerteten Zweipunkt-Korrelationen und Energiespektren einer Ebene werden sodann gemittelt. Dies führt dazu, daß in vertikaler Richtung für jede horizontale Ebene eine  $x_1$ -abhängige Zweipunktkorrelation und ein  $k_1$ -abhängiges Energiespektrum der ausgewerteten Strömungsvariablen vorliegt. Diese können durch die Berücksichtigung mehrerer Zeitpunkte zeitlich gemittelt werden.

## 4.2 Numerische Vorstudien

In diesem Kapitel wird untersucht, welche Einflüsse eine Variation verschiedener Simulationsparameter auf die Simulationsergebnisse hat. Es werden die Fragen untersucht, wie sich die Größe des Rechengebietes, d.h. die Wahl der Periodenlängen, und die räumliche Auflösung, d.h. die Wahl der Maschengrößen in  $x_1$ -,  $x_2$ - und  $x_3$ -Richtung, auf die Ergebnisse auswirkt. Desweiteren wird diskutiert, welche Auswirkungen eine Variation der Wand- und Anfangsbedingungen auf die Simulationsergebnisse hat.

## 4.2.1 Einfluß der Größe des Rechengebietes

Zunächst wird die Frage nach dem Einfluß der Größe des Rechengebietes diskutiert. Grötzbach (1983, 1988) weist darauf hin, daß die Periodenlängen bei einer numerischen Simulation nicht hinsichtlich des Rechenaufwandes gewählt werden sollten, sondern ihre Auswahl physikalischen Gesichtspunkten folgen muß. Dies zeigt z.B. auch das Ergebnis der Periodenlängenstudie von Wörner (1994), der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit flüssigem Natrium bei niedrigen Rayleigh-Zahlen untersucht hat. Die Wahl der Periodenlängen muß bei dieser Art der Simulation zwei Forderungen genügen. Zum einen müssen die Periodenlängen mindestens so groß sein, daß die makroskopische Wellenlänge der bei einer bestimmten Rayleigh-Zahl auftretenden großräumigen Konvektionsstrukturen im Rechengebiet darstellbar ist. Zum anderen kommt bei der Wahl periodischer Randbedingungen in den horizontalen Richtungen hinzu, daß die Vorgänge in den turbulenten Feldern, ausgedrückt durch Korrelationen der physikalisch abhängigen Variablen, innerhalb der gewählten Periodenlängen statistisch entkoppelt sein müssen. Um den Einfluß der Periodenlängen bei beiden physikalischen Anwendungsfällen zu untersuchen, werden Simulationen einer Wasserschicht mit interner Wärmequelle (IWA15AB) und von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft (BLU25A-D) bei hohen Rayleigh-Zahlen durchgeführt, wobei die Größe des Rechengebietes bei jeweils gleicher räumlicher Auflösung und unveränderten Koeffizienten des Feinstrukturmodells variiert wird.

Die Abbildungen 4.2a,b zeigen den Verlauf von Zweipunktkorrelationen verschiedener Geschwindigkeitsfluktuationen  $R_{ii}$  und der Temperaturfluktuationen  $R_{TT}$  einer Fluidschicht mit interner Wärmequelle in der Kanalmittelebene:

$$R_{ii}(\Delta x_1, x_3) = \frac{\langle u_i''(x_1, x_3) u_i''(x_1 + \Delta x_1, x_3) \rangle}{\langle u_i''^2(x_1, x_3) \rangle} \quad (4.7a)$$

$$R_{TT}(\Delta x_1, x_3) = \frac{\langle T''(x_1, x_3) T''(x_1 + \Delta x_1, x_3) \rangle}{\langle T''^2(x_1, x_3) \rangle} \quad (4.7b)$$

Deutlich erkennbar ist die statistische Entkopplung der physikalisch abhängigen Variablen im Geschwindigkeits- und Temperaturfeld über jeweils die halbe Kanallänge hinweg, obwohl die Periodenlängen, die im Fall IWA15A  $X_{1,2}=6$  betragen, im Fall IWA15B deutlich auf  $X_{1,2}=4.5$  reduziert sind. Das bedeutet, daß auch die typische makroskopische Wellenlänge, der durch den Mechanismus der Rayleigh-Taylor-Instabilität mit verursachten Ablösegebiete an der oberen Wand, in beiden Fällen durch das Modellgebiet ausreichend erfaßt wird. Diese scheint, so das Ergebnis eines Vergleiches mit dem Fall IWA4 ( $Ra_1=4.0 \cdot 10^6$ ), mit zunehmender Rayleigh-Zahl abzunehmen. Dort betragen die Periodenlängen  $X_{1,2}=7.2$ , während  $X_{1,2}=2.8$ , so das Ergebnis von Grötzbach (1988), in diesem Fall zu klein ist. Im Fall IWA15B erweist sich  $X_{1,2}=4.5$  als ausreichend. Damit wird deutlich, daß in einer Wasserschicht mit interner Wärmequelle, selbst bei sehr hohen Rayleigh-Zahlen, die Wahl geeigneter Periodenlängen bezüglich beider Forderungen - Erfassung der makroskopischen Wellenlänge und statistische Entkopplung der turbulenten Vorgänge innerhalb einer Kanallänge - unkritisch ist.

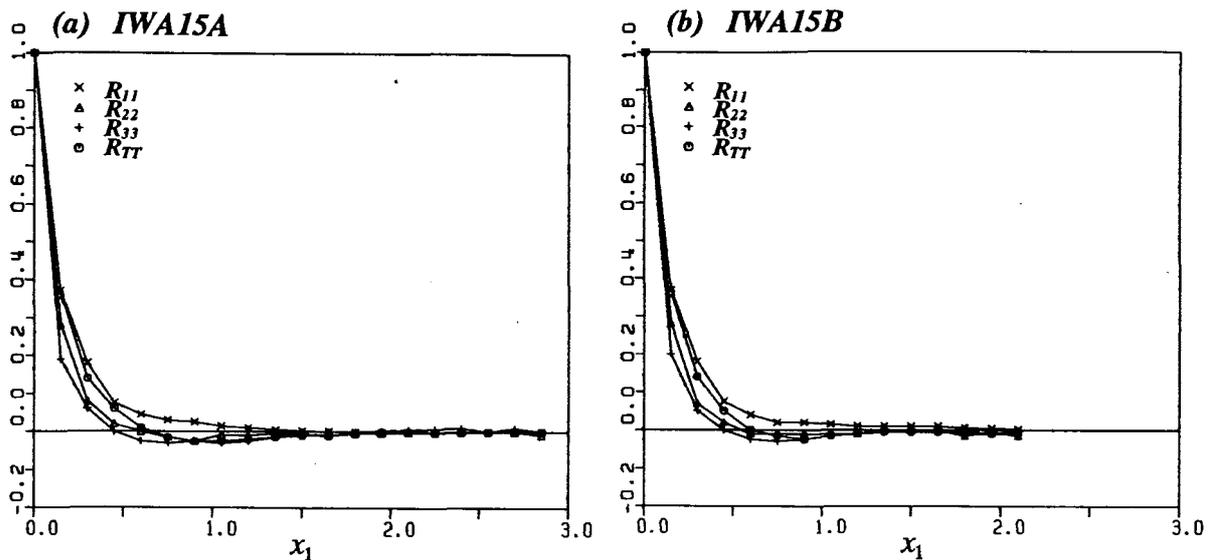


Abb. 4.2: Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen  $u_i''$  und der Temperaturfluktuationen  $T''$  in der Kanalmittelebene in Abhängigkeit der  $x_1$ -Richtung der Fälle (a) IWA15A ( $X_{1,2}=6$ ) und (b) IWA15B ( $X_{1,2}=4.5$ ).

Bei der in Kapitel 3.1.2.3 beschriebenen Koeffizientenkalibrierung wird angenommen, daß bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft im Fall BLU25A zu geringe Periodenlängen die hauptsächliche Ursache für den zu hohen Energieinhalt im niederen Wellenzahlbereich sind. Die Energiespektren in Abbildung 4.3 untermauern diese Behauptung. Bei der Periodenlänge  $X_{1,2}=8$  steigt der Energieinhalt im gesamten Wellenzahlbereich mit wachsender Rayleigh-Zahl an. Die Spektren zeigen aber ihren charakteristischen Verlauf, wenngleich im Spektrum der Temperaturfluktuationen bei kleinen Wellenzahlen im Fall BLU25A kein Intensitätsmaximum mehr existiert. Dieses tritt bei Periodenlängen  $X_{1,2} \geq 10$  wieder auf. Die Spektren der Fälle BLU25BC werden breiter und stimmen im gesamten Wellenzahlbereich mit den Spektren der direkten numerischen Simulationen überein. Überraschend ist, daß bei einer weiteren Vergrößerung der Periodenlängen im Fall BLU25D mit  $X_{1,2}=16$ , der Energieinhalt im gesamten Wellenzahlbereich weiter sinkt und noch langwelligere Anteile auftreten. Das deutet auf eine Fortsetzung dieser Entwicklung hin. Die Studie wird bei dieser Periodenlänge wegen des immer größer werdenden numerischen Aufwandes abgebrochen. Es ist zu vermuten, daß auch die Periodenlängen der direkten numerischen Simulation trotz der niedrigeren Rayleigh-Zahlen nicht ausreichend groß sind.

Auch die Abbildungen 4.4a-f unterstreichen die zuvor gemachten Aussagen. In allen Fällen existiert eine starke räumliche Kopplung der Temperaturfluktuationen  $T''$  und mit Ausnahme von Fall BLU25D eine starke räumliche Kopplung der Geschwindigkeitsfluktuationen  $u_3''$ , die die Zulässigkeit periodischer Randbedingungen in Frage stellt. Verantwortlich dafür ist die Kopplung der durch die beiden instabilen Grenzschichten und den Mechanismus der Rayleigh-Taylor-Instabilität hervorgerufenen Auf- und Abstromgebiete durch die gegenüber-

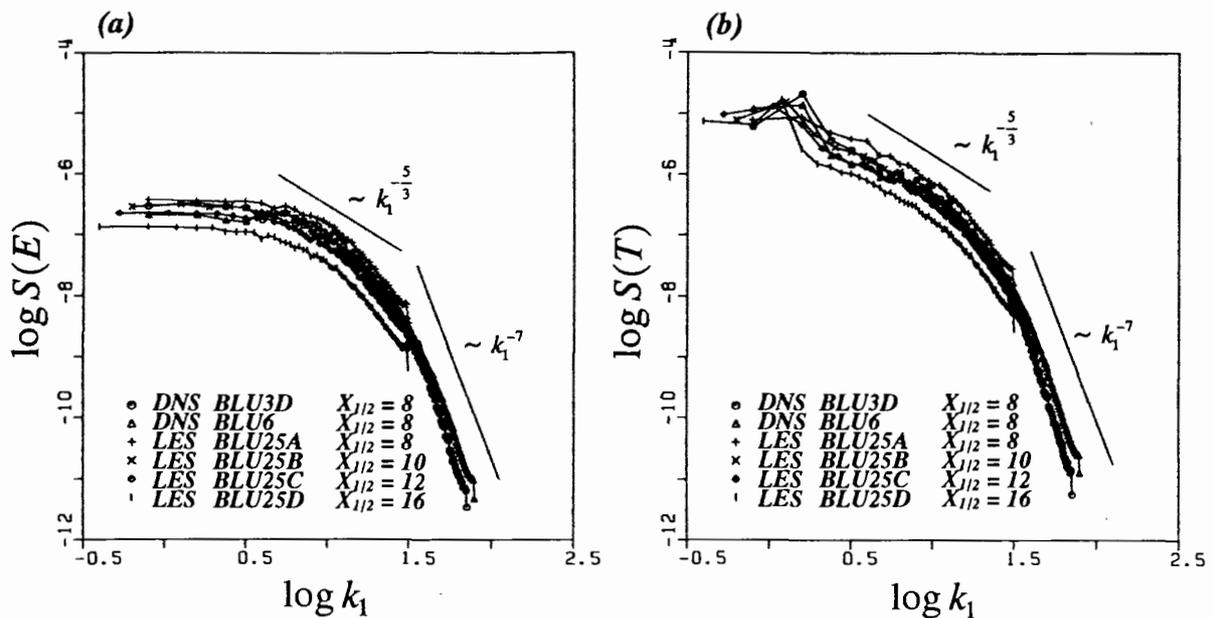


Abb. 4.3: Eindimensionale Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie (a) und der Temperaturfluktuationen (b) bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft in Kanalmitte. Variation der Periodenlängen bei der Grobstruktursimulation ( $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ,  $X_{1,2}=8, 10, 12, 16$ ) im Vergleich zu direkten numerischen Simulationen ( $Ra=3.8 \cdot 10^5, 6.3 \cdot 10^5$ ,  $X_{1,2}=7.92$ ).

liegenden festen Wände. Die Periodenlänge  $X_{1,2}=8$  im Fall BLU25A scheint viel zu gering zu sein, während die Zweipunktkorrelationen im Fall BLU25B mit der Periodenlänge  $X_{1,2}=10$  eine größere Ähnlichkeit mit denen der Fälle BLU3 und BLU6 aufweisen. Der Verlauf von  $R_{TT}$  der Fälle BLU25CD gibt zu erkennen, daß die stärkste räumliche Kopplung im Temperaturfeld auftritt und mit zunehmendem  $x_1$  geringer wird. Für eine statistische Entkopplung der Vorgänge im Temperaturfeld wären jedoch noch größere Rechengebiete erforderlich. Im Gegensatz zur Fluidschicht mit interner Wärmequelle nimmt die makroskopische Wellenlänge bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit steigender Rayleigh-Zahl zu.

Eine statistische Analyse der Fälle BLU25A-D und die Verifikation in Kapitel 4.3 zeigen, daß weitergehende Konsequenzen der zu geringen Periodenlängen nicht offensichtlich sind und auch die auftretenden makroskopischen Strukturen in allen Fällen physikalisch sinnvoll erscheinen. Es wird deshalb wegen der guten Übereinstimmung der Spektren in Abbildung 4.3 für alle weiteren Rechnungen, d.h. insbesondere auch die Natriumsimulationen, die Periodenlänge  $X_{1,2}=10$  gewählt. Wegen der statistischen Kopplung wären größere Periodenlängen bei der Simulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion zwar wünschenswert, jedoch nur schwer realisierbar, weil z.B. eine Verdopplung der Periodenlängen bei unveränderter Auflösung eine Vervielfachung des numerischen Aufwandes bedeuten würde. Hier sind vor allem bezüglich der in den Tabellen 4.1 und 4.3 genannten Rechenzeiten praktische Grenzen gesetzt.

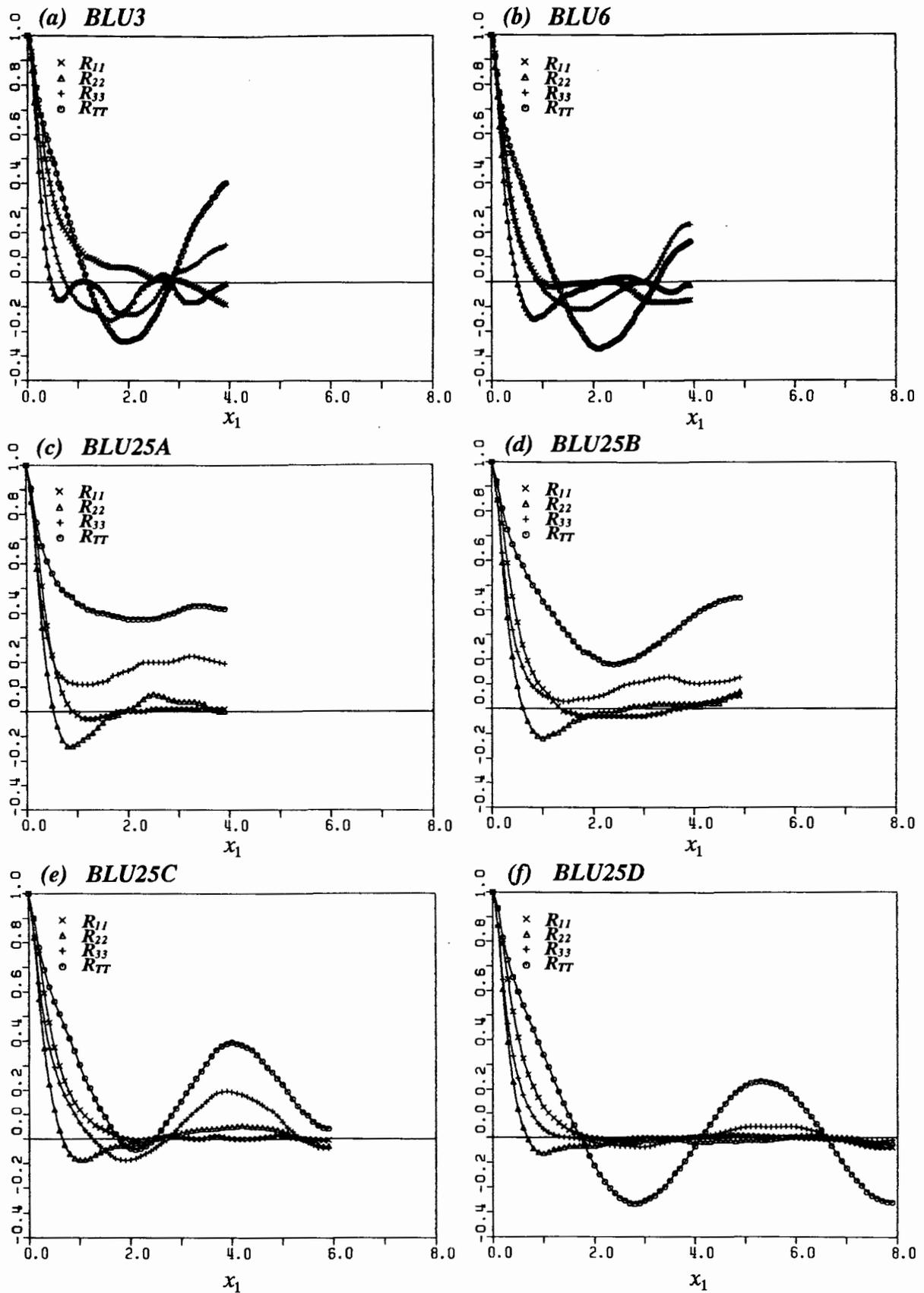


Abb. 4.4: Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen  $u_i''$  und der Temperaturfluktuationen  $T''$  in der Kanalmittelebene in Abhängigkeit der  $x_1$ -Richtung der Fälle (a) BLU3 ( $Ra=3.8 \cdot 10^5$ ,  $X_{1,2}=7.92$ ), (b) BLU6 ( $Ra=6.3 \cdot 10^5$ ,  $X_{1,2}=7.92$ ) und (c-f) BLU25A-D ( $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ,  $X_{1,2}=8, 10, 12, 16$ ).

## 4.2.2 Einfluß der räumlichen Auflösung

Die Frage nach dem Einfluß der räumlichen Auflösung des Rechengebietes wird wie die Frage nach dem Einfluß der Größe des Rechengebietes anhand der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft bei  $Ra=2.5 \cdot 10^6$  untersucht. Dabei wird in den Fällen BLU25E-G die räumliche Auflösung in der vertikalen Richtung ( $N_{1,2}=50$ ;  $N_3=26, 20, 16$  Maschen), in den Fällen BLU25G-J die räumliche Auflösung in den horizontalen Richtungen ( $N_{1,2}=50, 40, 20, 10$ ;  $N_3=16$  Maschen) verändert. Bei dieser Studie liegen allen Simulationen die gleichen Periodenlängen zugrunde ( $X_{1,2}=8$ ), die Grenzschichten werden durch das Maschennetz aufgelöst und die maximalen Koeffizienten des Feinstrukturmodells, die in halber Schichthöhe auftreten, sind gleich.

Verglichen werden auch hier die eindimensionalen Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie sowie der Temperaturfluktuationen der verschiedenen Simulationen BLU25E-J in einer Ebene nahe der Kanalmitte. Auffallend ist, daß alle in Abbildung 4.5 dargestellten Spektren im gesamten Wellenzahlbereich einen der Simulation BLU25A vergleichbaren oder höheren Energieinhalt aufweisen und im Bereich der gerade noch durch das Maschennetz aufgelösten Strukturen bei den hohen Wellenzahlen einen deutlich flacheren Verlauf haben, als die im Rahmen der Periodenlängenstudie ausgewerteten Spektren in Abbildung 4.3. Die erste Aussage ist mit dem Ergebnis des letzten Unterkapitels zu begründen und auf die Periodenlängen  $X_{1,2}=8$  zurückzuführen. Der zweite Sachverhalt beruht auf den Werten der Fein-

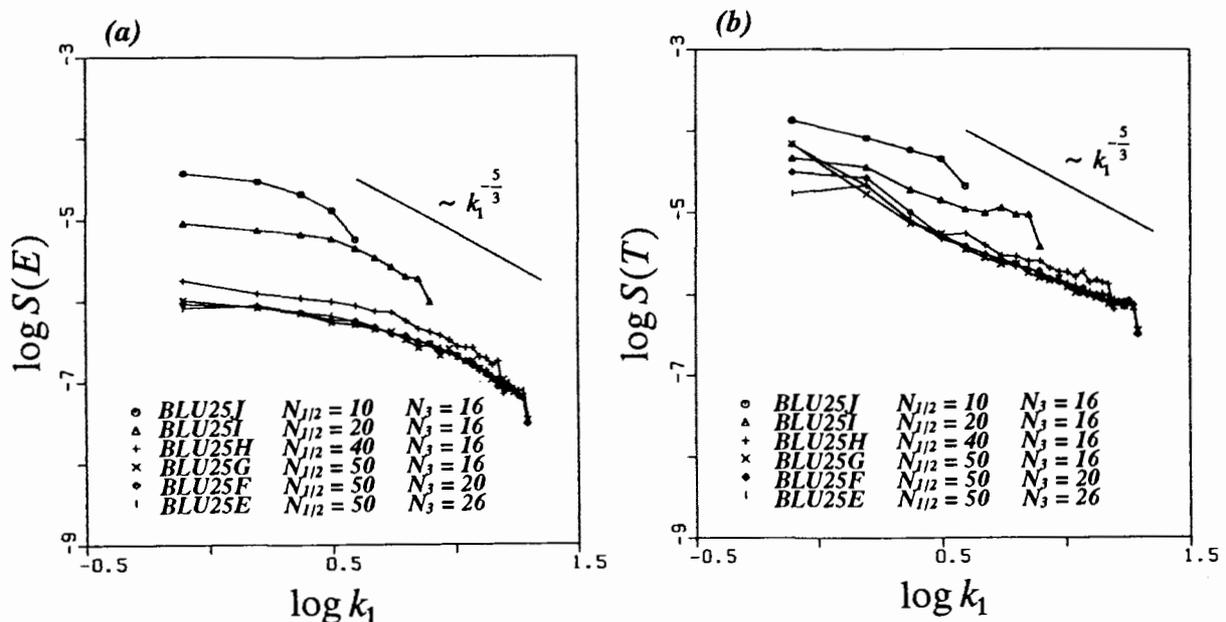


Abb. 4.5: Eindimensionale Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie (a) und der Temperaturfluktuationen (b) bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft in Kanalmitte. Variation der räumlichen Auflösung (BLU25EFG:  $N_{1,2}=50$ ,  $N_3=26, 20, 16$ ; BLU25GHIJ:  $N_{1,2}=50, 40, 20, 10$ ,  $N_3=16$ ).

strukturkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  bei diesen Simulationen. Deren maximale Werte in halber Schichthöhe entsprechen exakt denen aus der Theorie isotroper Turbulenz herleitbaren (siehe Tabelle 3.1, Kapitel 3.1.2.3 und Abbildung 3.4) und sind bei der Durchführung dieser Studie noch nicht kalibriert. Ein Nachteil bezüglich der Interpretation der Simulationsergebnisse dieses Unterkapitels ist deshalb nicht zu erwarten, weil die Spektren den erwarteten  $k_1^{-5/3}$ -Verlauf haben. Da allen Simulationen die gleichen Parameter zugrunde liegen, können die wesentlichen Unterschiede im Ergebnis grundsätzlich interpretiert werden.

In den Fällen BLU25E-G mit gleichbleibender horizontaler und schlechter werdender vertikaler Auflösung ist im Verlauf der Spektren nahezu kein Unterschied festzustellen. Ganz anders das Ergebnis bei einem Vergleich der Spektren in den Fällen BLU25G-J mit schlechter werdender horizontaler und gleichbleibender vertikaler Auflösung. Schon im Fall BLU25H deutet sich eine Erhöhung des Energieinhaltes des aufgelösten Spektralbereiches an, die jedoch erst in den Fällen BLU25IJ signifikant wird. In diesen Fällen ist das Maschennetz offensichtlich derart grob, daß der "inertial subrange" nicht aufgelöst wird. Die erzeugte turbulente kinetische Energie wird nicht in ausreichendem Maße zu kleineren Skalen transportiert und dissipiert. Der Energieinhalt der aufgelösten Grobstruktur ist unphysikalisch hoch, weil das Feinstrukturmodell nicht in der Lage ist, die turbulenten Transportvorgänge außerhalb des "inertial subrange" richtig zu beschreiben.

Demnach kann festgehalten werden, daß bei einer Grobstruktursimulation die räumliche Auflösung des Rechengebietes durch das Maschennetz mindestens so fein sein muß, daß die Skalen im Bereich des "inertial subrange", in der das Feinstrukturmodell gültig ist und die Physik richtig beschreibt, erfaßt werden. Diese Forderung ist in den vorliegenden Fällen offensichtlich für horizontale Maschenweiten  $\Delta x_1 = \Delta x_2 < 0.16$  erfüllt.

### **4.2.3 Einfluß der Größe der wandnahen Maschen**

Ein kritischer Punkt bei der numerischen Simulation von Kanalströmungen ist die Behandlung der Wandbereiche, weil in den dort auftretenden Grenzschichten zumeist stark nichtlineare Änderungen der physikalisch abhängigen Variablen auftreten. Grundsätzlich unterschieden werden kann zwischen den beiden Möglichkeiten, die Gradienten in Wandnähe durch das Maschennetz aufzulösen oder die nichtlinearen Änderungen und die Wandgradienten zu modellieren und sinnvolle Werte außerhalb der Unterschichten vorzugeben.

Ist ersteres der Fall, d.h. sollen die Grenzschichten vollständig durch das Maschennetz aufgelöst werden, dann muß die Forderung, daß mindestens ein Maschenpunkt innerhalb der Unterschichten liegt, erfüllt werden. Für eine sinnvolle Vorgabe der Wandmaschen ist deshalb eine Abschätzung der Grenzschichten erforderlich. Beide im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Anwendungsfälle - die Rayleigh-Bénard-Konvektion und die Fluidschicht mit interner Wärmequelle - weisen bei hohen Rayleigh-Zahlen Grenzschichtcharakter auf. Ausgehend von der Annahme, daß der gesamte Wärmestrom in der thermischen Grenzschicht durch molekulare Wärmeleitung übertragen wird, folgt:

$$\hat{q} = \hat{\lambda} \frac{\Delta \hat{T}_{max}/2}{\hat{\delta}_T} \quad \text{Rayleigh-Bénard-Konvektion} \quad (4.8a)$$

$$\hat{q}_{w1,2} = \hat{\lambda} \frac{\Delta \hat{T}_{max}}{\hat{\delta}_{T1,2}} \quad \text{Fluidschicht mit interner Wärmequelle} \quad (4.8b)$$

Damit können für die Nusselt-Zahlen die Beziehungen

$$Nu = \frac{\hat{D}}{2 \hat{\delta}_T} \quad \text{Rayleigh-Bénard-Konvektion} \quad (4.9a)$$

$$Nu_{w1,2} = \frac{\hat{D}}{\hat{\delta}_{T1,2}} \quad \text{Fluidschicht mit interner Wärmequelle} \quad (4.9b)$$

abgeleitet werden und für die dimensionslosen thermischen Grenzschichtdicken ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\delta_T = \frac{\hat{\delta}_T}{\hat{D}} = \frac{l}{2 Nu} \quad \text{Rayleigh-Bénard-Konvektion} \quad (4.10a)$$

$$\delta_{T1,2} = \frac{\hat{\delta}_{T1,2}}{\hat{D}} = \frac{l}{Nu_{w1,2}} \quad \text{Fluidschicht mit interner Wärmequelle} \quad (4.10b)$$

Mit Hilfe einer empirischen Nusselt-Zahl-Korrelation  $Nu=f(Ra, Pr)$  wird damit eine Abschätzung der thermischen Grenzschichtdicke möglich. Von Interesse ist jedoch auch die Dicke

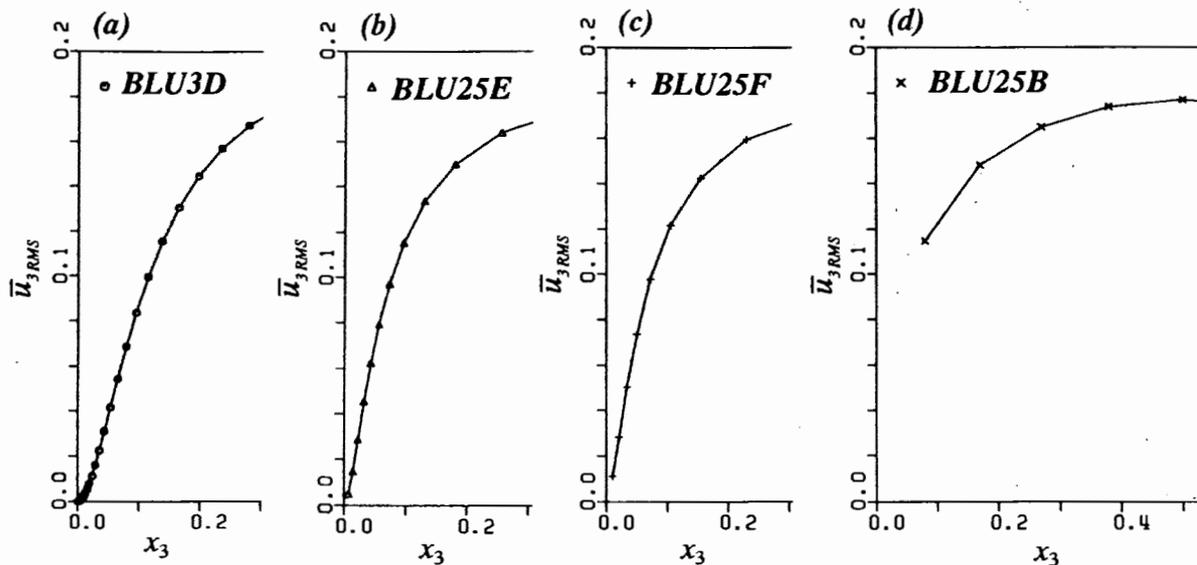


Abb. 4.6: Vergleich der RMS-Werte der Vertikalgeschwindigkeitskomponenten in Wandnähe bei Variation der Wandauflösung. (a) BLU3D:  $Ra=3.8 \cdot 10^5$ ,  $\Delta x_{3W}=0.001$ ; (b) BLU25E:  $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ,  $\Delta x_{3W}=0.007$ ; (c) BLU25F:  $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ,  $\Delta x_{3W}=0.01$ ; (d) BLU25B:  $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ,  $\Delta x_{3W}=0.08$ .

der hydrodynamischen Grenzschicht. Hier liefern Ähnlichkeitsbetrachtungen der Grenzschichttheorie die wesentlichen Aussagen, wonach gilt:

$$\delta_u \approx \delta_T \sqrt{Pr} \quad (4.11)$$

Bei Medien mit  $Pr \approx 1$ , wie z.B. Luft und den meisten Gasen, führt diese Beziehung zur Reynolds-Analogie. Die Vorgänge im Geschwindigkeits- und Temperaturfeld beim Impuls- und Wärmetransport verlaufen ähnlich, die Grenzschichtdicken sind vergleichbar.

Damit ist ein Anhaltspunkt für die Wahl geeigneter Wandmaschen gegeben. Ob das Maschennetz im Wandbereich die Grenzschichten wirklich adäquat auflöst, kann allerdings erst

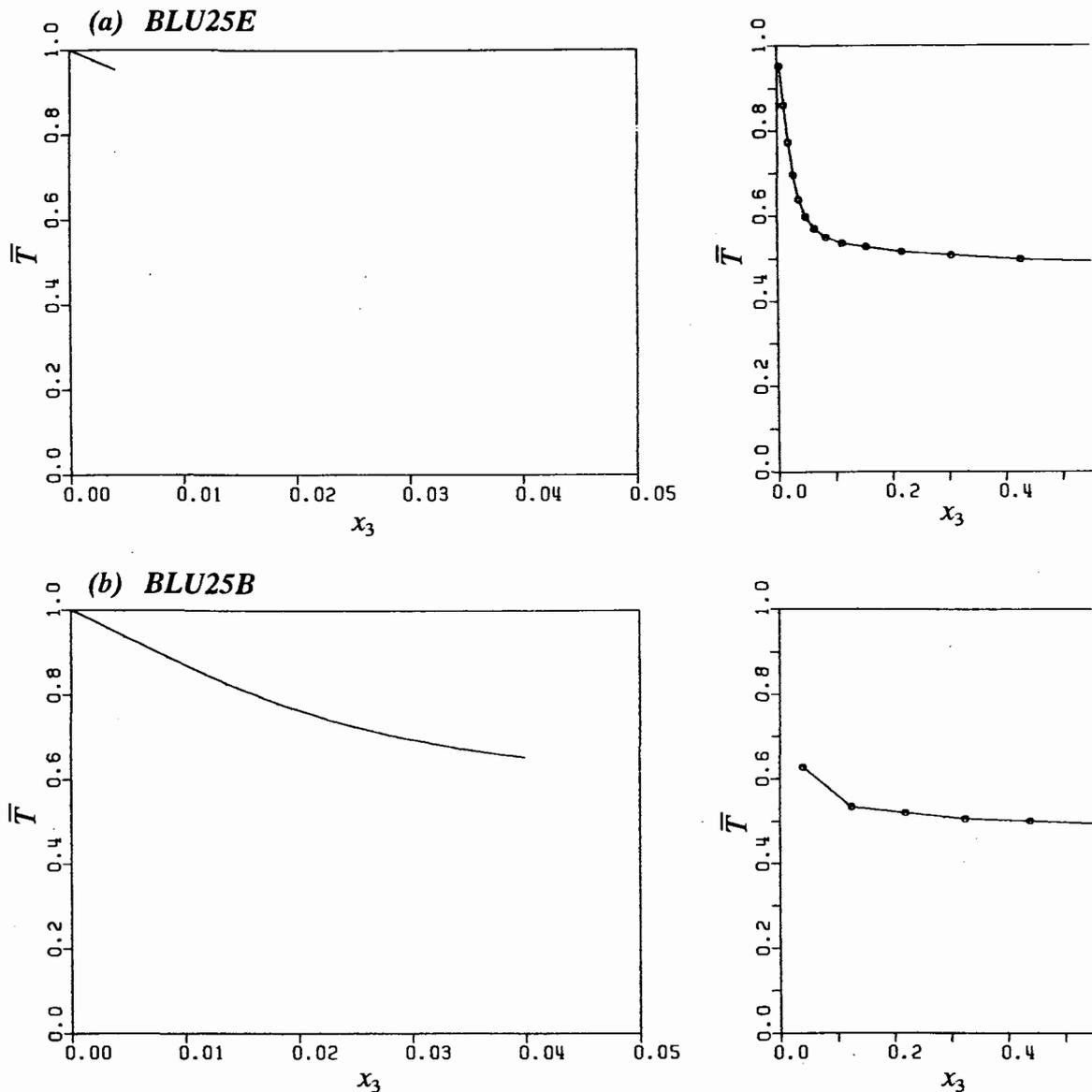


Abb. 4.7: Vergleich der Temperaturprofile in Wandnähe bei Variation der Wandauflösung. (a) BLU25E:  $Ra = 2.5 \cdot 10^6$ ,  $\Delta x_{3W} = 0.007$ , Auflösung der Grenzschicht; (b) BLU25B:  $Ra = 2.5 \cdot 10^6$ ,  $\Delta x_{3W} = 0.08$ , Wandmodell. Die linken Abbildungen zeigen das Ergebnis der numerischen Integration des Temperaturwandgesetzes (3.65) zum jeweiligen wandnächsten Maschenpunkt.

während der Simulation selbst, z.B. anhand des RMS-Wertes der Vertikalgeschwindigkeitskomponente, beurteilt werden. Der Gradient dieser Größe muß ebenso wie der Gradient der Vertikalgeschwindigkeitskomponente an der Wand verschwinden (siehe Kapitel 3.2.2.2). Abbildung 4.6 zeigt dazu einen Vergleich dieser Größe zwischen den Fällen BLU3D und BLU25BEF bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft. Im Fall BLU3D wird die hydrodynamische Grenzschicht ausreichend aufgelöst. Es ist die Simulation mit den meisten und feinsten Maschen im Wandbereich. Dies entspricht einem anzustrebenden Idealfall, ist jedoch wegen des hohen numerischen Aufwandes einer solchen Simulation selten praktikabel. Bei der Auflösung im Fall BLU25E ist ein leichtes Abknicken der Kurve in der wandnächsten Masche erkennbar, das im Fall BLU25F nicht mehr auftritt und auf eine zu grobe Wandmasche hindeutet. Im Fall BLU25B findet das in Kapitel 3.2.2.2 abgeleitete Wandmodell Verwendung, die Grenzschicht wird nicht aufgelöst und der wandnächste Wert ist als ein Mittelwert über das erste Maschenvolumen zu interpretieren.

Eine weitere Beurteilungsmöglichkeit bezüglich der thermischen Grenzschicht zeigt Abbildung 4.7. Hier ist ein Vergleich der Temperaturprofile zwischen den Fällen BLU25B und BLU25E bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft dargestellt. Im Fall BLU25B verläuft dieses Profil linear und folglich liegt der wandnächste Gitterpunkt noch innerhalb der Unterschicht. Anders das Profil im Fall BLU25E, es hat einen nichtlinearen Verlauf. Der erste Punkt liegt deutlich außerhalb der Wärmeleitungsunterschicht und macht bei dieser Simulation die Verwendung von Wandgesetzen für die Temperatur erforderlich.

#### **4.2.4 Einfluß der Anfangsbedingungen**

Wie in Kapitel 3.2.1 erläutert, ist es eine Annahme, daß eine turbulente Strömung einem von den Anfangsbedingungen unabhängigen, statistischen Zustand zustrebt. Es wird deshalb eine Studie, bestehend aus den beiden Simulationen der Fluidschicht mit interner Wärmequelle IWA15AB durchgeführt, denen vollkommen verschiedene Anfangstemperaturen zugrunde liegen. Im Fall IWA15A wird ein lineares, instabiles, im Fall IWA15B ein diesem physikalischen Anwendungsfall weitgehend angenähertes Anfangstemperaturprofil, dem jeweils zufällige Störungen mit kleiner Amplitude überlagert sind, vorgegeben. Darüber hinaus unterscheiden sich beide Simulationen nur noch in ihren Periodenlängen. Dies ist jedoch gemäß dem Ergebnis der in Kapitel 4.2.1 durchgeführten Analyse für den vorliegenden Anwendungsfall ohne Bedeutung. Räumliche Auflösung und Feinstrukturkoeffizienten sind in beiden Fällen identisch.

Abbildung 4.8 zeigt die Zeitsignale verschiedener charakteristischer, physikalischer Größen beider Simulationen. Die volumengemittelte turbulente kinetische Energie und Feinstrukturenergie, die ebenengemittelten Wandwärmeströme, die maximal im Kanal auftretende Temperatur sowie der RMS-Wert der aufgelösten Temperaturfluktuationen in halber Schichthöhe nähern sich asymptotisch einem im statistischen Sinne gleichen und stationären Zustand, den sie ausgehend vom Ruhezustand nach einer beachtenswert langen Zeitdifferenz von ca. 1000 dimensionslosen Problemzeiteinheiten erreichen. Auffallend langsam ist die zeitliche Entwicklung des Falles IWA15A. Es dauert sehr lange bis dieser Fall, ausgehend vom instabilen

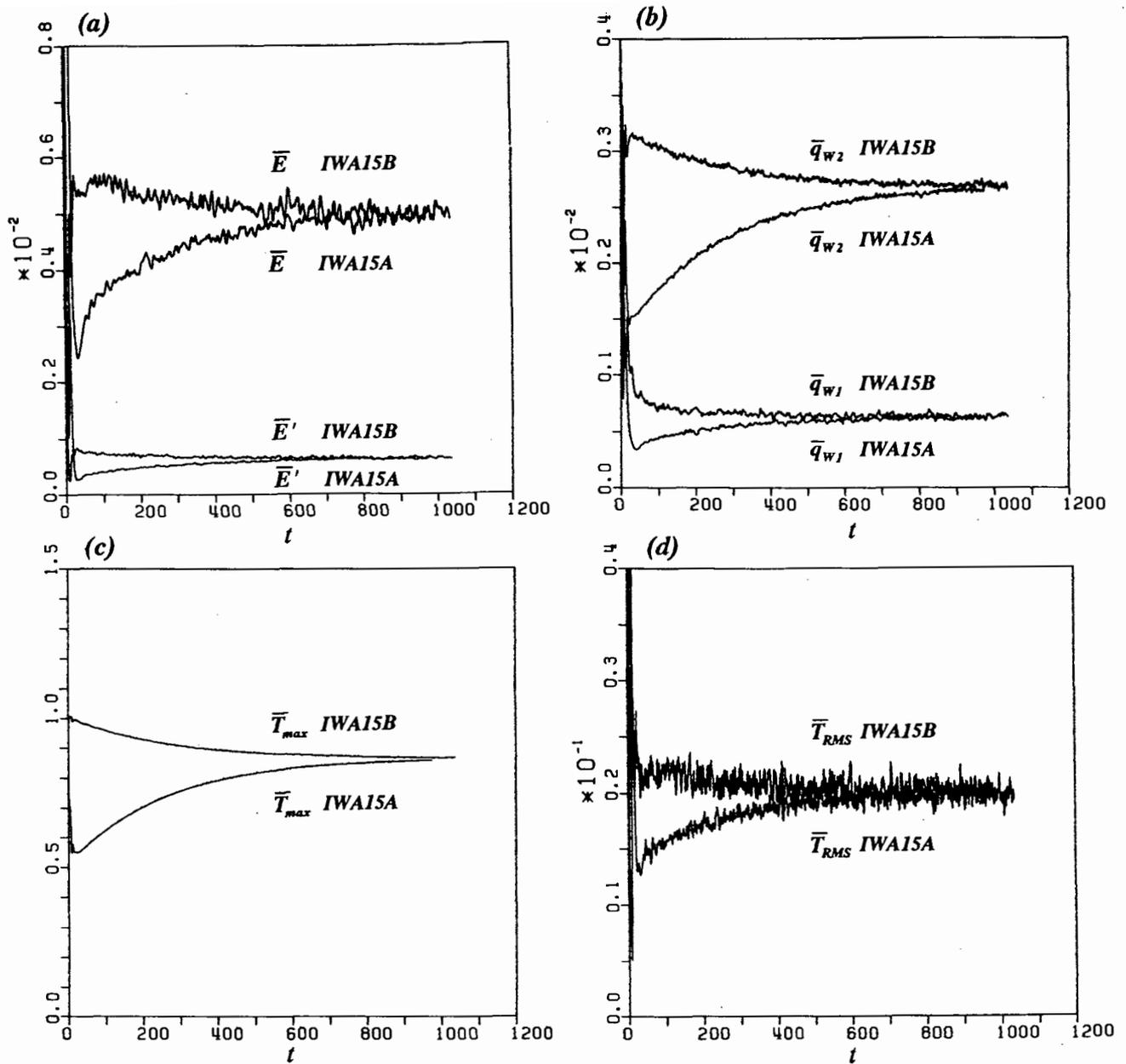


Abb. 4.8: Vergleich der Zeitsignale (a) der volumengemittelten turbulenten kinetischen Energie und Feinstrukturenergie, (b) der ebenengemittelten Wandwärmeströme der oberen und unteren Wand, (c) der maximalen Temperatur im Kanal und (d) der RMS-Werte der aufgelösten Temperatur in der Kanalmittelebene zwischen den Fällen IWA15A und IWA15B bei Variation der Anfangstemperaturprofile.

Anfangstemperaturprofil, das Energieniveau und den im statistischen Sinne stationären Endzustand des Falles IWA15B erreicht. Da unabhängig von den Anfangswerten keine Abweichungen im Endzustand zu erkennen sind, spricht dieses Ergebnis für eine Wahl realistischer Anfangswerte. So kann die Rechenzeit so gering wie möglich gehalten werden. Da in Abbildung 4.8 weitgehend integrale Größen dargestellt sind, sei noch erwähnt, daß auch die Profile physikalischer Größen wie der mittleren Temperatur, den verschiedenen RMS-Werten der Geschwindigkeit und der Temperatur, der turbulenten kinetischen Energie, dem turbulenten Wärmestrom etc. in vertikaler Richtung in beiden Fällen gut übereinstimmen.

## 4.3 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

In diesem Kapitel werden durch einen Vergleich numerischer Ergebnisse von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium sowie der Wasserschicht mit interner Wärmequelle die in Kapitel 3 neu eingeführten Modelle verifiziert.

Die prinzipielle Richtigkeit der neuen Ansätze für die Feinstrukturmodellierung zeigt schon Abbildung 3.6 in Kapitel 3.1.2.4. Die modellierten turbulenten Feinstruktur-Prandtl-Zahlen liegen sehr gut im Band experimenteller Daten. Für die prinzipielle Richtigkeit der in Kapitel 3.2.2.2 abgeleiteten neuen Modelle für die Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand spricht die Tatsache, daß der mit Hilfe von Daten aus direkten numerischen Simulationen ausgewertete, neu eingeführte Modellkoeffizient  $c_{wu}$  unabhängig von der Rayleigh-Zahl und vom Fluid, Werte zwischen zwei und drei annimmt und damit von der Größenordnung eins ist. Für die prinzipielle Richtigkeit der in Kapitel 3.2.2.3 eingeführten Modelle für den Gradienten der Temperatur an der Wand schließlich sprechen schon die Abbildungen 3.13 und 3.14. Hier wird für die in Tabelle 4.1 aufgezählten durchgeführten Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium mit oder ohne Auflösung der Temperaturgrenzschicht eine sehr gute Übereinstimmung mit den vorhandenen numerischen und experimentellen Vergleichsdaten im dimensionslosen Temperaturprofil  $T^+(z^+)$  bzw. dessen Gradienten festgestellt.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden die durchgeführten gemischten Simulationen und Grobstruktursimulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium sowie der Wasserschicht mit interner Wärmequelle mit in der Literatur verfügbaren experimentellen Daten verglichen.

### 4.3.1 Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft

Als Basis des Vergleiches werden die experimentellen Daten von Deardorff & Willis (1967) herangezogen. Sie bestehen aus einer Reihe von Experimenten mit variierender Rayleigh-Zahl ( $Ra=6.3 \cdot 10^5$ ,  $2.5 \cdot 10^6$ ,  $10^7$ ) und dem Fluid Luft, d.h. einer Prandtl-Zahl  $Pr=0.71$ . Das erste Experiment mit  $Ra=6.3 \cdot 10^5$  wurde von Wörner (1994) für einen Vergleich mit einer direkten numerischen Simulation (Fall BLU6 in Tabelle 4.2) verwendet. Das Ergebnis ist eine gute Übereinstimmung der verglichenen Daten aus Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld. Im Rahmen dieser Arbeit werden für die beiden anderen Experimente mit den höheren Rayleigh-Zahlen Vergleichsrechnungen durchgeführt und mit experimentellen Daten aus Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld verglichen. Die geometrische und physikalische Ähnlichkeit zwischen numerischer Simulation und Experiment ist durch die Einhaltung der charakteristischen Kenngrößen gewährleistet, ein Vergleich damit möglich. Die Zahlenwerte von Deardorff & Willis (1967) sind aus den Diagrammen der angegebenen Veröffentlichung entnommen und in TURBIT-Normierung umgerechnet.

Die beiden Grobstruktursimulationen BLU25 und BLU100 sind mit je zwei Fällen vertreten (BLU25BE und BLU100AB), die sich darin unterscheiden, ob die Wandbereiche durch das Maschennetz aufgelöst oder Wandmodelle verwendet werden. Darüber hinaus unterscheidet

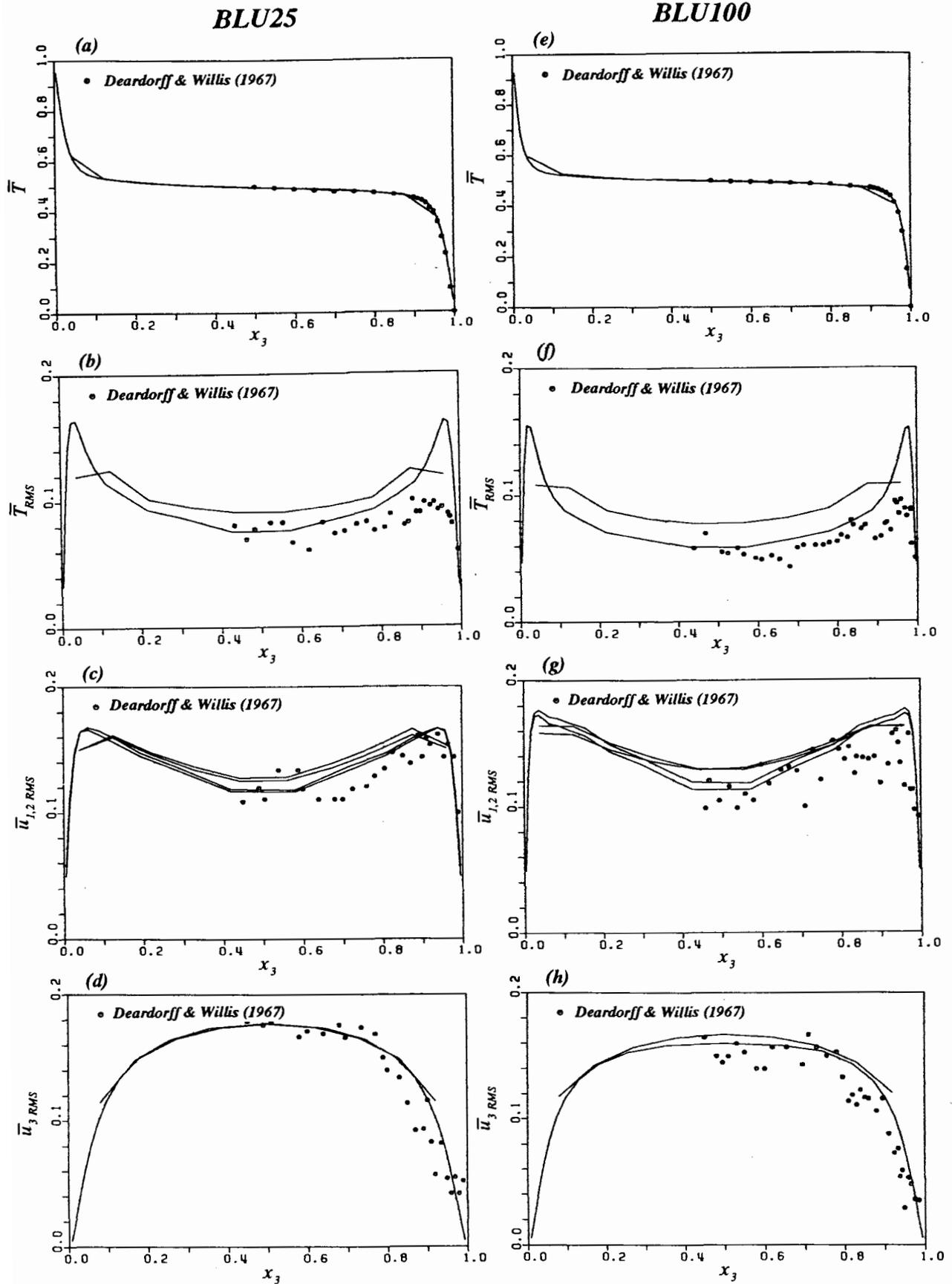


Abb. 4.9: Vergleich der numerischen Ergebnisse der Fälle BLU25BE (a-d) und BLU100AB (e-h) (—) mit experimentellen Daten von Deardorff & Willis (1967) (O). Vertikale Profile der mittleren Temperatur (a,e), der RMS-Werte der Temperatur (b,f), der RMS-Werte der Geschwindigkeitskomponenten in horizontaler (c,g) und vertikaler (d,h) Richtung.

sich Fall BLU25B von BLU25E noch in den Periodenlängen. Die mittleren Temperaturprofile aller Fälle zeigen eine sehr gute Übereinstimmung im Kernbereich, aber auch im Wandbereich der Strömung, Abbildungen 4.9a,e. Das trifft insbesondere auch auf die Fälle mit den modellierten Gradienten der Temperatur an der Wand BLU25B und BLU100A zu. Die Profile der RMS-Werte der Temperatur stimmen weniger gut überein, Abbildungen 4.9b,f. Die Daten der beiden Fälle BLU25E und BLU100B mit der feinen Auflösung in vertikaler Richtung zeigen im Kernbereich zwar eine Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, die systematisch auftretenden Maxima in den Wandbereichen werden durch das Experiment in dieser Intensität jedoch nicht bestätigt. Die fehlende Übereinstimmung dieser Größe im Wandbereich stellt jedoch auch Eidson (1982) mit seinen Grobstruktursimulationen und Wörner (1994) mit seiner direkten numerischen Simulation im Fall BLU6 fest, weshalb die Ursache hierfür nicht in den neu eingeführten Modellen gesehen werden kann, sondern eher in den experimentellen Daten. Die vertikalen Profile der Fälle mit den modellierten Gradienten der Temperatur an der Wand BLU25B und BLU100A deuten an, daß die berechneten Kurvenpunkte als Mittelwerte über Maschenvolumina interpretiert werden müssen und deshalb im Kernbereich eine schwache Überhöhung, im Wandbereich dagegen als Integral über das Maximum bis zur Wand leicht reduzierte Werte im Vergleich zu den Fällen mit feinerer Auflösung aufweisen. Mit abnehmender Auflösung wird die Kurve sozusagen geglättet. Das wird auch durch die übrigen Abbildungen 4.9c,d und g,h bestätigt. Die vertikalen Profile der in diesen Teilbildern dargestellten RMS-Werte aller Geschwindigkeitskomponenten, insbesondere jedoch der vertikalen Geschwindigkeitskomponenten, stimmen in allen Fällen gut mit den experimentellen Daten überein. Für diesen Anwendungsfall mit dem Fluid Luft können die neuen Modelle deshalb als verifiziert betrachtet werden.

Ein weiterer Aspekt, der den Abbildungen der RMS-Profile entnommen werden kann, ist, daß der Kernbereich mit wachsender Rayleigh-Zahl breiter und die Grenzschichtbereiche dünner werden. Mit der in TURBIT verwendeten Normierung der abhängigen Variablen nehmen die RMS-Werte in Kanalmitte gleichzeitig ab. Den letzten Punkt bestätigen auch die im nächsten Unterkapitel vorgestellten Ergebnisse von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium.

### **4.3.2 Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium**

Als Vergleichsbasis für die gemischten Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium werden die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen von Kek (1989) und Kek & Müller (1993) verwendet. Der Vergleich kann sich jedoch ausschließlich auf statistische Daten des Temperaturfeldes für Rayleigh-Zahlen  $Ra \leq 2.5 \cdot 10^5$  beschränken, weil dies die obere Grenze der experimentell untersuchten Rayleigh-Zahlen ist. Wegen des grundsätzlichen Mangels an verfügbaren Experimenten dieses Anwendungsfalls mit flüssigem Natrium speziell im Bereich hoher Rayleigh-Zahlen, können die Simulationen BNA1000 und BNA10000 nicht mit Experimenten verglichen werden. Insbesondere bezüglich des Geschwindigkeitsfeldes sind keinerlei experimentelle statistische Daten der Turbulenz im gesamten Rayleigh-Zahlen-Bereich vorhanden, die einen Vergleich zulassen würden. Es kann aber davon ausgegangen werden, daß, wenn die numerischen mit den experimentellen Daten im Temperaturfeld übereinstimmen, auch das berechnete Geschwindigkeitsfeld sinnvolle und richtige Werte

aufweist. Die geometrische und physikalische Ähnlichkeit zwischen numerischer Simulation und Experiment wird auch bei diesen Anwendungsfällen durch die Einhaltung der charakteristischen Kenngrößen gewährleistet, ein Vergleich ist damit möglich.

Für den Teilbereich höherer Rayleigh-Zahlen leitet Kek (1989) aus seinen Experimenten die folgende empirische Beziehung für die Nusselt-Zahl ab:

$$Nu = 0.117 Ra^{0.25} \quad 4.0 \cdot 10^4 < Ra < 2.5 \cdot 10^5, Pr = 0.006 \quad (4.12)$$

In Tabelle 4.4 sind die aus den gemischten Simulationen erhaltenen Nusselt-Zahlen den mit Hilfe der Korrelation (4.12) berechneten gegenübergestellt und in Abbildung 4.10 mit den von Kek ermittelten Meßdaten aufgetragen. Sie stimmen in den Fällen BNA84 und BNA250 gut mit den aus der empirischen Korrelation (4.12) erhaltenen Nusselt-Zahlen überein und liegen, wie Abbildung 4.10 verdeutlicht, im Band der von Kek (1989) gemessenen Daten. Bei einer Extrapolation der empirischen Korrelation (4.12) für Rayleigh-Zahlen  $Ra > 2.5 \cdot 10^5$  liegen die so bestimmten Nusselt-Zahlen für  $Ra = 10^6$  und  $10^7$  dagegen systematisch etwas unterhalb der in den Fällen BNA1000 und BNA10000 berechneten Nusselt-Zahlen. Weil die Abweichung bei diesen hohen Rayleigh-Zahlen jedoch gering ist, kann die empirische Korrelation (4.12) auch für Rayleigh-Zahlen  $Ra > 2.5 \cdot 10^5$  Verwendung finden. In diesem Bereich hoher Rayleigh-Zahlen ändert sich der Exponent der empirischen Nusselt-Zahl-Korrelation (4.12) offensichtlich, anders als im Bereich niedriger Rayleigh-Zahlen, nicht mehr.

Fall	Ra	Nu <sub>Experiment</sub>	Nu <sub>TURBIT</sub>
BNA84	$8.4 \cdot 10^4$	1.99	1.96
BNA250	$2.5 \cdot 10^5$	2.61	2.59
BNA1000	$1.0 \cdot 10^6$	3.69	3.74
BNA10000	$1.0 \cdot 10^7$	6.57	6.69

Tab. 4.4: Vergleich der von Kek (1989) gemessenen mit den in TURBIT berechneten Nusselt-Zahlen. Für  $Ra = 10^6$  und  $10^7$  werden die experimentellen Nusselt-Zahlen mit der empirischen Beziehung (4.12) extrapoliert.

Abbildung 4.11 zeigt einen Vergleich der RMS-Werte der Temperatur in der Kanalmittelebene der Natriumschicht. Die berechneten RMS-Werte der Temperatur der Fälle BNA84 und BNA250 befinden sich auch hier im Bereich der Meßdaten. Auffallend ist die Entwicklung des RMS-Wertes der Temperatur mit steigender Rayleigh-Zahl. Die statistische Analyse der Natriumsimulationen BNA1000 und BNA10000 im nächsten Kapitel wird zeigen, daß bei diesen Rayleigh-Zahlen, ähnlich den in Abbildung 4.9 dargestellten RMS-Werten der Temperatur der Luftfälle, im Fall BNA1000 andeutungsweise und im Fall BNA10000 ausgeprägte Maxima im Wandbereich auftreten. Das deutet darauf hin, daß sich bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium bei diesen Rayleigh-Zahlen auch im Temperaturfeld der typische Grenzschichtcharakter mit einem isothermen Kernbereich und zwei ausgeprägten thermischen Grenzschichten einstellt. Die üblicherweise maximale Schwankungsintensität der Tempera-

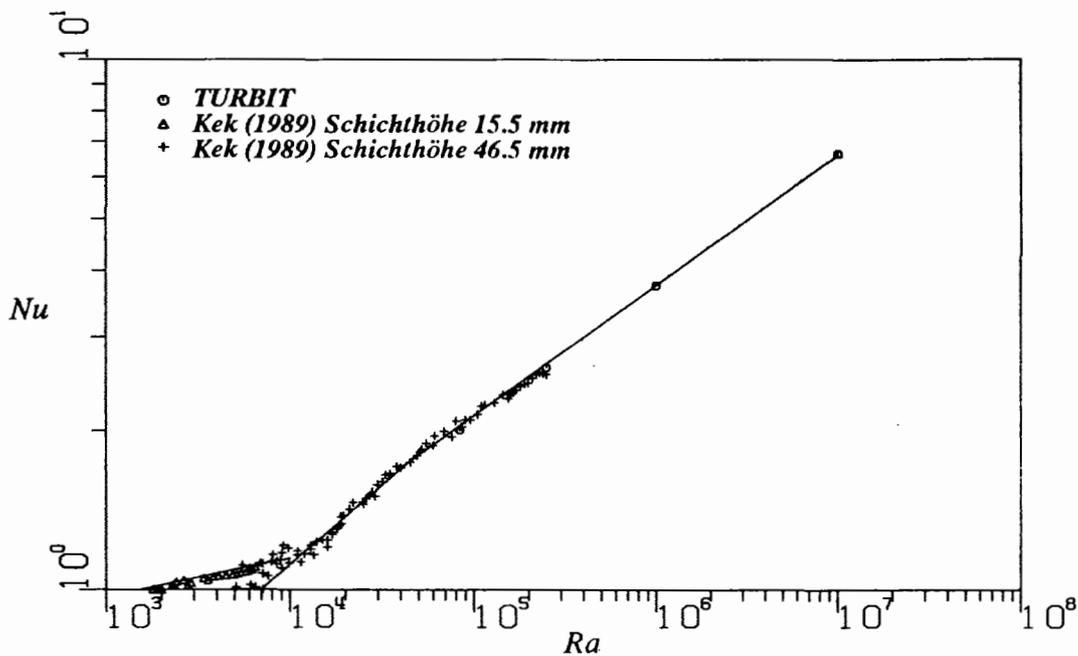


Abb. 4.10: Von Kek (1989) gemessene und mit TURBIT berechnete Nusselt-Zahlen in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl.

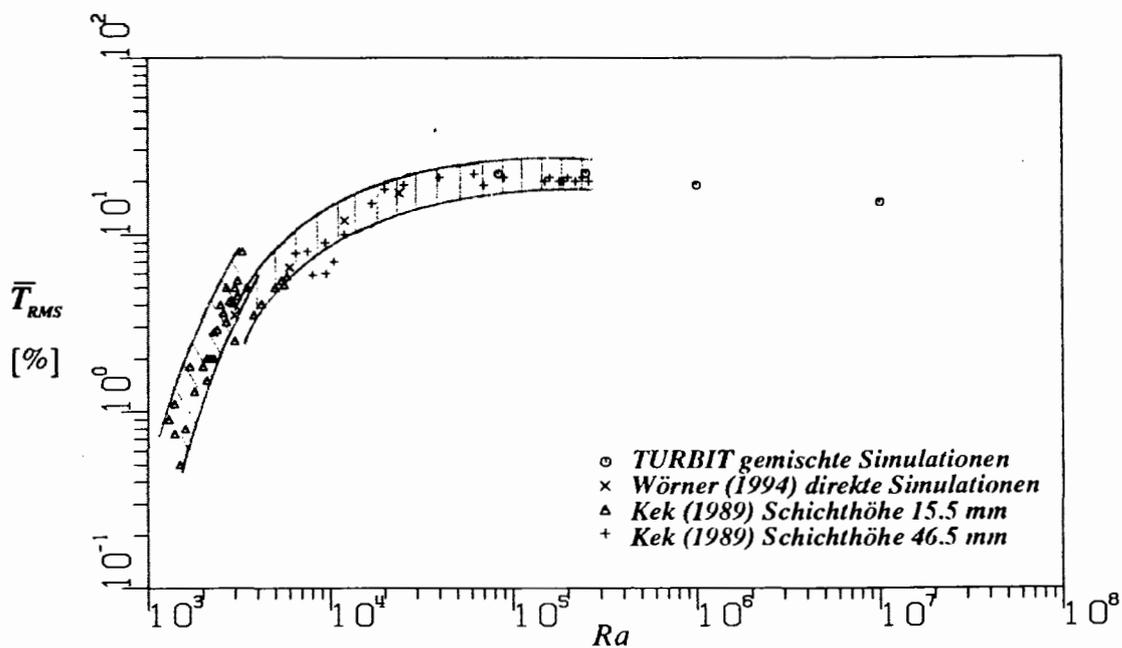


Abb. 4.11: Von Kek (1989) gemessene und mit TURBIT berechnete RMS-Werte der Temperatur in der Mittelebene der Natriumschicht in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl.

turfluktuationen am Grenzschichttrand erklärt das Auftreten der Extrema an diesen Stellen und das Absinken des RMS-Wertes der Temperatur im Kernbereich.

Wegen der insgesamt guten Übereinstimmung der numerischen mit den experimentellen Ergebnissen, können die erweiterten und neuen Feinstrukturmodelle und Randbedingungen auch für diesen Anwendungsfall mit kleiner Prandtl-Zahl als verifiziert betrachtet werden.

### 4.3.3 Wasserschicht mit interner Wärmequelle

Als Vergleichsbasis für die Grobstruktursimulationen IWA15AB einer Wasserschicht mit einer räumlich und zeitlich konstanten internen Wärmequelle werden die Ergebnisse der holographischen Untersuchungen von Jahn (1975) herangezogen, um das Feinstrukturmodell für den Fall stabiler Schichtung zu testen. Jahn (1975) hat eine Reihe von Experimenten dieses Anwendungsfalles mit variierenden Rayleigh-Zahlen, ausgehend vom reinen Wärmeleitungszustand bis hin zur turbulenten Konvektionsschicht ( $3.7 \cdot 10^4 < Ra_1 < 5.0 \cdot 10^{10}$ ), in einem relativ kleinen Rechteckkanal (140 mm x 140 mm) mit veränderlichen Modellhöhen  $\hat{D}$  (5-160 mm) und Wärmequellendichten  $\hat{Q}$  durchgeführt. Die Prandtl-Zahl des Modellfluides ist  $Pr=7.0$ . Für den Vergleich werden die Meßergebnisse eines seiner Experimente mit einer modifizierten Rayleigh-Zahl  $Ra_1=1.5 \cdot 10^{10}$  verwendet. Die Kanalhöhe beträgt in diesem Fall 157 mm, die Wärmequellendichte  $6.2 \cdot 10^{-3} \text{ W/cm}^3$ .

Den durchgeführten Grobstruktursimulationen wird eine aus dem Experiment von Jahn (1975) ermittelte Anfangs-Damköhler-Zahl  $Da_0=(\hat{Q}\hat{D}^2)/(\hat{\lambda}\Delta\hat{T}_{max})=Nu_{w1}+Nu_{w2}=95.8$  im Quellterm der Energiegleichung (2.2c) zugrunde gelegt. Diskrepanzen, die eine Zulässigkeit dieser Vergleichsstudie in Frage stellen, ergeben sich aus den unterschiedlichen dimensionslosen Seitenverhältnissen, die bei den numerischen Simulationen  $X_{1,2}=4.5$  und  $6.0$ , bei Jahn in diesem Fall eins betragen. Hier könnten insbesondere die, von Jahn als adiabat betrachteten, vier senkrechten Außenwände seines Meßvolumens Einflüsse auf das Konvektionsverhalten haben, die in den numerischen Simulationen aufgrund der periodischen Randbedingungen nicht auftreten. Unbekannt sind auch mögliche Inhomogenitäten in seinen Temperaturrandbedingungen an der unteren und oberen Platte. Während es bei einer numerischen Simulation relativ einfach ist, zeitlich konstante und räumlich homogene, isotherme Begrenzungen auf gleichem Temperaturniveau vorzugeben, könnte diese Forderung beim Experiment auf Schwierigkeiten stoßen. Jahn (1975) kühlt die untere und obere Platte seines Modells durch eine erzwungene Strömung mit Wasser. Ein weiterer kritischer Punkt ist die Erzeugung einer zeitlich und räumlich konstanten Wärmequellendichte  $\hat{Q}$ , die in der numerischen Simulation durch Vorgabe des Quellterms in der Energiegleichung (2.2c) keine Schwierigkeiten bereitet. Ob in dem Experiment von Jahn (1975), der die Wasserschicht mit Hilfe von Elektroden elektrisch aufgeheizt hat, zeitliche oder räumliche Schwankungen aufgrund von nicht konstanten Leitfähigkeitsverteilungen auftreten, ist ebenfalls nicht bekannt. Damit ist sicherlich vor allem die geometrische aber auch die physikalische Ähnlichkeit zwischen numerischer Simulation und Experiment bei diesem Anwendungsfall nur bedingt erfüllt, obwohl die Einhaltung der charakteristischen Kenngrößen  $Ra_1$  und  $Pr$  gewährleistet ist. Aus diesen Gründen erscheint ein qualitativer Vergleich zwischen Numerik und Experiment zulässig, während ein quantitativer Vergleich kritischer zu betrachten ist.

Während die Nusselt-Zahlen  $Nu_{w2}$  der oberen Wand gut übereinstimmen, treten an der unteren Wand für  $Nu_{w1}$  im stabil geschichteten Bereich Unterschiede auf. Der Grund, den unteren stabilen Bereich betreffend, könnte hier vielleicht in der unzureichenden Auflösung der Wandbereiche liegen. Dagegen spricht allerdings die gute Übereinstimmung in der sehr viel

Fall	$Nu_{w1}$	$Nu_{w2}$
IWA15A	19.8	84.7
IWA15B	19.9	84.9
Jahn	12.8	83.0

Tab. 4.5: Vergleich der von Jahn (1975) gemessenen mit den in TURBIT berechneten Nusselt-Zahlen der oberen und unteren Wand.

kritischeren, instabilen oberen Grenzschicht, wenngleich die Simulationen mit jeweils drei Maschen in beiden thermischen Grenzschichten an der Auflösungsgrenze liegen. Verantwortlich könnten auch Feinstrukturmodellierungsprobleme in diesem stabil geschichteten Bereich sein. Dagegen spricht jedoch die Tatsache des geringer werdenden Einflusses der Feinstruktur in stabiler Schichtung sowie der ausgewertete Verlauf der eindimensionalen Energiespektren der kinetischen turbulenten Energie, der Geschwindigkeitsfluktuationen und der Temperaturfluktuationen. Diese zeigen in der stabilen Schicht den erwarteten steilen Abfall im hohen Wellenzahlbereich, der auf einen richtigen Einfluß des Feinstrukturmodells hindeutet. Sie fallen an der Auflösungsgrenze mit Potenzen der eindimensionalen Wellenzahl  $k_1$  größer als  $5/3$  ab. Damit bestätigt sich der zu Beginn dieses Unterkapitels diskutierte Sachverhalt, der einen quantitativen Vergleich zwischen Simulation und Experiment in diesem Fall, aufgrund der nur bedingten geometrischen und physikalischen Ähnlichkeit, kritisch erscheinen läßt.

Abbildung 4.12 zeigt einen Vergleich der mittleren Temperaturprofile zwischen Experiment und Simulation IWA15B. Die Profile stimmen qualitativ gut überein. Ein breiter, isothermer

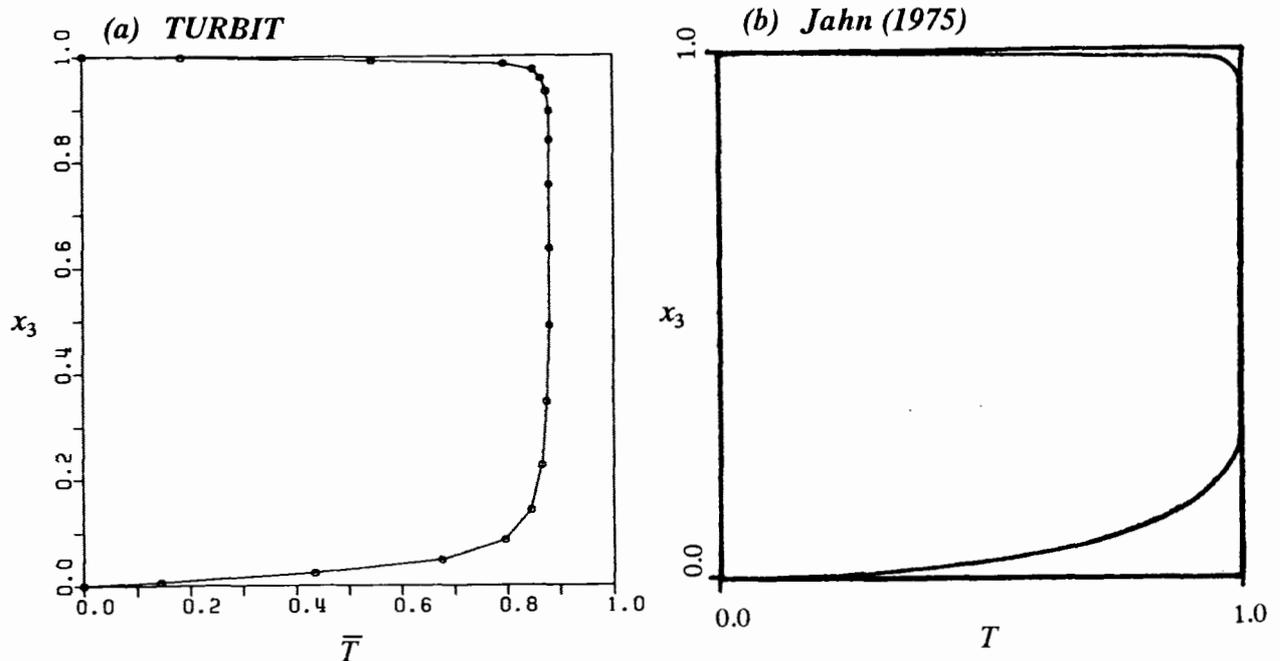


Abb. 4.12: Vergleich des (a) im Fall IWA15B berechneten mit dem (b) von Jahn (1975) gemessenen mittleren Temperaturprofils einer Wasserschicht mit interner Wärmequelle bei  $Ra_1 = 1.5 \cdot 10^{10}$ .

Kernbereich wird von einer oberen, dünneren instabilen und einer unteren, dickeren stabilen Grenzschicht eingeschlossen. Auffällig ist, daß in der Simulation die Maximaltemperatur im Kanal nicht den Wert eins annimmt, obwohl die Grundgleichungen mit  $\hat{T}_0 = \Delta\hat{T}_{\max}$  entdimensionalisiert werden. Der Grund ist in der Vorgabe der Anfangs-Damköhler-Zahl  $Da_0=95.8$  aus dem Experiment von Jahn (1975) zu suchen. Die in der Simulation berechnete Damköhler-Zahl  $Da=104.8$  fordert wegen der Definition der Damköhler-Zahl gemäß Gleichung (4.5) eine geringere maximale Temperaturdifferenz als die vorgegebene, die eine kleinere dimensionslose Temperatur zur Folge hat. Derselbe Sachverhalt trifft auch auf die direkte numerische Simulation IWA4 in Tabelle 4.2 zu.

In Abbildung 4.13 sind Ausschnitte der Temperaturverteilung einer Vertikalebene der Interferogramme von Jahn (1975) im Vergleich zu den im Fall IWA15A berechneten Ergebnissen dargestellt. Sie verdeutlichen die Aussage zu Abbildung 4.12 und zeigen eine gute Übereinstimmung der Strukturen. An der oberen Wand deuten die engen Temperaturisolinien eine dünne thermische Grenzschicht an, in der, verursacht durch die Rayleigh-Taylor-Instabilität, einzelne unregelmäßige Ablösegebiete induziert werden. Dazwischen steigt heißes Fluid großräumig auf und drückt die Grenzschicht zusammen. An der unteren Wand dagegen existiert aufgrund der stabil geschichteten dicken Grenzschicht ein Bereich relativer Ruhe, der nur bisweilen, wie eine Analyse der Geschwindigkeitsverteilung dort gezeigt hat, von größeren herabfallenden Fluidballen durchmischt wird.

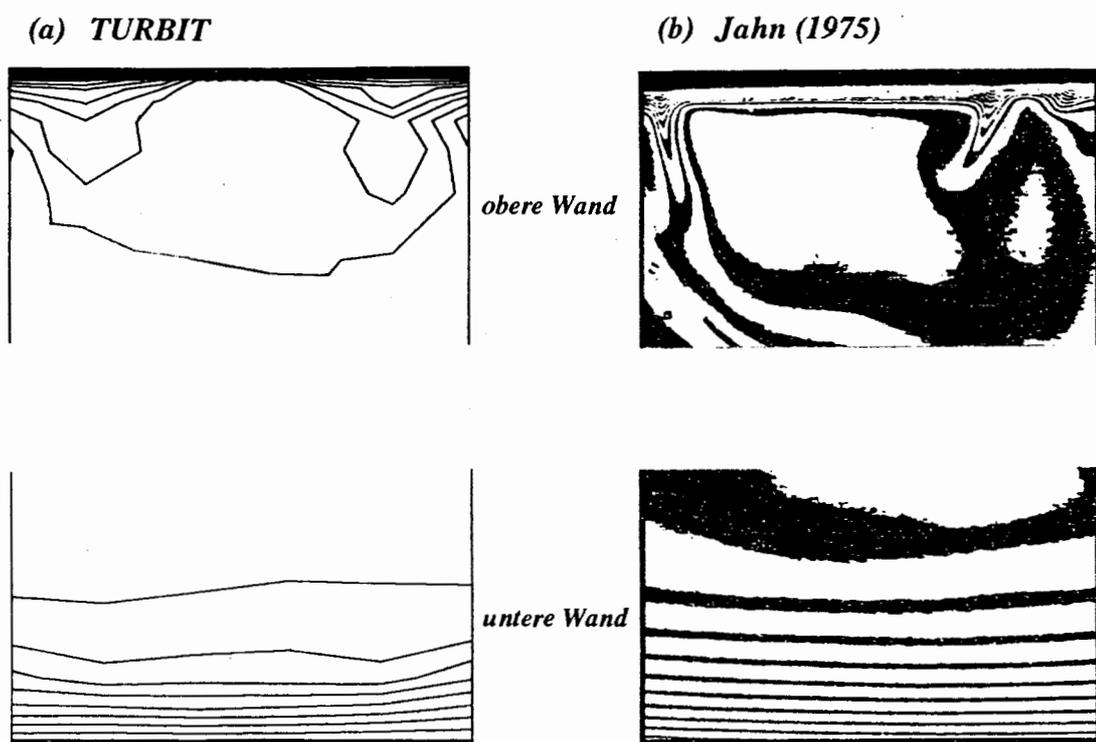


Abb. 4.13: Ausschnitte der Temperaturverteilung an der oberen und unteren Wand. Vergleich der (a) im Fall IWA15A berechneten Ergebnisse mit (b) Interferogrammen von Jahn (1975).

Es kann festgehalten werden, daß auch ein qualitativer Vergleich einzelner Profile wie der Temperatur, dem turbulenten Wärmestrom, den RMS-Werten der Temperatur und den Geschwindigkeitskomponenten, der turbulenten kinetischen Energie und der Feinstrukturenergie der vorliegenden Simulationen mit Experimenten von Deardorff & Willis (1985) und Grobstruktursimulationen von Schmidt (1988) des Problems der konvektiven Grenzschicht mit einem unteren instabilen und oberen stabilen Bereich durchgeführt wurde. Das Ergebnis ist die grundsätzliche Übereinstimmung der verglichenen Daten, die auf ähnliche Phänomene und Mechanismen dieser beiden konvektionsdominierten Fälle hinweisen.

## 4.4 Statistische Analyse der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium

In allen vier Fällen BNA84, BNA250, BNA1000 und BNA10000 werden gemischte Simulationen durchgeführt. Zur Berechnung der Temperaturfelder wird die Methode der direkten numerischen Simulation verwendet, die Wärmeleitungsunterschichten werden aufgelöst. Damit unterliegen die Simulationsergebnisse bezüglich der Temperaturfelder keinen direkten Modelleinflüssen. Die Berechnung der Geschwindigkeitsfelder erfolgt dagegen mit der Methode der Grobstruktursimulation. Die dünnen hydrodynamischen Reibungsunterschichten werden nicht aufgelöst, die Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand daher modelliert.

### 4.4.1 Temperaturfeld

Abbildung 4.14a zeigt die vertikalen Profile der mittleren Temperatur aller Fälle. Wie die Analyse der Nusselt-Zahlen in Kapitel 4.3.2 zeigt, sind bei  $Ra=8.4 \cdot 10^4$  der Wärmetransport durch molekulare Leitung und Konvektion in etwa gleichbedeutend ( $Nu=1.96$ ). Dies macht sich im mittleren Temperaturprofil des Falles BNA84 in einer schon deutlichen Abweichung vom, dem reinen Wärmeleitungszustand entsprechenden, linearen Verlauf der mittleren Temperatur in vertikaler Richtung bemerkbar. Mit zunehmendem Einfluß des konvektiven Wärmetransportes bei steigender Rayleigh-Zahl stellt sich ein immer breiter werdender, im Mittel isothermer Kernbereich ein. Während im Fall BNA84 noch keine ausgeprägten thermischen Grenzschichten zu erkennen sind, d.h. sie erstrecken sich dort noch fast bis zur halben Schichthöhe, haben die Fälle BNA250, BNA1000 und insbesondere BNA10000 den Luftsimulationen BLU25 und BLU100 ähnliche, in den Abbildungen 4.9a,e dargestellte, mittlere Temperaturprofile. Diese Entwicklung deutet auf den zunehmenden typischen Grenzschichtcharakter dieses Anwendungsfalles im Temperaturfeld hin.

Dieses Ergebnis wird durch die vertikalen Profile der RMS-Werte der Temperatur aller vier Fälle bestätigt, Abbildung 4.14b. Die größten RMS-Werte der Temperatur treten, wie die Abbildungen 4.9b,f der Luftsimulationen BLU25 und BLU100 zeigen und in Kapitel 4.3.2 diskutiert wird, am Rande der thermischen Grenzschichten auf. Die maximalen Temperaturfluktuationen werden deshalb im Fall BNA84 bei  $Ra=8.4 \cdot 10^4$  noch in halber Schichthöhe gefunden. Bei  $Ra=2.5 \cdot 10^5$  wird das Profil im Kernbereich zwischen beiden instabilen Grenzschichten flacher und bei  $Ra=10^6$ , insbesondere jedoch bei  $Ra=10^7$ , existieren bereits zwei ausgeprägte Maxima in den Wandbereichen. Auffallend dabei sind, wie auch in Abbildung

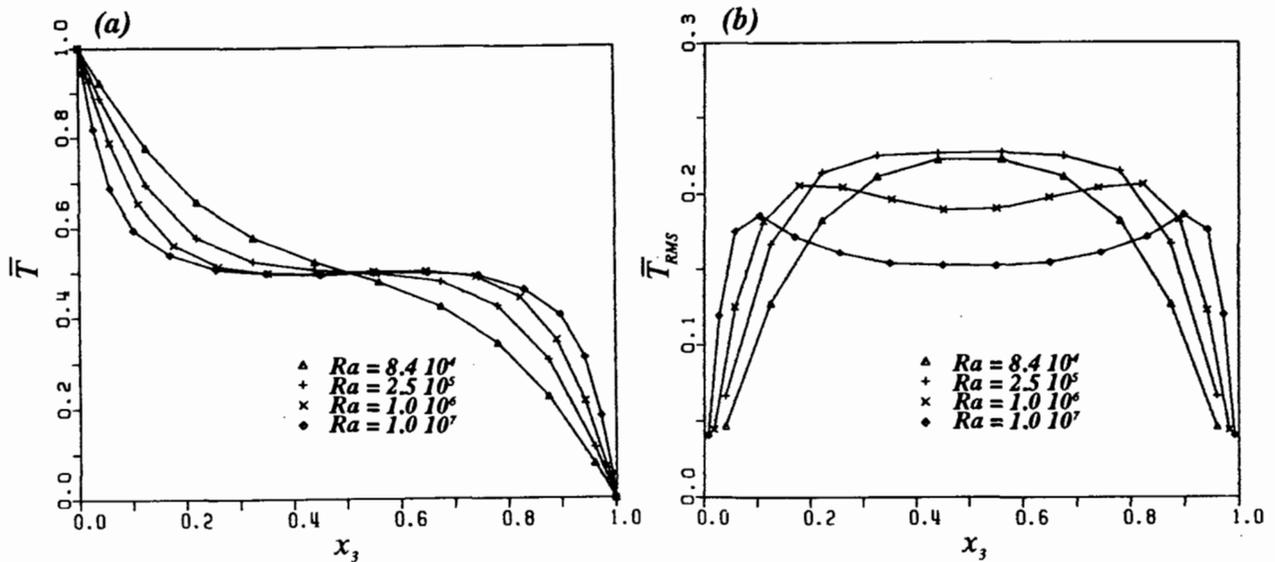


Abb. 4.14: Vertikale Profile (a) der mittleren Temperatur und (b) des RMS-Wertes der Temperatur der Fälle BNA84, BNA250, BNA1000 und BNA10000 bei unterschiedlichen Rayleigh-Zahlen.

4.11 schon deutlich wird, die mit steigender Rayleigh-Zahl abnehmenden RMS-Werte der Temperatur im isothermen Kernbereich. Doch auch der maximale RMS-Werte der Temperatur nimmt mit steigender Rayleigh-Zahl ab. Die beiden Maxima an den thermischen Grenzschichtträgern sind jedoch ausgeprägter und treten immer näher an der Wand auf. Dies entspricht einem der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft ähnlichen Verhalten, wie die Analyse der Grobstruktursimulationen BLU25 und BLU100 in Kapitel 4.3.1 zeigt und auch durch direkte numerische Simulationen dieses Anwendungsfalles mit Luft ( $Ra = 1.5 \cdot 10^3 - 3.8 \cdot 10^5$ ) von Grötzbach (1982) bestätigt wird.

Bezüglich des turbulenten Temperaturfeldes werden weitere zentrale Momente höherer Ordnung untersucht. Das zentrale Moment dritter Ordnung der turbulenten Schwankungsgröße im Verhältnis zur dritten Potenz ihrer Standardabweichung wird als "Schiefe" ("skewness") bezeichnet:

$$S_{\Phi} = \frac{\langle \Phi'^3 \rangle}{\langle \Phi'^2 \rangle^{3/2}} \quad (4.13)$$

Die Schiefe ist ein charakteristisches Maß für die Symmetrie der turbulenten Verteilungsfunktion, d.h. den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichtekurve. Bei einer symmetrischen wie z.B. der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichte hat die Schiefe  $S_{\Phi}$  den Wert Null. Ein negativer Wert der Schiefe deutet auf häufige positive Schwankungen mit kleiner Amplitude und negative Schwankungen mit wesentlich größeren Amplitudenwerten der turbulenten Größe hin. Im umgekehrten Fall ist die Schiefe positiv.

Das zentrale Moment vierter Ordnung der turbulenten Schwankungsgröße im Verhältnis zur vierten Potenz ihrer Standardabweichung wird als "Flachheit" oder "Exzeß" ("flatness, kurtosis") bezeichnet:

$$F_{\Phi} = \frac{\langle \Phi''^4 \rangle}{\langle \Phi''^2 \rangle^{4/2}} \quad (4.14)$$

Die Flachheit ist ein charakteristisches Maß für den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte im Intensitätsmaximum. Bei Gaußschen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen hat die Flachheit den Wert 3, bei einem periodischen Sinussignal den Wert 1.5. Geringe Werte der Flachheit deuten auf ein harmonisches Schwankungssignal mit häufigen großen und seltenen kleinen Abweichungen vom Mittelwert hin. Im umgekehrten Fall besitzt die Flachheit große Werte.

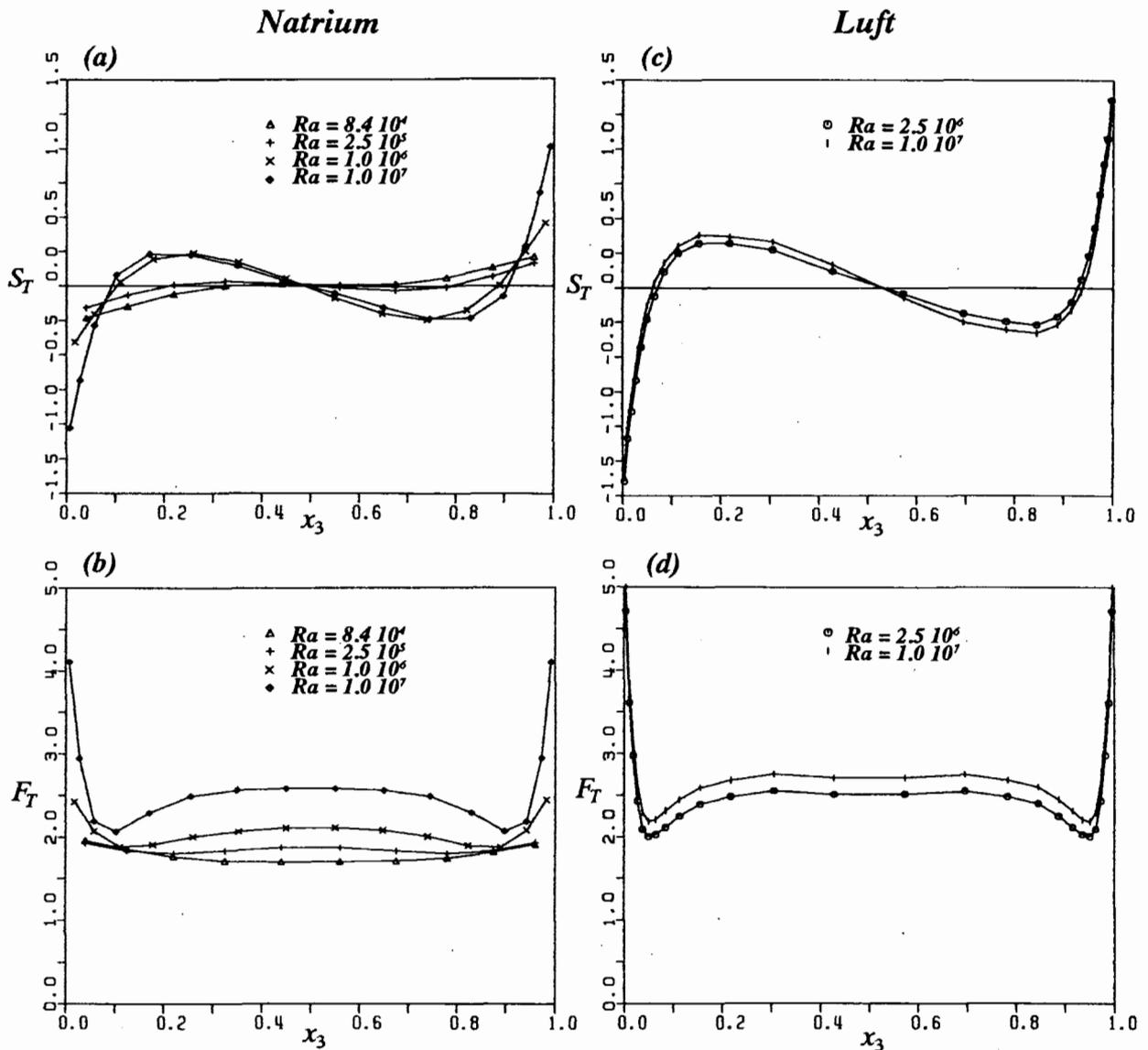


Abb. 4.15: Vertikale Profile der Schiefe (a,c) und der Flachheit (b,d) der Temperatur bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium (a,b) und Luft (c,d) bei unterschiedlichen Rayleigh-Zahlen.

Das vertikale Profil der Schiefe der Temperatur weist bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium im Fall BNA84 in der unteren Grenzschicht negative und in der oberen Grenzschicht positive Werte auf, Abbildung 4.15a. Unten treten demzufolge häufige positive Temperaturabweichungen mit kleiner Amplitude und negative Temperaturabweichungen mit wesentlich größeren Amplitudenwerten auf. Im oberen Kanalbereich sind die Verhältnisse gerade umgekehrt. Auffällig ist die symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung außerhalb der dicken thermischen Grenzschichten im Kernbereich des Kanals. Es handelt sich jedoch um keine Gaußsche Normalverteilung, wie das Profil der Flachheit in Abbildung 4.15b beweist. Die Flachheit hat im gesamten Kanal den Wert zwei. Mit zunehmender Rayleigh-Zahl ändern sich die Verhältnisse inner- und außerhalb der thermischen Grenzschichten signifikant, mit der Folge, daß die Verläufe von Schiefe und Flachheit im Natriumfall BNA10000 quantitativ und qualitativ gut mit denen der Luftfälle BLU25 und BLU100 übereinstimmen. Diese Ähnlichkeit der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen deutet auf eine prinzipiell ähnliche Entwicklung des turbulenten Temperaturfeldes bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium und Luft bei zunehmenden Rayleigh-Zahlen hin. Mit steigender Rayleigh-Zahl wird die Verteilung der Temperaturabweichungen in den Grenzschichten unsymmetrischer und ist weniger flach, d.h. der Wert der Schiefe wird positiver oder negativer, der der Flachheit steigt. Im isothermen Kernbereich geht die symmetrische Verteilung, die Kanalmittelebene ausgenommen, verloren und die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen weisen im unteren und oberen Kernbereich ein der unteren und oberen Grenzschicht entgegengesetztes Verhalten auf. Wie die Analyse der Strukturen zeigen wird, ist der Grund in den im unteren (oberen) Bereich großflächigen Abstromgebieten (Aufstromgebieten) mit hoher negativer (positiver) Vertikalgeschwindigkeit zu suchen, die innerhalb der Grenzschichten jedoch auf Null verzögert wird. Auch im Kernbereich wird die Verteilung der Temperaturabweichung mit steigender Rayleigh-Zahl unsymmetrischer, d.h. der Wert der Schiefe positiver oder negativer. Der Wert der Flachheit wird ebenfalls größer. Es treten mit steigender Rayleigh-Zahl in allen Kanalbereichen, besonders ausgeprägt jedoch in den Grenzschichten, häufiger kleinere und seltener größere Abweichungen der Temperatur von ihrem Mittelwert auf.

#### 4.4.2 Geschwindigkeitsfeld

Bei allen durchgeführten Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium weist das Geschwindigkeitsfeld einen eindeutigen Grenzschichtcharakter auf. Dies trifft auch auf den Fall BNA84 zu, obwohl dort die beiden thermischen Grenzschichten noch fast bis zur Kanalmitte reichen. Stellvertretend für alle Natriumsimulationen wird hier der Fall BNA10000 mit der höchsten Rayleigh-Zahl ausgewertet. Die turbulente kinetische Energie und die RMS-Werte der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten haben je zwei Maxima in Wandnähe in den Randbereichen der hydrodynamischen Grenzschichten, wohingegen der RMS-Wert der Vertikalgeschwindigkeit ein Maximum in der Kanalmittelebene hat, Abbildung 4.16. Aus diesem Grund zeigt das Profil der turbulenten kinetischen Energie fast im gesamten Kernbereich einen konstanten Verlauf. Alle in Abbildung 4.16 dargestellten Kurven sind den in den Abbildungen 4.9c,d und g,h gezeigten Verläufen der Luftsimulationen qualitativ ähnlich.

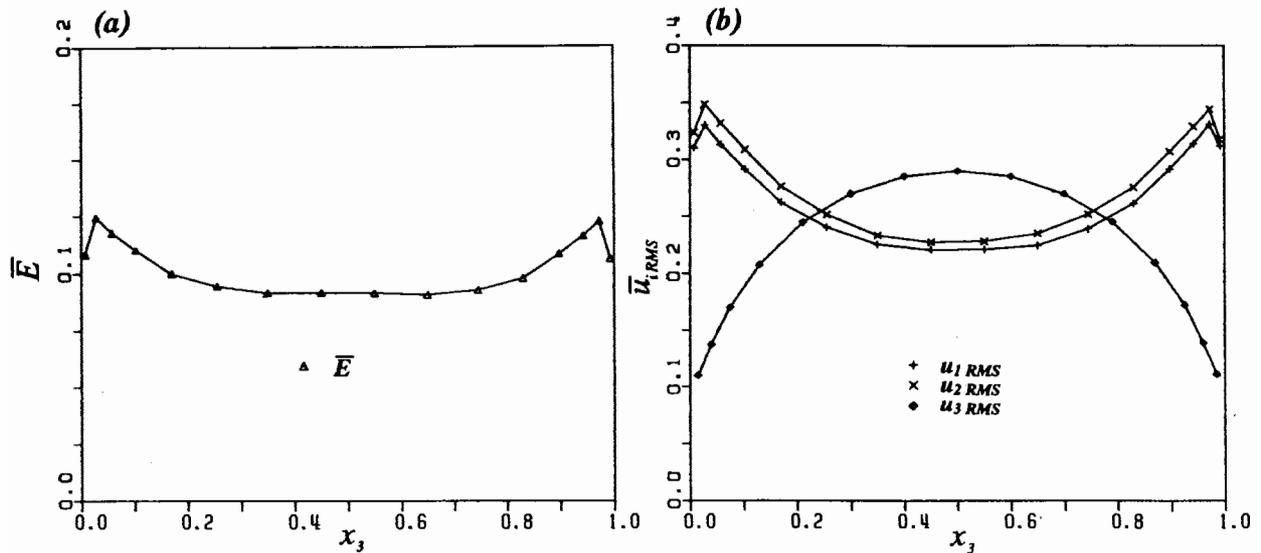


Abb. 4.16: Vertikale Profile (a) der turbulenten kinetischen Energie und (b) der RMS-Werte der drei Geschwindigkeitskomponenten im Fall BNA10000 bei  $Ra=10^7$ .

Ausgehend vom Fall BNA84 bis hin zum dargestellten Fall BNA10000 können für wachsende Rayleigh-Zahlen die folgenden Beobachtungen festgehalten werden. Erstens existiert im Geschwindigkeitsfeld keine ausgeprägte Vorzugsrichtung mehr. Dies deuten die RMS-Werte der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten an. Während sie im Fall BNA84 noch deutliche Unterschiede aufweisen, die auf verschiedene Beträge der Fluktuationsenergie in den beiden horizontalen Richtungen hinweisen, sind sie in allen anderen Fällen BNA250, BNA1000 und dem dargestellten Fall BNA10000 ähnlich. Zweitens nimmt die Dicke der hydrodynamischen Grenzschicht ab. Dies zeichnet sich anhand der immer näher an den Wänden auftretenden Maxima der Profile der turbulenten kinetischen Energie sowie der RMS-Werte der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten ab, während der Kernbereich mit einem zunehmend konstanten Verlauf der Profile breiter wird. Gleichzeitig wird das Profil des RMS-Wertes der Vertikalgeschwindigkeitskomponente breiter und dessen Maximum in der Kanalmittelebene flacher. Drittens nehmen die Amplituden der Abweichungen aller Geschwindigkeitskomponenten von ihrem Mittelwert ab. Ein Phänomen, das auch im Falle der abnehmenden Amplituden der Abweichungen der Temperatur von ihrem Mittelwert beobachtet wird und bereits im vorigen Unterkapitel diskutiert worden ist. Dieses Verhalten der beiden zuletzt genannten Punkte bei zunehmenden Rayleigh-Zahlen wird auch bei der Analyse der Simulationen von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft in Kapitel 4.3.1 festgestellt, so daß hier eine prinzipielle Ähnlichkeit vorhanden ist.

Die vertikalen Profile von Schiefe und Flachheit der drei Geschwindigkeitskomponenten bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium im Fall BNA10000 im Vergleich zu Luft im Fall BLU100 stimmen qualitativ und quantitativ auffällig gut überein, Abbildungen 4.17a-d. Sie unterscheiden sich aufgrund der modellierten Geschwindigkeitsgradienten im Fall BNA10000 und der aufgelösten Grenzschichten im Fall BLU100 ausschließlich in den Wandbereichen.

Die Schiefen der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten beider Fälle sind im gesamten Kanal fast Null und lassen auf eine symmetrische Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte schließen. Die Schiefe der Vertikalgeschwindigkeitskomponenten beider Fälle weist ähnlich der Schiefe der Temperatur jedoch ausgeprägter an der unteren Wand negative und an der oberen Wand positive Werte auf. Im Kernbereich besteht diese Ähnlichkeit mit der Schiefe der Temperatur auch, jedoch hier weniger ausgeprägt. Entgegengesetzt dem Verhalten in den Wandbereichen, weist die Schiefe unterhalb der Kanalmittelebene schwach positive, oberhalb schwach negative Werte auf. Insgesamt läßt sie auf eine nahezu symmetrische Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte beider Fälle im Kernbereich schließen. Die Profile der Flachheit zeigen, daß die Wahrscheinlichkeitsdichten aller Geschwindigkeitskomponenten im Kernbereich kaum von der Gaußschen Normalverteilung abweichen. In den Wandbereichen dagegen steigt der Wert der Flachheit der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten schwach, der der Vertikalgeschwindigkeitskomponenten beider Fälle stark an. Es treten dort, gedämpft durch

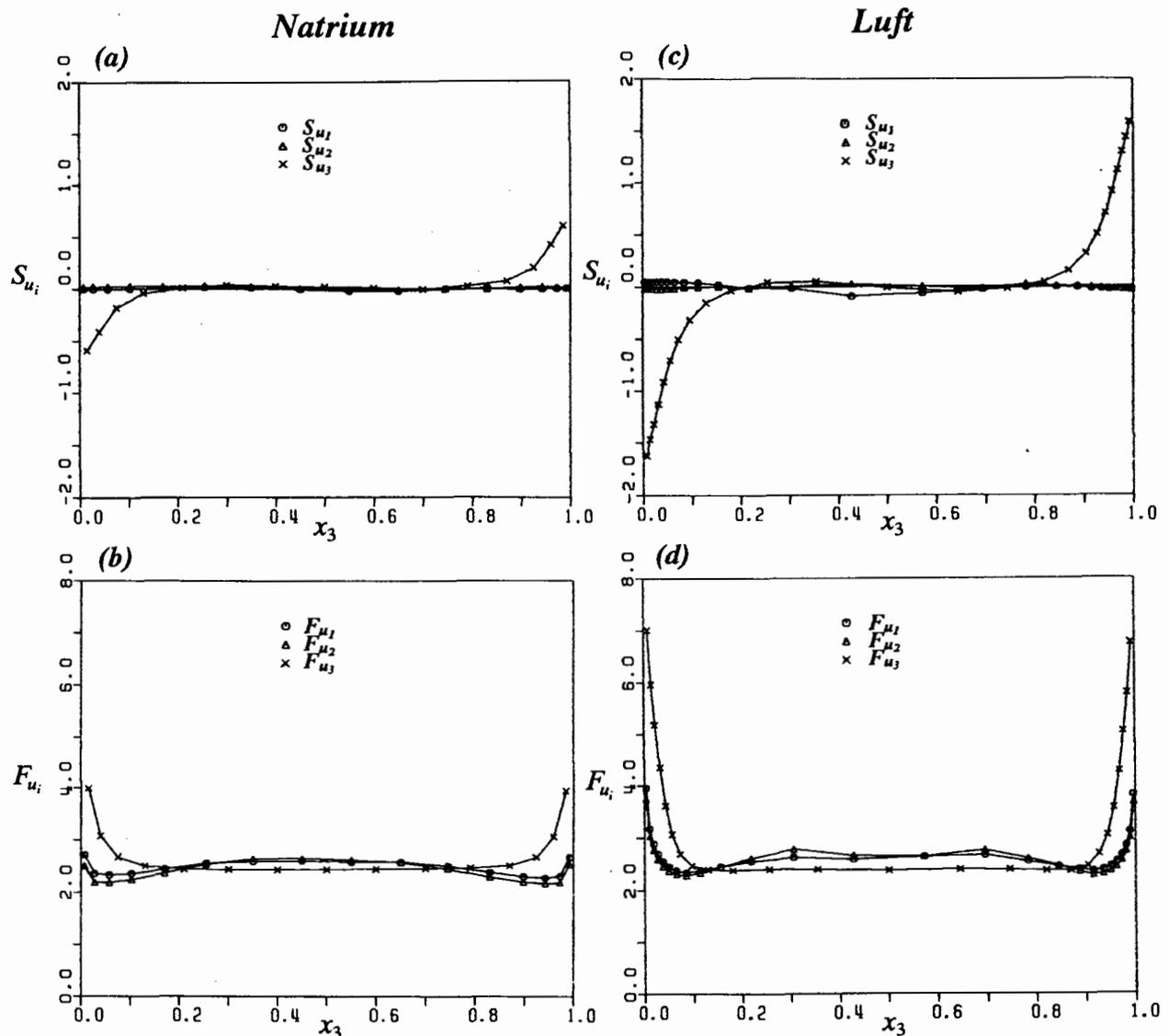


Abb. 4.17: Vertikale Profile der Schiefe (a,c) und der Flachheit (b,d) der drei Geschwindigkeitskomponenten bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium im Fall BNA10000 (a,b) und Luft im Fall BLU100 (c,d).

die Wände, häufiger kleinere und seltener größere Geschwindigkeitsabweichungen vom Mittelwert auf. Dies betrifft besonders die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand.

Die Analyse der Natriumfälle zeigt, daß mit steigender Rayleigh-Zahl der Betrag des Wertes der Schiefe der Vertikalgeschwindigkeitskomponente in den Wandbereichen ansteigt. Dies geht einher mit einem Anstieg des Wertes der Flachheit aller Geschwindigkeitskomponenten, besonders jedoch der Vertikalgeschwindigkeitskomponente im Kernbereich und stärker ausgeprägt in den Wandbereichen. Es treten deshalb im gesamten Kanal häufiger kleinere und seltener größere Abweichungen aller Geschwindigkeitskomponenten von ihrem Mittelwert auf. Das hat eine Abnahme der Varianz und damit des RMS-Wertes zur Folge. Die RMS-Werte der drei Geschwindigkeitskomponenten nehmen also mit steigender Rayleigh-Zahl ebenso wie der RMS-Wert der Temperatur aufgrund der Veränderungen in den Verteilungen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ab.

#### 4.4.3 Grashof-Analogie

Ein Ergebnis, das im Rahmen der in Kapitel 3 beschriebenen Modellentwicklung dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielt und mehrfach verwendet wird und das auch Wörner (1994) schon zeigt, folgt durch einen Vergleich der eindimensionalen Energiespektren der Geschwindigkeitsfluktuationen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium im Fall BNA84 und Luft im Fall BLU100 an jeweils gleicher vertikaler Position im Kanal, Abbildung 4.18. Während die makroskopischen Strukturen im Geschwindigkeitsfeld der Natriumsimulation einen deutlich höheren Energieinhalt gegenüber denen der Luftsimulation aufweisen, stimmen die Spektren im hochfrequenten Wellenzahlbereich gut überein, obwohl sich die charakteristischen Kennzahlen  $Ra$  und  $Pr$  beider Fälle stark unterscheiden. Der Grund für diese

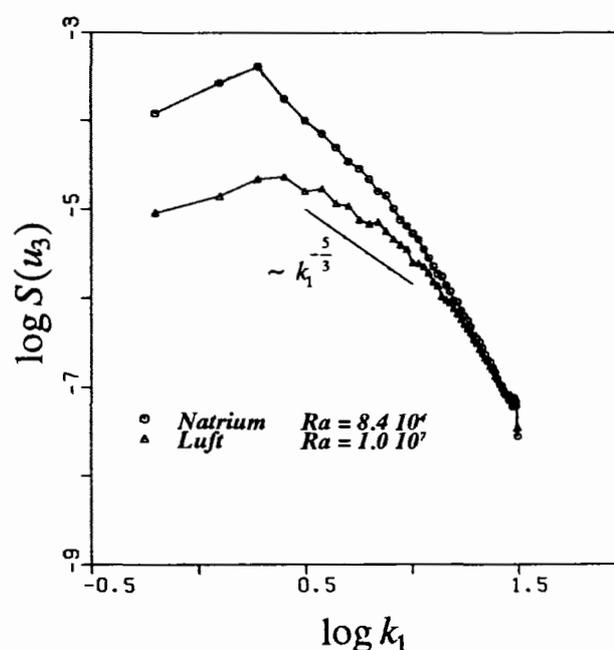


Abb. 4.18: Eindimensionale Energiespektren der  $u_3$ -Geschwindigkeitsfluktuationen in Kanalmitte bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium ( $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ) und Luft ( $Ra=10^7$ ) bei gleicher Grashof-Zahl ( $Gr=1.4 \cdot 10^7$ ).

Übereinstimmung folgt aus einer Kombination dieser beiden Kennzahlen, der Grashof-Zahl, die als einzige charakteristische Kennzahl in den dimensionslosen Impulsgleichungen (2.2b) als Faktor vor den Reibungstermen steht und in beiden Fällen den Wert  $Gr=1.4 \cdot 10^7$  aufweist. Dem Geschwindigkeitsfeld werden im Natriumfall, aufgrund der Kopplung der Impulsgleichungen (2.2b) mit der Energiegleichung (2.2c) durch den Konvektions- und den Auftriebsterm, die großräumigen Strukturen des Temperaturfeldes aufgeprägt. Das schlägt sich in dem erhöhten Energieinhalt der langwelligen Anteile nieder. Die molekularen Reibungskräfte werden dagegen erst im hochfrequenten Wellenzahlbereich dominant. Aufgrund der gleichen Grashof-Zahlen verhalten sich auch die kleinskaligen Geschwindigkeitsfluktuationen beider Fälle ähnlich und weisen bei gleichen Wellenzahlen einen ähnlichen Energieinhalt auf.

#### 4.4.4 Räumliche Zweipunktkorrelationen

Zur Beurteilung der Frage, ob die Periodenlängen der Natriumsimulationen ausreichend sind, um die Erfassung der makroskopischen Konvektionsstrukturen durch das Rechengebiet und die statistische Entkopplung der Vorgänge in den turbulenten Feldern zu gewährleisten, werden räumliche Zweipunktkorrelationen verschiedener Geschwindigkeitsfluktuationen  $R_{ii}$  und der Temperaturfluktuationen  $R_{TT}$  in der Kanalmittelebene ausgewertet, Abbildung 4.19. Die Horizontalgeschwindigkeitsfluktuationen weisen eine ausreichende statistische Entkopplung auf. Als kritischer erweist sich wie in den Luftfällen die räumliche Kopplung der Vertikalgeschwindigkeitsfluktuationen und der Temperaturfluktuationen, deren Signale außerdem stark korreliert sind. Sie sind in allen Fällen über die halbe Kanallänge hinweg in  $x_1$ -Richtung statistisch nicht entkoppelt, wenngleich im Fall BNA10000 dieser Eindruck entstehen könnte. Das verdeutlicht der flache Abfall von  $R_{TT}$  im Bereich  $x_1=0.0-2.0$ , der im Vergleich zu dem Verlauf von  $R_{TT}$  der drei übrigen Fällen klar macht, daß die makroskopische Wellenlänge im Temperaturfeld in diesem Fall größer als die halbe Periodenlänge sein muß. Dieses Ergebnis werden auch die räumlichen eindimensionalen Energiespektren der Temperaturfluktuationen im nächsten Unterkapitel bestätigen.

Ein mittlerer Wert für die Wellenlänge der makroskopischen Konvektionsstrukturen kann sowohl dem Verlauf von  $R_{33}$  als auch dem Verlauf von  $R_{TT}$  entnommen werden, ausreichend lange Mittelungszeiträume vorausgesetzt. Sie folgt als Länge zwischen zwei auftretenden Maxima oder Minima der Korrelationsfunktionen und charakterisiert die mittlere Ausdehnung eines durch die obere oder untere Wand gekoppelten Auf- und Abstromgebietes in einer Richtung. In Tabelle 4.6 sind die so ermittelten makroskopischen Wellenlängen  $\lambda$  bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft aus Abbildung 4.4 und mit Natrium aus Abbildung 4.19 zusammengefaßt.

Als Ergebnis wird festgehalten, daß die Periodenlänge  $X_{1,2}=10$  in allen Fällen, ausgenommen BLU100 und BNA10000, für eine freie Entwicklung der makroskopischen Konvektionsstrukturen ausreichend ist und keine zu kleinen Strukturen durch das gewählte Rechengebiet aufgeprägt werden. Aufgrund der periodischen Randbedingungen und der starken räumlichen Kopplung der Vertikalgeschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen bei der Simulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion sind größere Periodenlängen zwar wünschenswert, jedoch

Fall	Ra	$\lambda$
BLU3	$3.8 \cdot 10^5$	$\approx 4.0$
BLU6	$6.3 \cdot 10^5$	$\approx > 4.0$
BLU25	$2.5 \cdot 10^6$	$\approx 4.6-4.9$
BLU100	$1.0 \cdot 10^7$	$\approx > 5.0$
BNA84	$8.4 \cdot 10^4$	$\approx 3.1-3.3$
BNA250	$2.5 \cdot 10^5$	$\approx 3.2-3.4$
BNA1000	$1.0 \cdot 10^6$	$\approx 4.6-4.9$
BNA10000	$1.0 \cdot 10^7$	$\approx > 5.0$

Tab. 4.6: Makroskopische Wellenlängen  $\lambda$  bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen.

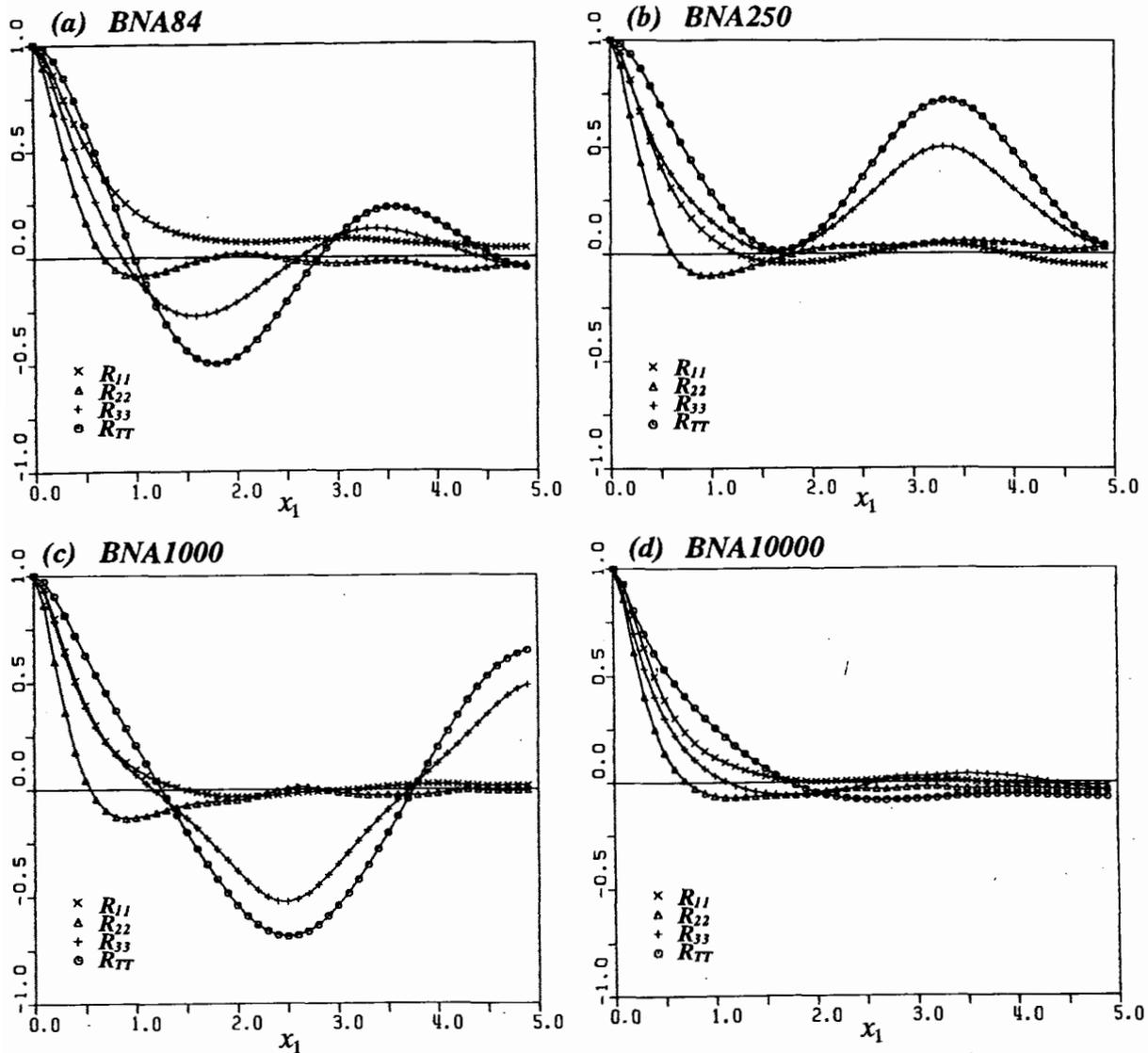


Abb. 4.19: Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen  $u_i''$  und der Temperaturfluktuationen  $T''$  in der Kanalmittelebene in Abhängigkeit der  $x_1$ -Richtung der Fälle (a) BNA84, (b) BNA250, (c) BNA1000 und (d) BNA10000.

wie in Kapitel 4.2.1 angedeutet nur schwer realisierbar. Verantwortlich für diese großen räumlichen Korrelationen ist, wie im Falle der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft, die Kopplung der durch die beiden instabilen Grenzschichten und den Mechanismus der Rayleigh-Taylor-Instabilität hervorgerufenen Auf- und Abstromgebiete durch die gegenüberliegenden festen Wände (vgl. Kapitel 4.2.1). Ein weiterer Grund im Fall BNA84 sind die kurzzeitig auftretenden, stark gestörten Bandstrukturen (vgl. Kapitel 4.5.1).

#### 4.4.5 Energiespektren räumlicher Verteilungen

Zur Beurteilung der Frage, ob die räumliche Auflösung der mit der Methode der direkten numerischen Simulation berechneten Temperaturfelder bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium ausreichend ist, werden eindimensionale Energiespektren der räumlichen Verteilung der turbulenten kinetischen Energie und der Temperaturfluktuationen ausgewertet, Abbildungen 4.20a,b.

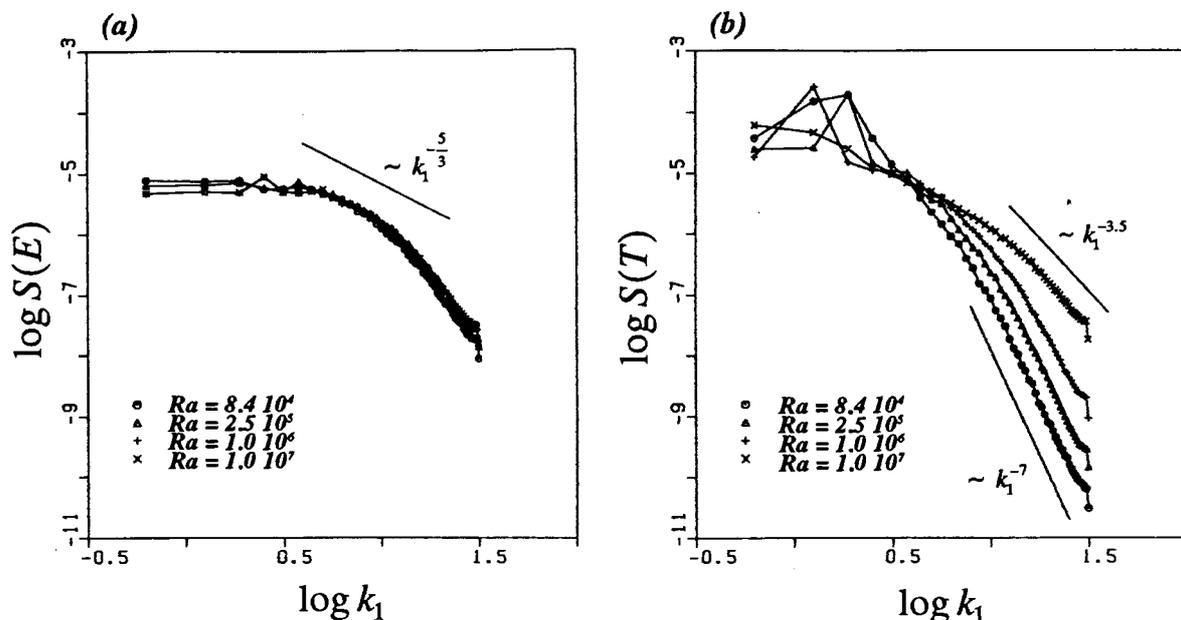


Abb. 4.20: Eindimensionale Energiespektren der turbulenten kinetischen Energie (a) und der Temperaturfluktuationen (b) bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium in Kanalmitte der Fälle BNA84, BNA250, BNA1000 und BNA10000.

Die Spektren der turbulenten kinetischen Energie weisen keine signifikanten Unterschiede auf. Der Abfall der Spektren bei den kleinen, noch durch das Maschennetz aufgelösten Wellenlängen erfolgt mit Potenzen der Wellenzahl  $k_1$ , die größer als die geforderten  $5/3$  des Kolmogorov-Bereiches sind. Das deutet auf eine ausreichende Dämpfung der aufgelösten Grobstruktur im Geschwindigkeitsfeld durch das Feinstrukturmodell hin.

Ganz anders stellen sich die Verhältnisse im Temperaturfeld dar. Mit steigender Rayleigh-Zahl wird das Spektrum der Temperaturfluktuationen im Bereich hoher Wellenzahlen aufgeweitet. Trotzdem zeigt es auch im Fall BNA10000 bei den kleinsten, durch das Maschennetz

aufgelösten Wellenlängen einen Abfall, der ungefähr proportional der vierten Potenz der Wellenzahl  $k_1$  ist. Damit wird in diesem Fall zwar nicht die asymptotische Lösung gemäß der Theorie von Rotta (1972) erreicht, die für sehr große Wellenzahlen einen Abfall der Spektren mit der siebten Potenz der Wellenzahl  $k_1$  voraussagt, jedoch verläuft der Abfall steiler als mit der dritten Potenz der Wellenzahl  $k_1$ . Ab diesem Abfall erreicht das Dissipationsintegral sein Maximum und kommt in die Sättigung und es kann von einer sinnvollen direkten numerischen Simulation gesprochen werden [Hinze (1975)].

Ein weiteres Ergebnis ist der, im Vergleich zu den Spektren der turbulenten kinetischen Energie, bei sehr kleinen Wellenzahlen beginnende steile Abfall der Spektren der Temperaturfluktuationen. Die Entstehung kleinskaliger Strukturen im Temperaturfeld wird durch die hohe Wärmeleitfähigkeit von Natrium behindert, die schnelle Ausgleichsvorgänge durch molekulare thermische Diffusion und damit eine stetige Dämpfung der kleinen räumlichen Störungen zur Folge hat.

Auffällig ist auch das ausgeprägte Maximum im Verlauf der Spektren der Temperaturfluktuationen und das weniger ausgeprägte Maximum im Verlauf der Spektren der turbulenten kinetischen Energie im niederfrequenten Bereich. Mit steigender Rayleigh-Zahl verschieben sich diese Maxima zu kleineren Wellenzahlen und befinden sich im Fall BNA10000 am äußersten linken Rand der Spektren. Die Maxima weisen auf die makroskopischen Wellenlängen der am häufigsten auftretenden großräumigen Konvektionsstrukturen bei einer bestimmten Rayleigh-Zahl hin. Damit wird klar, daß der Fall BNA10000 mit  $X_{1,2}=10$  an der Auflösungsgrenze für makroskopische Strukturen liegt. Bei höheren Rayleigh-Zahlen sind größere Periodenlängen erforderlich.

## **4.5 Strukturen der Konvektion bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium**

Nachdem bisher hauptsächlich mit den Methoden der Statistik zeitlich und räumlich gemittelte Größen betrachtet wurden, stehen momentane, lokale Größen im Mittelpunkt dieses Kapitels. Im folgenden werden die bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl und der Kanalebene auftretenden räumlichen Strukturen im Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld analysiert sowie untereinander und mit den Strukturen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft im Falle hoher Rayleigh-Zahlen verglichen.

### **4.5.1 Strukturen bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen**

Die Abbildungen 4.21a-e zeigen Horizontalschnitte nahe der Kanalmittelebene mit Isolinien der momentanen Temperaturfluktuationen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium der Fälle BNA84, BNA250, BNA1000 und BNA10000 im Vergleich mit Luft im Fall BLU100. Gestrichelte Isolinien kennzeichnen Temperaturwerte, die kleiner als der Ebenenmittelwert sind, durchgezogene Isolinien kennzeichnen Temperaturwerte, die größer als der Ebenenmittelwert sind. Auffallend im Fall BNA84 sind die in Teilbereichen des Kanals sichtbaren Bandstrukturen, die durch dreidimensionale Effekte stark gestört sind und nur kurzzeitig auf-

treten. Das Temperaturfeld weist damit bei dieser Rayleigh-Zahl noch eine Vorzugsrichtung auf, die dem Geschwindigkeitsfeld aufgeprägt wird. Diese Darstellung bestätigt somit die in Kapitel 4.4.2 diskutierten Unterschiede in den RMS-Werten der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten, die auf Strukturen hindeuten. Auch die Flachheit der Temperatur, die in diesem Fall in der betrachteten Ebene den Wert  $F_T=1.7$  besitzt, weist eher auf ein periodisches Sinussignal ( $F_T=1.5$ ) als eine Gaußsche Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ( $F_T=3.0$ ) hin. Dies gilt, obwohl nicht ganz so offensichtlich, auch für den Fall BNA250 ( $F_T=1.9$ ), während die Fälle BNA1000 ( $F_T=2.1$ ) und BNA10000 ( $F_T=2.6$ ) immer stärker zu einer statistischen Verteilung tendieren, die im Fall BLU100 ( $F_T=2.8$ ) augenscheinlich erreicht ist (vgl. Abbildung 4.15). Trotzdem weisen die RMS-Werte der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten bereits im Fall BNA250 keine signifikanten Unterschiede mehr auf. Das läßt darauf schließen, daß hier keine Vorzugsrichtung mehr vorhanden ist. Diesen Eindruck vermittelt auch Abbildung 4.21b, in der unregelmäßig angeordnete Zellenmuster zu sehen sind, in deren Zentren, wie Abbildung 4.22 zeigt, kaltes Fluid nach unten fällt oder aufsteigt. Die dicht zusammenliegenden Isolinien am Rande der Zentren deuten auf die steilen Temperaturgradienten zwischen den kalten Ab- und heißen Aufstromgebieten hin. Mit zunehmender Rayleigh-Zahl werden die Konvektionszellen unregelmäßiger und chaotischer, bis sie schließlich als solche in den Fällen BNA10000 und BLU100 nicht mehr zu erkennen sind. Gleichzeitig werden immer größere, zusammenhängende Gebiete geformt, die die starke räumliche Kopplung und die große makroskopische Wellenlänge bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium und Luft bewirken. Diese hier sichtbaren Phänomene werden bereits anhand der Zweipunktkorrelationen  $R_{TT}$  und  $R_{ii}$  (vgl. dazu Abbildungen 4.4 und 4.19) und der eindimensionalen Energiespektren (vgl. Abbildung 4.3 und 4.20) diskutiert.

In den Abbildungen 4.22a-e sind Horizontalschnitte nahe der Kanalmittelebene mit Isolinien der momentanen Vertikalgeschwindigkeit dargestellt. Sie stimmen bezüglich Ort und Zeitpunkt mit den in Abbildung 4.21 gezeigten Horizontalschnitten überein. Gestrichelte Isolinien kennzeichnen negative, durchgezogene kennzeichnen positive Vertikalgeschwindigkeiten. Deutlich sichtbar wird der unterschiedliche Charakter des Geschwindigkeitsfeldes gegenüber dem des Temperaturfeldes im Fall BNA84. Hier treten im Geschwindigkeitsfeld sehr viel kleinräumigere Strukturen in Erscheinung als im Temperaturfeld. Dies ist auch in den Fällen BNA250 und BNA1000, jedoch nicht mehr so offensichtlich im Fall BNA10000 festzustellen. Die Gründe sind die immer schwieriger vergleichbaren kleinskaligen Anteile, weil zum einen die Auflösungsgrenze im Temperaturfeld erreicht wird und zum anderen nicht alle Skalen im Geschwindigkeitsfeld durch das Maschennetz aufgelöst werden. Dadurch wird der Eindruck einer zunehmenden Ähnlichkeit beider Felder vermittelt, der so nicht gegeben ist, weil in keinem der fünf Geschwindigkeitsabbildungen die kleinsten Wirbel aufgelöst sind. So verdeutlicht die Ähnlichkeit der Horizontalschnitte der Temperaturfluktuationen und der Vertikalgeschwindigkeit das Erreichen der Auflösungsgrenze des Temperaturfeldes durch dieses Maschennetz. Eine weitere Erhöhung der Rayleigh-Zahl würde für das Temperaturfeld im Falle einer direkten numerischen Simulation eine Verfeinerung des Maschennetzes erforderlich machen oder es müßte mit der Methode der Grobstruktursimulation berechnet werden. Die Abbildungen 4.22 untermauern, daß in Gebieten mit negativen Temperaturfluktuationen kaltes Fluid nach unten fällt, da es sich gleichzeitig um Gebiete mit negativer Vertikalgeschwindigkeit handelt. Gestrichelte und durchgezogene Linien treten demzufolge in

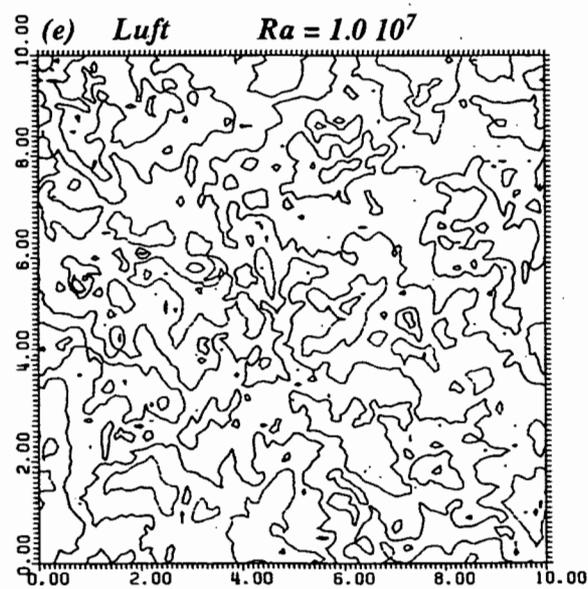
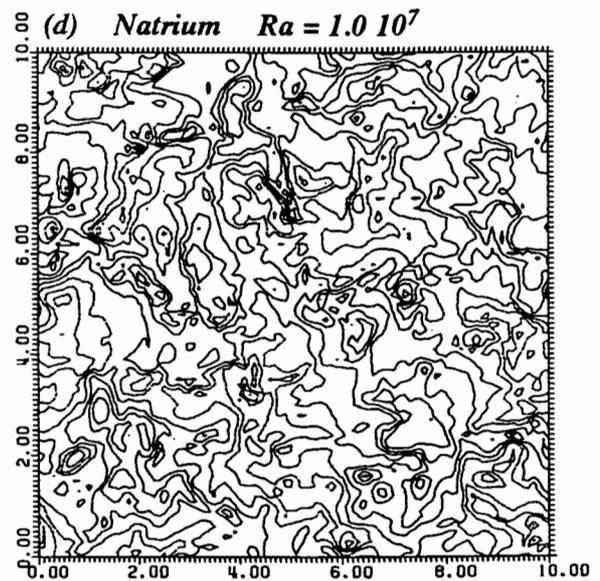
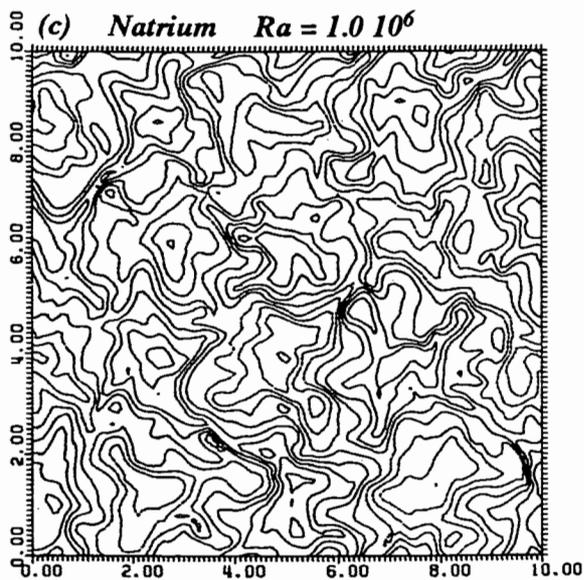
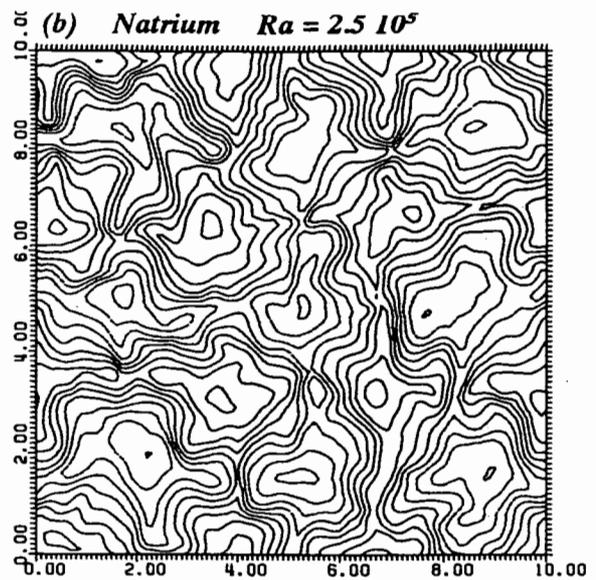
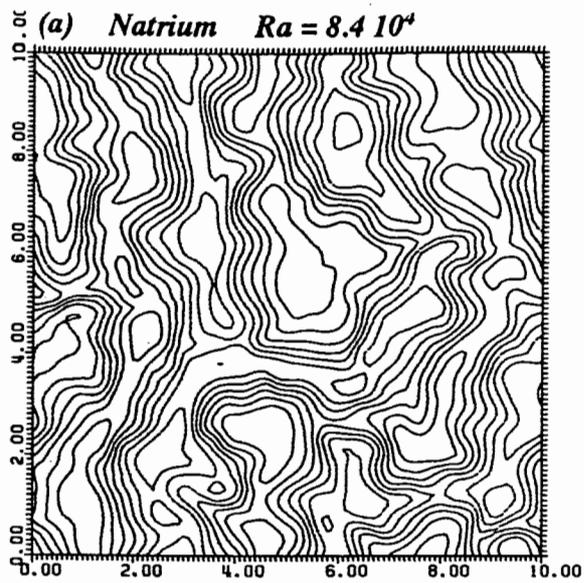


Abb. 4.21: Isolinien der Temperaturfluktuationen (Inkrement: 0.1) für Natrium (a-d) und Luft (e) nahe der Kanalmittelebene. (a)  $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ,  $x_3=0.44$ ,  $t=401.1$ ; (b)  $Ra=2.5 \cdot 10^5$ ,  $x_3=0.44$ ,  $t=523.1$ ; (c)  $Ra=10^6$ ,  $x_3=0.45$ ,  $t=235.9$ ; (d)  $Ra=10^7$ ,  $x_3=0.45$ ,  $t=180.7$ ; (e)  $Ra=10^7$ ,  $x_3=0.43$ ,  $t=196.6$ .

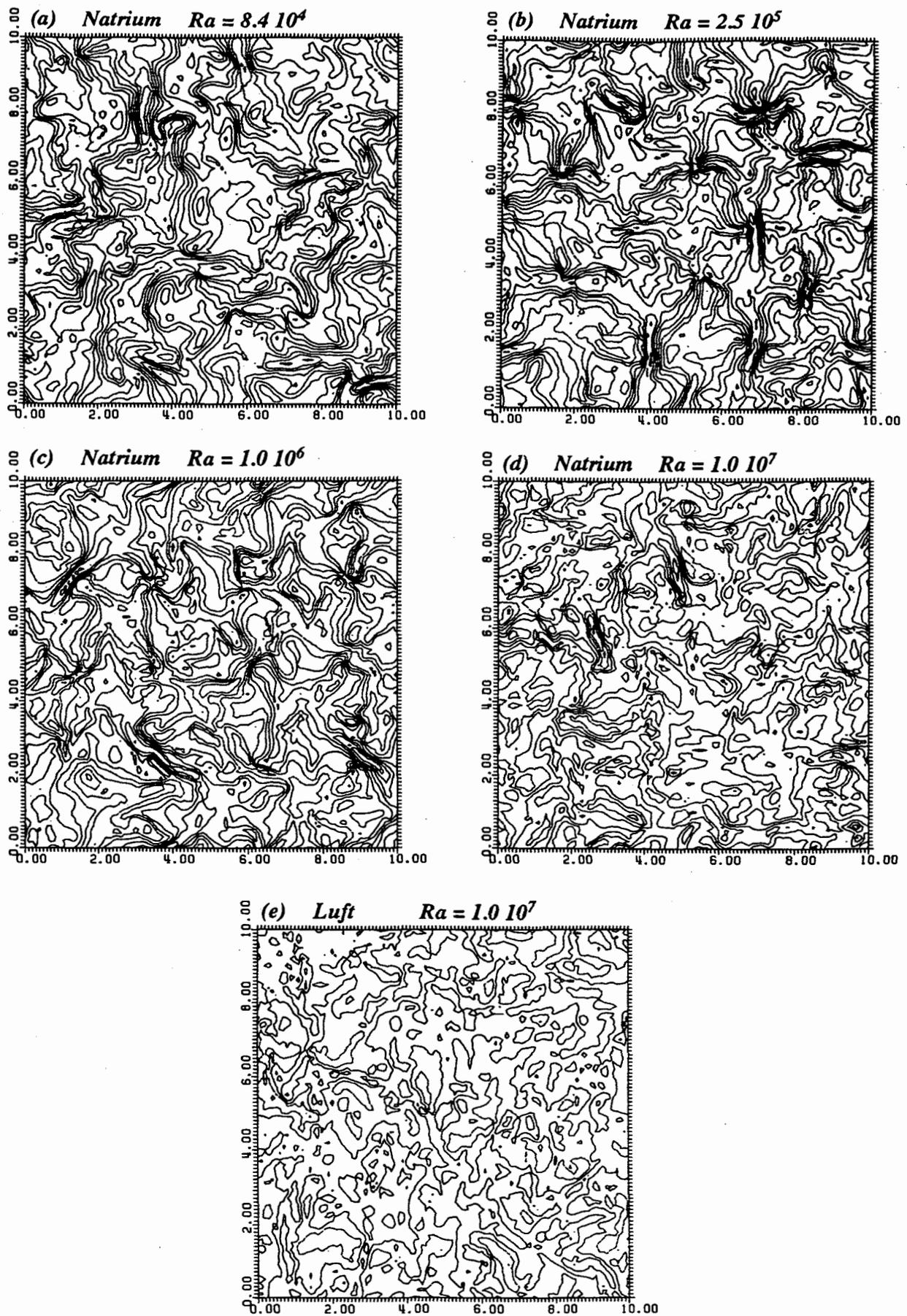


Abb. 4.22: Isolinien der Vertikalgeschwindigkeit (Inkrement: 0.2) für Natrium (a-d) und Luft (e) nahe der Kanalmittelebene. (a)  $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ,  $x_3=0.44$ ,  $t=401.1$ ; (b)  $Ra=2.5 \cdot 10^5$ ,  $x_3=0.44$ ,  $t=523.1$ ; (c)  $Ra=10^6$ ,  $x_3=0.45$ ,  $t=235.9$ ; (d)  $Ra=10^7$ ,  $x_3=0.45$ ,  $t=180.7$ ; (e)  $Ra=10^7$ ,  $x_3=0.43$ ,  $t=196.6$ .

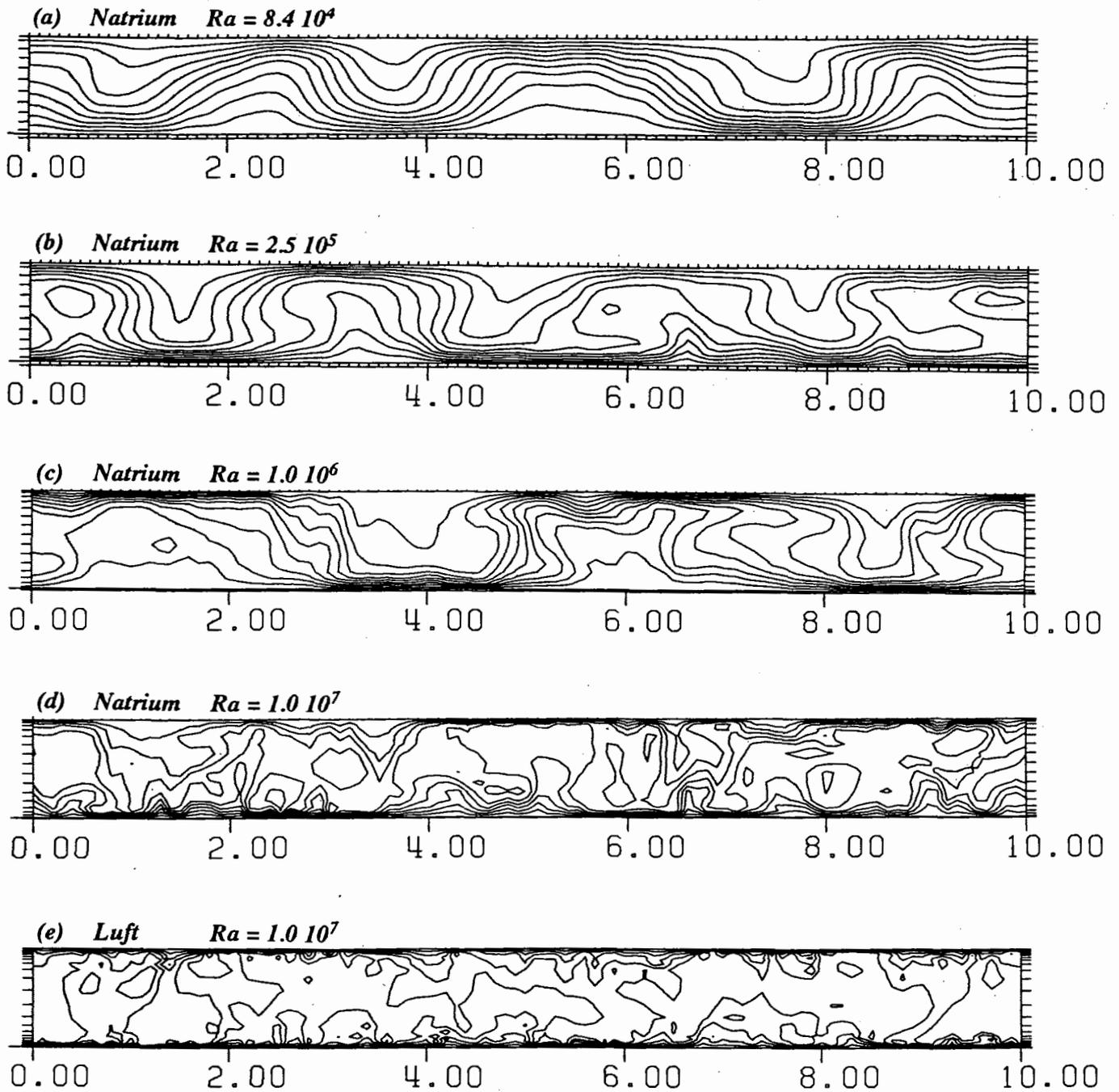


Abb. 4.23: Isolinien der Temperatur (Inkrement: 0.1) für Natrium (a-d) und Luft (e) in Vertikalschnitten. (a)  $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ,  $x_2=5$ ,  $t=401.1$ ; (b)  $Ra=2.5 \cdot 10^5$ ,  $x_1=5$ ,  $t=523.1$ ; (c)  $Ra=10^6$ ,  $x_1=5$ ,  $t=235.9$ ; (d)  $Ra=10^7$ ,  $x_1=5$ ,  $t=180.7$ ; (e)  $Ra=10^7$ ,  $x_1=5$ ,  $t=196.6$ .

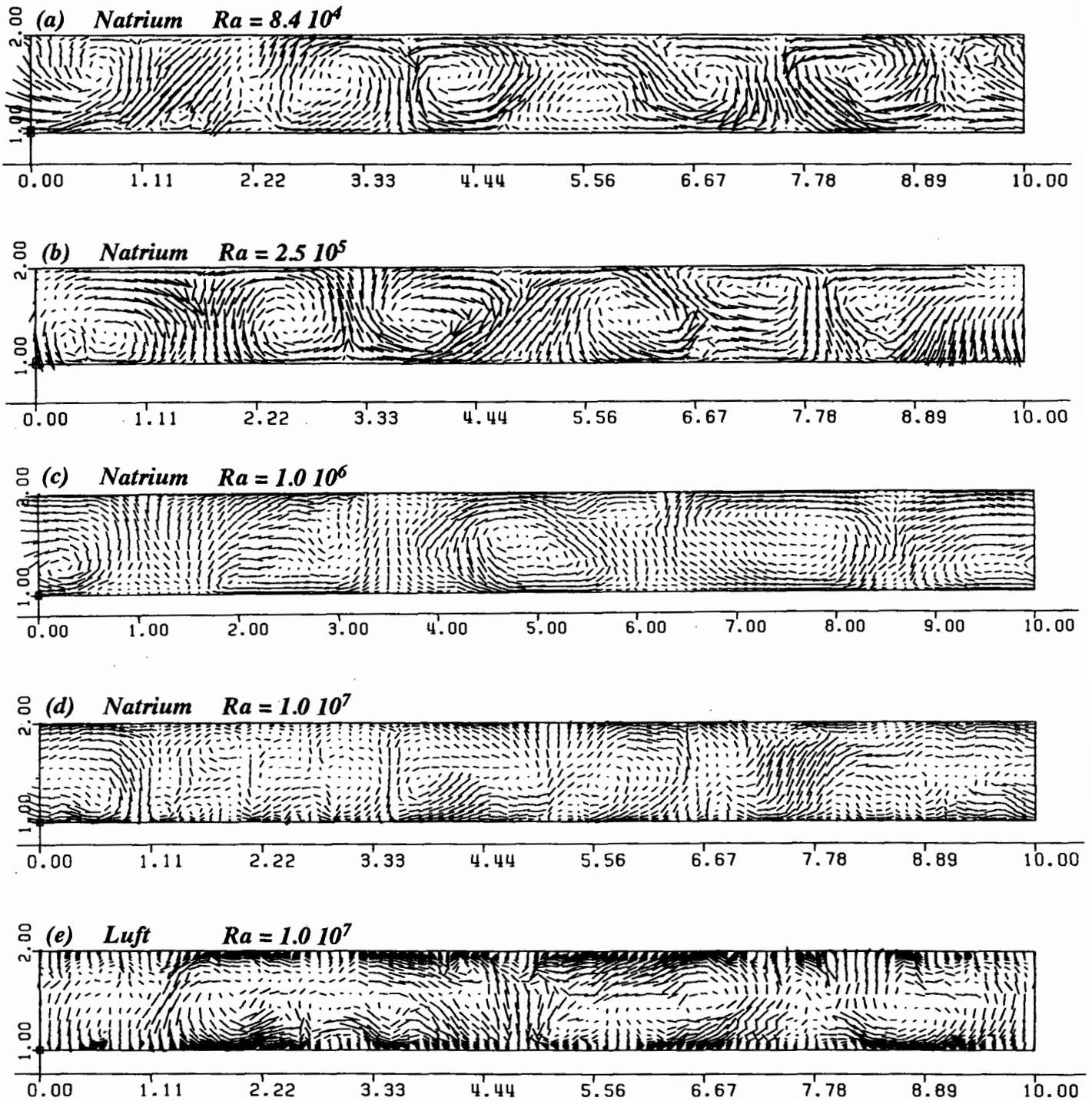


Abb. 4.24: Vektoren der Geschwindigkeit für Natrium (a-d) und Luft (e) in Vertikalschnitten. (a)  $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ,  $x_2=5$ ,  $t=401.1$ ; (b)  $Ra=2.5 \cdot 10^5$ ,  $x_1=5$ ,  $t=523.1$ ; (c)  $Ra=10^6$ ,  $x_1=5$ ,  $t=235.9$ ; (d)  $Ra=10^7$ ,  $x_1=5$ ,  $t=180.7$ ; (e)  $Ra=10^7$ ,  $x_1=5$ ,  $t=196.6$ .

Abbildungen dieser Art an gleichen Orten auf und unterstreichen die starke Korrelation zwischen Temperatur- und Vertikalgeschwindigkeitsfluktuationen.

Die Vertikalschnitte der momentanen Temperatur in Abbildung 4.23 stimmen bezüglich dem Zeitpunkt mit den in Abbildung 4.21 gezeigten Horizontalschnitten überein. Während im Fall BNA84 noch relativ schwache Auslenkungen der Isolinien auf die nicht sehr großen Temperaturabweichungen vom reinen Wärmeleitungszustand hindeuten, verformen sie sich mit wachsender Rayleigh-Zahl und zeigen im Fall BNA10000, vergleichbar dem Luftfall BLU100, typischen Grenzschichtcharakter. In Gebieten in denen, verursacht durch den Mechanismus der Rayleigh-Taylor-Instabilität, kaltes, nach unten oder warmes, nach oben strömendes Fluid auf die Wände prallt, werden die thermischen Grenzschichten stark zusammengepreßt. Im Mittelpunkt dieser Aufprallzentren entstehen Staupunkte, Abbildung 4.24. Das Fluid wird abgebremst und der lokale Druck wird maximal. Ausgehend vom Mittelpunkt der Aufprallzentren wird das Fluid in die horizontalen Richtungen umverteilt. Dort kommt es zu einem intensiven Wärmeaustausch mit den Wänden. Besonders in den Fällen BNA10000 und BLU100, die sich durch ihren weitgehend isothermen Kernbereich auszeichnen, reicht der Temperaturüber- oder -unterschluß meistens aus, um Auf- oder Abtriebsfahnen zu bilden, die sich über die gesamte Kanalhöhe ausbreiten. Deutlich werden auch in diesen Abbildungen die mit zunehmender Rayleigh-Zahl kleineren Strukturen im Temperaturfeld, bei gleichzeitig immer größer werdenden zusammenhängenden Gebieten, die die starke räumliche Kopplung und die große makroskopische Wellenlänge bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium und Luft bewirken.

Die Vertikalschnitte mit Vektoren der momentanen Geschwindigkeit in Abbildung 4.24 stimmen bezüglich Ort und Zeitpunkt mit den in Abbildung 4.23 gezeigten Vertikalschnitten überein. In allen Fällen liegt ein der Luftsimulation ähnliches turbulentes Geschwindigkeitsfeld vor, in dem Wirbel unterschiedlicher Größenordnung existieren. Mit steigender Rayleigh-Zahl in den Natriumfällen sind es diese Strukturen, die aufgrund der durch sie hervorgerufenen intensiven Vermischungs- und Wärmetransportvorgänge für die Entstehung von im räumlichen und zeitlichen Mittel isothermen Kernbereichen verantwortlich sind. Die hohe Wärmeleitfähigkeit der Flüssigmetalle, die ein Ausbilden horizontaler Dichte- und Temperaturunterschiede aufgrund der schnellen thermischen Diffusion stark einschränkt, wirkt diesen Vermischungs- und Wärmetransportvorgängen entgegen.

#### **4.5.2 Strukturen in verschiedenen Schichten**

Die Vektoren der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten bei  $x_3=0.04$  zeigen mehrere Aufprallgebiete, in denen von oben herabströmendes kaltes Fluid auf die untere beheizte Platte trifft, Abbildung 4.25a. Im Mittelpunkt der Zellen bilden sich Staupunkte. Das kalte Fluid wird vom Zellmittelpunkt aus radial in die horizontalen Richtungen umverteilt. Gemäß Schmidt (1988), der bei der Grobstruktursimulation der atmosphärischen konvektiven Grenzschicht nahe der unteren instabilen Grenzschicht ähnliche Strukturen feststellt, grenzen benachbarte Absinkgebiete ihre Einflußbereiche entlang verzweigter Linien ab, die als Sekanten sich überlagernder Kreise interpretiert werden können, Abbildung 4.26. Das müssen nicht

unbedingt drei, sondern können auch vier oder mehr benachbarte Absinkgebiete sein, Abbildung 4.25a. Entlang der schematisch dargestellten Sekanten bilden sich schmale Streifen, in denen Temperaturabweichungen und Vertikalgeschwindigkeiten positiv sind. Mehrere Speichen organisieren sich in ihren Schnittpunkten zu Knoten, in denen Temperaturabweichungen und Vertikalgeschwindigkeiten ebenfalls positiv sind. Speichen und Knoten sind in der unteren Grenzschicht typische, durch die Rayleigh-Taylor-Instabilität verursachte Ablösestrukturen, in denen warmes Fluid nach oben strömt. Die Speichen- und Knotenstrukturen treten nur im Bereich der instabilen Grenzschichten an der oberen und unteren Wand auf, nicht jedoch nahe der Kanalmittelebene. Dort treffen von unten heraufströmendes warmes und von oben herabfallendes kaltes Fluid aufeinander, es kommt zu starken Verwirbelungen und damit zum Aufreißen der Konvektionsstrukturen.

Konvektionsmuster dieser Art wurden bereits mehrfach durch experimentelle Untersuchungen und direkte numerische Simulationen nachgewiesen. Bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft werden sie von Grötzbach (1989), Moeng & Rotunno (1990) und Christie & Domaradzki (1993), bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium und niedrigen Rayleigh-Zahlen von Wörner (1994) gefunden. Für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium bei höheren Rayleigh-Zahlen werden dagegen hier erstmals ausgeprägte Speichen- und Knotenstrukturen vorhergesagt. Experimentell nachgewiesen werden sie von Kawara et al. (1990) für Wasser und Silikonöl bei hohen Rayleigh-Zahlen. Auch Jahn (1975) findet bei der experimentellen Untersuchung einer Fluidschicht mit interner Wärmequelle im Bereich der oberen instabilen Grenzschicht Strukturen, die von Grötzbach (1987) mit einer direkten numerischen Simulation für denselben Anwendungsfall ebenfalls gefunden werden.

Das Ergebnis einer zeitlichen Analyse der Konvektionsstrukturen, ist ihre nahezu unveränderte räumliche Position über einen Zeitraum von 200 dimensionslosen Zeiteinheiten. Die aus Abbildung 4.25a bei  $x_3=0.04$  ablesbare makroskopische Wellenlänge beträgt etwa  $\lambda=3.3$  und stimmt sehr gut mit der in Tabelle 4.6 genannten, mittels der räumlichen Zweipunktkorrelationen  $R_{TT}$  und  $R_{ii}$  bestimmten makroskopischen Wellenlänge  $\lambda=3.2-3.4$  überein. Auffällig ist außerdem, daß die an der oberen Wand entstehenden Strukturen jeweils um eine halbe makroskopische Wellenlänge in beiden horizontalen Raumrichtungen gegenüber denen der unteren Wand versetzt sind. Dies liegt daran, daß die an der unteren Wand liegenden Knoten, d.h. also Orte maximaler positiver Vertikalkomponente, die Zellmittelpunkte der oberen Wand festlegen.

Die Vertikalgeschwindigkeitskomponente bei  $x_3=0.04$  ist innerhalb der Zellstrukturen, angezeigt durch die gestrichelten Isolinien, negativ, Abbildung 4.25b. Orte maximaler positiver Vertikalgeschwindigkeit, gekennzeichnet durch die eng zusammenliegenden durchgezogenen Isolinien, liegen innerhalb der Speichen und Knotenstrukturen. In der Darstellung der Temperaturfluktuationen zeigen die gestrichelten Linien die Orte im Kanal, an denen die Temperatur geringere Werte als die mittlere Temperatur der dargestellten Ebene, d.h. negative Temperaturfluktuationen aufweist, Abbildung 4.25c. Innerhalb der Zellen an der unteren Wand sind die Temperaturfluktuationen negativ und deuten damit auf das kalte, von oben herabströmende Fluid hin. Mit der horizontalen Umverteilung erfolgt ein intensiver Wärmeübertrag an das Fluid. Das wird anhand der eng zusammenliegenden Isolinien der Temperaturfluktuationen

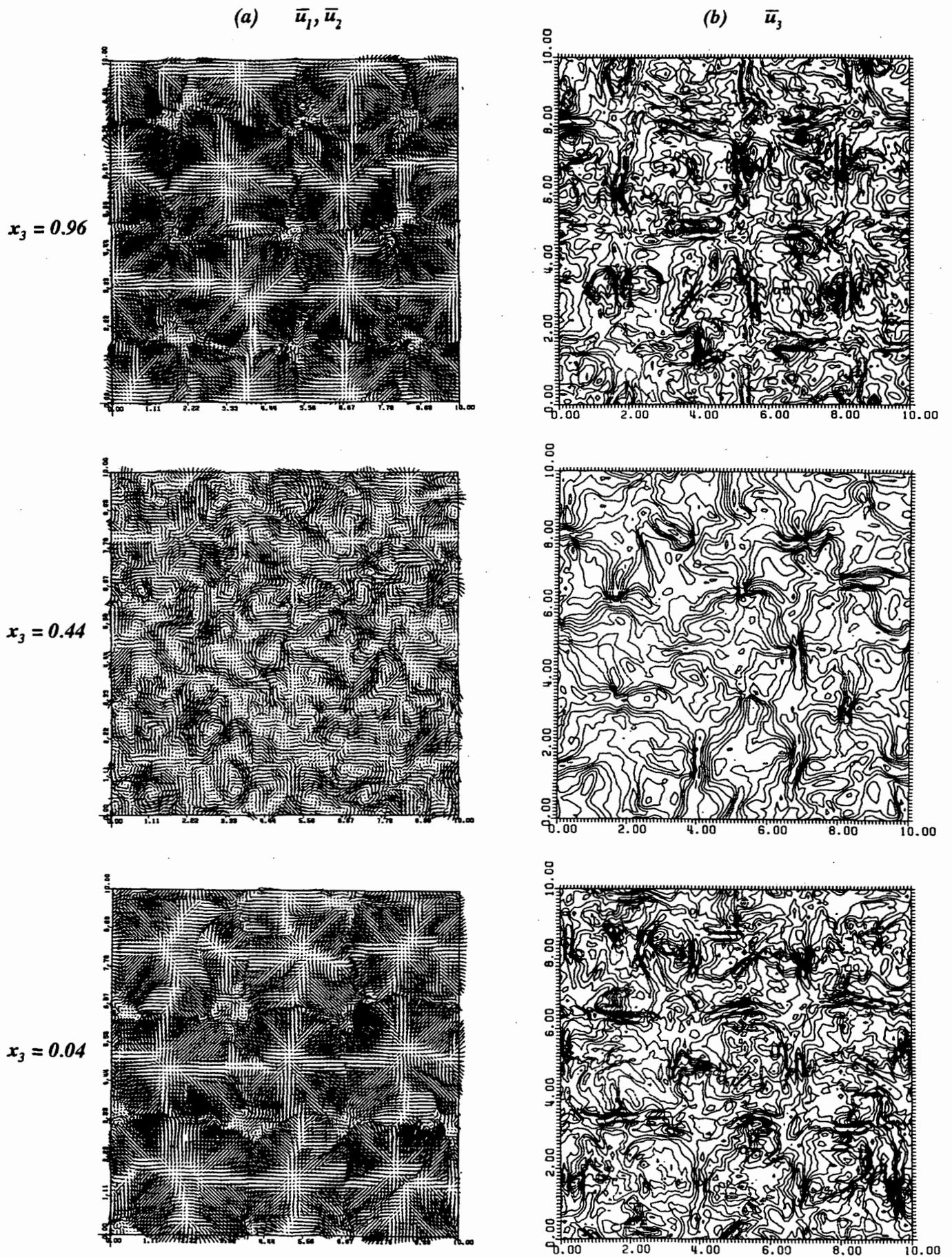


Abb. 4.25: Isolinen verschiedener physikalischer Variablen für Natrium im Fall BNA250 bei  $Ra=2.5 \cdot 10^5$ ,  $t=523.1$  in den drei Schnittebenen  $x_3=0.04$ ,  $x_3=0.44$  und  $x_3=0.96$ . (a)  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ ; (b)  $\bar{u}_3$ .

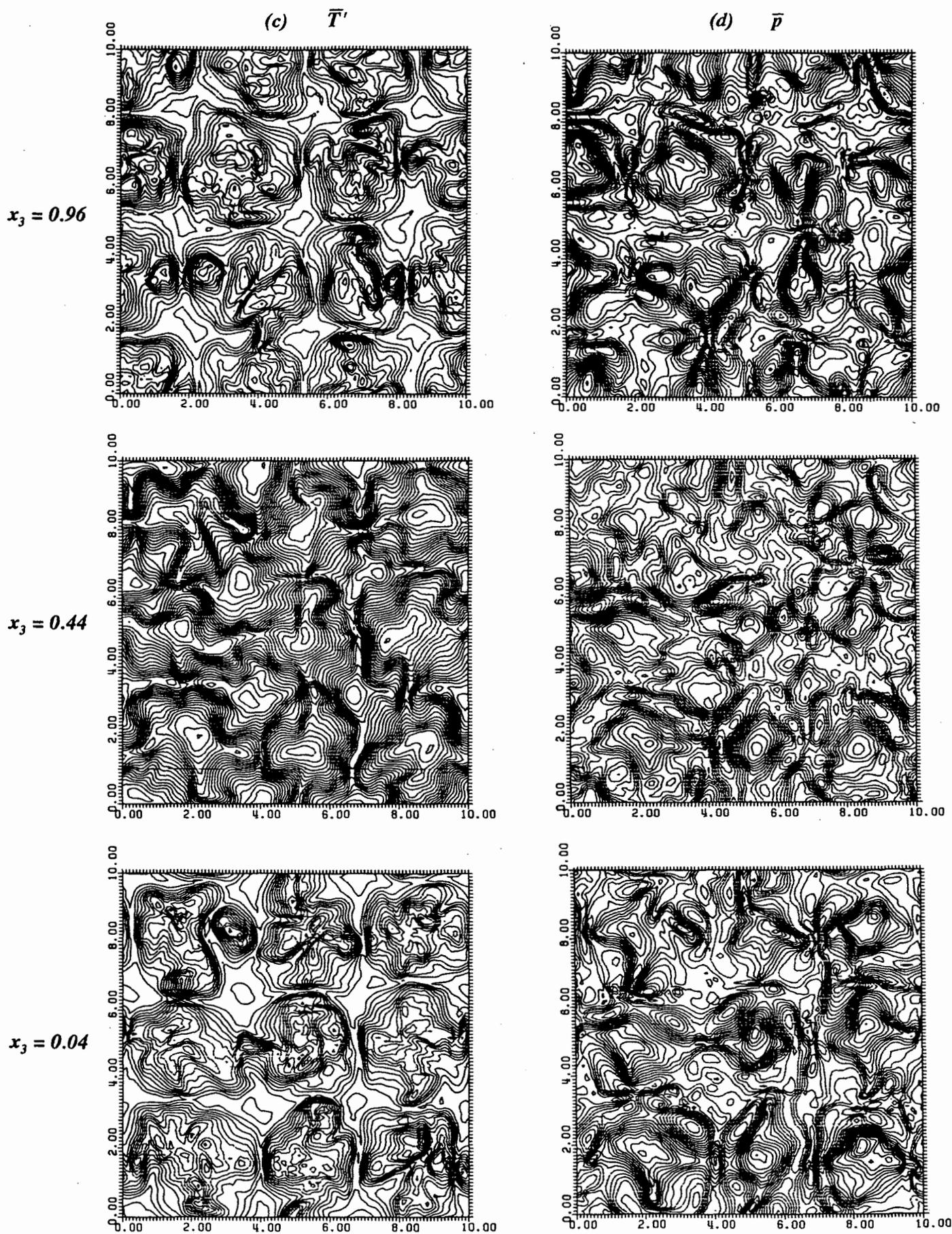


Abb. 4.25: Isolinien verschiedener physikalischer Variablen für Natrium im Fall BNA250 bei  $Ra=2.5 \cdot 10^5$ ,  $t=523.1$  in den drei Schnittebenen  $x_3=0.04$ ,  $x_3=0.44$  und  $x_3=0.96$ . (c)  $\bar{T}$ , Inkrement: 0.02; (d)  $\bar{p}$ , Inkrement: 0.04.

nen sichtbar. Orte maximaler Temperatur sind an der unteren Wand die Knoten. An der oberen Wand sind diese Verhältnisse genau entgegengesetzt. Weiteren Aufschluß bezüglich des Strömungsverhaltens gibt die Druckverteilung, Abbildung 4.25d. Negative Druckwerte, die in der Höhenliniendarstellung gestrichelt aufgetragen sind, existieren, weil es sich nicht um die Absolutdruckwerte handelt. Aufgrund der in TURBIT verwendeten Lösungsmethode ist das Druckfeld bis auf eine frei gewählte additive Konstante lösbar, die die negativen Werte verursacht. Orte maximalen Druckes sind an der unteren Wand aufgrund der Staupunktströmungen die Zellkerne. Die steilsten Druckgradienten treten an den Zellrändern auf, weil dort die Horizontalgeschwindigkeitskomponenten ihre größten Werte aufweisen. Innerhalb der Ablösestrukturen, d.h. der Speichen und der Knoten, steigen die Druckwerte aufgrund der stark reduzierten Horizontalgeschwindigkeitskomponenten wieder an. In der Kanalmittelebene sind die den Knoten der Wandbereiche entsprechenden Zentren der Auf- und Abströmgebiete Orte maximalen Druckes, der nach außen hin abnimmt und an den Rändern Minimalwerte erreicht. Dort findet aufgrund intensiver Vermischungsvorgänge ein großer Impuls- und Wärmeaustausch zwischen einzelnen Auf- und Abwindfahnen statt. Die Temperatur- und Vertikalgeschwindigkeitsgradienten sind an diesen Stellen maximal.

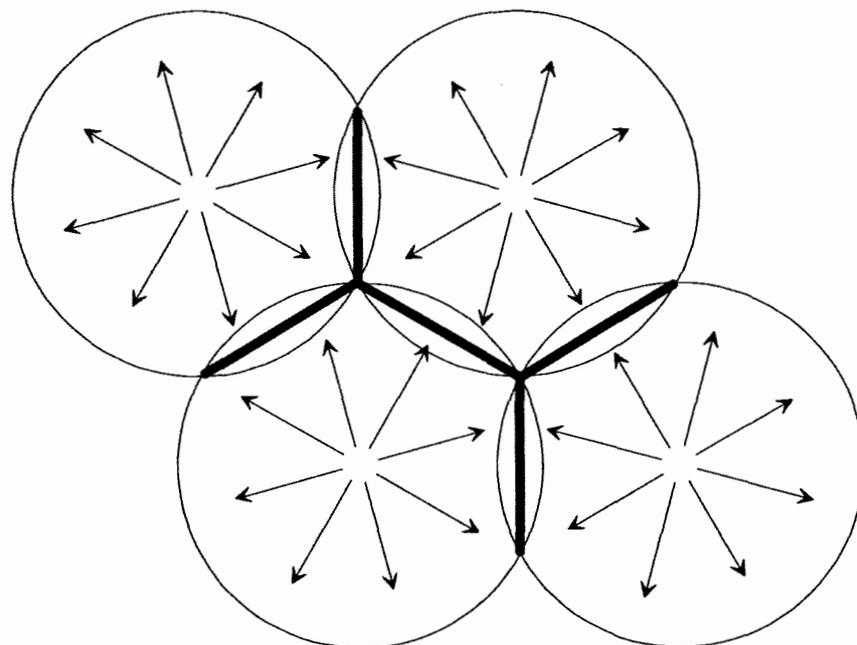


Abb. 4.26: Speichen und Knoten zwischen Zellen in den wandnahen Bereichen, in denen das Fluid absinkt (nach Schmidt (1988)).

Die hier diskutierten Ergebnisse für die räumlichen Verteilungen von Geschwindigkeit, Temperatur und Druck verdeutlichen einen großen Vorteil der Methode der numerischen Simulation. Die Auswertung einer Vielzahl physikalischer Variablen, die im Prinzip zu jedem Zeitpunkt und für jeden Ortspunkt des Maschennetzes zur Verfügung stehen, ermöglichen einen detaillierten Einblick in die dreidimensionale Turbulenzstruktur des Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes.

## 4.6 Analysen für statistische Turbulenzmodelle

Die meisten Strömungen von praktischem Interesse zeichnen sich neben ihrem hochturbulenten Charakter oftmals durch sehr komplizierte Geometrien aus. Für die numerische Berechnung solcher Strömungen kommen aus heutiger Sicht ausschließlich Näherungsmethoden in Frage, die auf einer statistischen Beschreibung der Turbulenz beruhen und deshalb als statistische Turbulenzmodelle bezeichnet werden. Diese Vorgehensweise ist vom ingenieurtechnischen Standpunkt aus betrachtet in den meisten Fällen ausreichend, weil bei den praktischen Anwendungen weniger die Details der turbulenten Bewegung als vielmehr die zeitlichen Mittelwerte der physikalisch abhängigen Größen von Interesse sind.

In den nächsten Abschnitten dieses Kapitels wird zunächst ein kurzer Einblick in die Grundlagen und die Methodik der statistischen Modellierung turbulenter Strömungen gegeben. Eine übersichtliche und ausführliche Darstellung darüber ist bei Rodi (1984) zu finden. Darauf folgend werden die Natrium- und Luftdaten der in Tabelle 4.2 aufgezählten direkten numerischen Simulationen dazu verwendet, Terme der exakten Transportgleichung der Dissipationsrate auszuwerten, sie zu bilanzieren und im Anschluß daran einige gebräuchliche Modellierungsansätze einzelner Terme dieser Gleichung zu diskutieren. Die dafür notwendigen neuen Analysemodule in TURBIT [Seiter (1993)] sind unter Mitwirkung von Hiltner (1993) entstanden. In einem weiteren Abschnitt werden die Natrium- und Luftdaten der in Tabelle 4.1 aufgezählten gemischten Simulationen und Grobstruktursimulationen für eine analoge Auswertung der Transportgleichung der Temperaturschwankungen herangezogen. Das Ziel ist, mögliche Einflüsse der Rayleigh- und der Prandtl-Zahl zu erkennen und zu diskutieren, Schließungshypothesen zu analysieren und Modellkoeffizienten zu ermitteln. Die Vorgehensweise dabei ist, Terme der exakten Transportgleichungen zu berechnen, um damit Aussagen über die turbulenten Transportmechanismen der jeweils betrachteten Größen machen zu können. Von besonderem Interesse sind dabei die experimentell nur sehr schwer oder überhaupt nicht meßbaren Dissipationsterme und Korrelationsterme, die Druckfluktuationen beinhalten. Sie werden bei Experimenten oft aus den Bilanzgleichungen der meßbaren Korrelationen berechnet und verhindern damit eine realistische Überprüfung der gemessenen Daten. Diese Problematik wird ausführlich von George & Taulbee (1992) diskutiert. Die Terme der exakten Transportgleichungen werden sodann den Termen der modellierten Transportgleichungen gegenübergestellt. Durch die Analyse einzelner Koeffizienten in den Modelltermen wird untersucht, ob diese den erwarteten konstanten Verlauf haben, d.h. ortsunabhängig sind, und ob sie für den betrachteten Strömungstyp und das betrachtete Fluid die richtige Größenordnung besitzen.

### 4.6.1 Einführung in die statistische Beschreibung turbulenter Strömungen

Anders als bei der in Kapitel 3.1 diskutierten Methode der Grobstruktursimulation, erfolgt bei der statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen zunächst eine Aufspaltung aller abhängigen Variablen in einen zeitlichen Mittelwert und eine Fluktuation um diesen Mittelwert:

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \Phi'' \quad (4.15)$$

Die Trennung der zeitlich gemittelten Größe von der Fluktuationsgröße erfolgt über eine zeitliche Filterung aller abhängigen Variablen mit dem Operator:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \Phi(t) dt \quad (4.16)$$

Die Einführung der Beziehung (4.15) in die exakten Grundgleichungen (2.2a-c) sowie nachfolgende Anwendung des Operators (4.16) führt zu den zeitgemittelten Gleichungen, die auch als Reynoldssche Gleichungen [Reynolds (1894)] bezeichnet werden. Diese unterscheiden sich in ihrer äußeren Form nicht von den in Kapitel 2.3 abgeleiteten räumlich gemittelten Gleichungen (2.11a-c) und Beziehungen (2.12a,b), wenn  $\bar{\quad}$  durch die Kennzeichnung  $\langle \quad \rangle$  und  $'$  durch die Kennzeichnung  $''$  ersetzt wird, haben jedoch eine andere physikalische Bedeutung. Während bei der Methode der Grobstruktursimulation eine räumliche Filterung über einen begrenzten Wellenzahlbereich erfolgt, wird bei der Methode der statistischen Simulation eine zeitliche Filterung über den gesamten Frequenzbereich der Turbulenz durchgeführt.

Die dabei in den zeitgemittelten Impulsgleichungen und der zeitgemittelten Energiegleichung auftretenden Korrelationen von Fluktuationsgrößen  $\langle u_i'' u_j'' \rangle$  und  $\langle T'' u_j'' \rangle$  zwischen verschiedenen Schwankungsgrößen stellen den zusätzlichen Impuls- und Wärmetransport aufgrund der turbulenten Fluktuationsbewegung dar. Bei ihnen handelt es sich um zentrale Momente zweiter Ordnung, die auch als Reynoldssche Spannungen und Reynoldssche Wärmeströme bezeichnet werden. Da sie unbekannt sind, stellen die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie kein geschlossenes Gleichungssystem mehr dar. Statistische Turbulenzmodelle haben die Aufgabe, die Bestimmung der Reynoldsschen Spannungen und Wärmeströme und damit die Schließung des Gleichungssystems zur Berechnung turbulenter Strömungen zu ermöglichen. Ihre Modellierung ist schwieriger als die Modellierung der Feinstruktur bei Grobstruktursimulationen, weil der zusätzliche Impuls- und Wärmetransport, der durch alle Wirbelgrößen verursacht wird, berücksichtigt werden muß. Bei der Modellierung der Feinstruktur führt die Lokalisotropie der kleinen Wirbel im Bereich des Kolmogorov-Spektrums zu einer erheblichen Vereinfachung der statistischen Eigenschaften.

Das am weitesten verbreitete statistische Turbulenzmodell, das k-ε-Modell [Launder (1975), Rodi (1984)], verwendet zur Bestimmung der Reynoldsschen Spannungen und Wärmeströme das Prinzip der Wirbeldiffusivität. Es beruht auf der Annahme, daß sich der Transport durch Turbulenz als Diffusionsprozeß beschreiben läßt und in turbulenten Strömungen die zeitlichen Fluktuationskorrelationen proportional den Gradienten der zeitgemittelten Strömungsgrößen gesetzt werden können:

$$\langle \tau_{ij} \rangle = - \langle u_i'' u_j'' \rangle = \nu_t \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (4.17a)$$

$$- \langle q_j \rangle = - \langle T'' u_j'' \rangle = a_t \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \quad (4.17b)$$

Im Gegensatz zu den molekularen diffusiven Austauschgrößen für Impuls und Wärme,  $\hat{v}$  und  $\hat{a}$ , sind die turbulenten Austauschkoefizienten  $\nu_t$  und  $a_t$  keine Stoffgrößen, sondern vom Zustand der Turbulenz und somit von Ort und Zeit abhängig. Eine geeignete Modellierung dieser Wirbeldiffusivitäten muß, um die Allgemeingültigkeit des Modells für verschiedene Strömungstypen zu gewährleisten, den Transport von Turbulenzgrößen berücksichtigen.

Im k- $\epsilon$ -Modell wird die turbulente Austauschgröße  $\nu_t$  proportional einem charakteristischen Längenmaß L und einem charakteristischen Geschwindigkeitsmaß U gesetzt:

$$\nu_t \sim LU \quad (4.18)$$

Als charakteristischer Geschwindigkeitsmaßstab wird die Wurzel der turbulenten kinetischen Energie k gewählt:

$$U \sim k^{1/2} \quad (4.19)$$

Der charakteristische Längenmaßstab L setzt sich aus einer Kombination von turbulenter kinetischer Energie k und deren Dissipationsrate  $\epsilon$  zusammen:

$$L \sim \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad (4.20)$$

Werden die beiden Beziehungen (4.19) und (4.20) in den Zusammenhang (4.18) eingesetzt, dann folgt für den Ansatz zur Berechnung der turbulenten Wirbelviskosität im k- $\epsilon$ -Modell:

$$\nu_t \sim \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4.21)$$

Für beide in Ansatz (4.21) auftretenden charakteristischen Turbulenzmaßstäbe werden Transportgleichungen gelöst und damit die Berechnung auch komplexerer Strömungen, in denen eine Verteilung von L nicht empirisch gefunden werden kann, ermöglicht.

Die Wirbelkonduktivität  $a_t$  wird in k- $\epsilon$ -Modellen gewöhnlich über das Konzept der aus Experimenten ermittelten turbulenten Prandtl-Zahl  $Pr_t$  berechnet:

$$a_t = \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (4.22)$$

Diesem Konzept liegt die Annahme zugrunde, daß die Impulstransportmechanismen durch die turbulenten Schwankungsbewegungen im Strömungsfeld und die Wärmetransportmechanismen durch die turbulenten Schwankungsgrößen im Strömungsfeld und im Temperaturfeld ähnlich sind. Diese Annahme ist vor allem bei der Naturkonvektion in Flüssigmetallen fraglich. Dort verläuft die Entwicklung der turbulenten Eigenschaften im Geschwindigkeits- und im Temperaturfeld, verursacht durch die hohe thermische Diffusivität der Flüssigmetalle, mit unterschiedlichen Zeitmaßstäben.

Ohne das Wirbeldiffusivitätsprinzip (4.17a,b) kommen Reynoldssche Spannungsmodelle aus [Rodi (1984)]. Sie verwenden Transportgleichungen für die Momente zweiter Ordnung  $\langle u_i'' u_j'' \rangle$  und  $\langle T'' u_j'' \rangle$  um das Schließungsproblem zu lösen und sind in der Lage, im Gegensatz zum isotropen k- $\epsilon$ -Modell, Anisotropien in der Strömung zu berücksichtigen. Auch hier liegt das Problem bei den Schließungsannahmen sowie den Koeffizienten für die unbekannt Korrelationen höherer Ordnung, auf deren Modellierung es hinsichtlich der Genauigkeit des Verfahrens ankommt. Dazu kommt der, aufgrund der zusätzlichen Lösung weiterer Differentialgleichungen entstehende, hohe numerische Aufwand dieser Methode.

Dieser Aufwand ist deutlich verringert in algebraischen Spannungs-/Fluß-Modellen [Hossain (1980)]. Bei diesen werden aus den Transportgleichungen der Reynoldsschen Spannungen und Wärmeströme durch Vernachlässigung der lokalen Zeitableitungsterme und weiteren Vereinfachungen algebraische Beziehungen für die gesuchten unbekannt Korrelationen abgeleitet. Die Modelle behalten dabei die Fähigkeit, Anisotropien zu berücksichtigen.

## 4.6.2 Transportgleichung für die Dissipationsrate

### 4.6.2.1 Analyse der exakten Gleichung

Im Haushalt der mechanischen Energie turbulenter Strömungen spielt die Dissipation  $\epsilon$  eine bedeutende Rolle, während die Eigenerwärmung der Fluide häufig von untergeordneter Bedeutung für den Gesamtvorgang ist. Aus diesem Grund ist der Dissipationsterm in der Gleichung der turbulenten kinetischen Energie ein wichtiger Senkenterm, während er in der Wärmetransportgleichung (2.2c) meist vernachlässigt wird.

Die Dissipation in der turbulenten kinetischen Energiegleichung hat in konservativer Schreibweise mit der in TURBIT verwendeten Normierung folgende Form:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right\rangle \right) \quad (4.23)$$

Während die Geschwindigkeitsschwankungen normalerweise klein gegenüber der mittleren Geschwindigkeit sind, gilt für die Gradienten der Geschwindigkeitsschwankungen genau das Umgekehrte. Diese Erscheinung macht die für alle turbulenten Strömungen hohe Wirbelintensität aus.

Im Falle homogener Turbulenz, in der alle statistischen Größen und Verteilungen vom Ortsvektor  $x_i$  unabhängig sind, verschwindet der zweite Summand in Gleichung (4.23) und für die Dissipation gilt:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle \quad (4.24)$$

Die Annahme homogener Turbulenz ist dann erfüllt, wenn bei den hier untersuchten Strömungen die Grashof-Zahl groß ist. Bei hohen Grashof-Zahlen verhalten sich die für die Dissipation bedeutenden, kleinskaligen Turbulenzelemente lokalisotrop, d.h. invariant gegen Translationen und Rotationen des vorgegebenen Koordinatensystems (siehe Kapitel 3.1.2.1). Auch im Falle eines inkompressiblen Fluids muß der zweite Summand in Gleichung (4.23) nicht berücksichtigt werden und es gilt (4.24). Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (2.2a) ist die Summe des in der Gleichung der turbulenten kinetischen Energie in konservativer Schreibweise auftretenden zusätzlichen molekularen Diffusionsterms und des zweiten Terms in Gleichung (4.23) bei einem inkompressiblen Medium identisch Null:

$$\frac{1}{\sqrt{Gr}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle u_i'' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right\rangle \right) = 0 \quad (4.25)$$

Eine exakte Transportgleichung für die Dissipation bei homogener Turbulenz gemäß Gleichung (4.24) kann wie folgt abgeleitet werden. Zunächst werden die für die zeitlich gemittelten Größen geltenden Reynoldsschen Gleichungen von den für die momentanen Größen geltenden Navier-Stokes-Gleichungen subtrahiert, um so eine Differentialgleichung für die Fluktuationsgrößen zu erhalten. Diese wird nach  $x_j$  abgeleitet und mit  $(2/\sqrt{Gr}) \partial u_i''/\partial x_j$  multipliziert. Nach einer zeitlichen Mittelung sowie dem Zusammenfassen und Umformen einiger Terme folgt als Ergebnis die skalare Dissipationsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} &= - \frac{\partial (\epsilon \langle u_i \rangle)}{\partial x_i} \\ \text{Änderungsrate} & \quad \text{konvektiver Transport} = K_\epsilon \\ & - \frac{2}{\sqrt{Gr}} \left\{ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} \left( \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_j''}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \right\rangle \right) + \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_i} \left\langle u_i'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle \right\} \\ & \quad \text{Produktion durch das mittlere Geschwindigkeitsfeld} = P_{\epsilon H} \\ & - \frac{2 \delta_{i3}}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial T''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle \\ & \quad \text{Produktion/Vernichtung durch Auftrieb} = P_{\epsilon A} \\ & - \frac{2}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle \quad (4.26) \\ & \quad \text{Produktion durch Wirbelfadenstrecken} = P_{\epsilon W} \\ & - \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} u_i'' \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial p''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle \right\} \\ & \quad \text{turbulenter diffusiver Transport} = D_{\epsilon 1} + D_{\epsilon 2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + \frac{2}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right) \right\rangle \right\}$$

*molekularer diffusiver Transport =  $D_{\epsilon m}$*

$$- \frac{2}{Gr} \left\{ \left\langle \left( \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle \right\}$$

*molekulare Vernichtung =  $V_\epsilon$*

Die Gleichung ist in konservativer Form mit der in TURBIT verwendeten Normierung abgeleitet. Sie enthält komplizierte Korrelationen verschiedener Fluktuationsgrößen, die einer experimentellen Messung zum großen Teil nicht zugänglich sind. Die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme ist angegeben. Sie repräsentieren die Änderungsrate, den Transport, die Produktion und die Vernichtung der Dissipation.

Werden jeweils die zweiten Summanden im molekularen Diffusions- und Vernichtungsterm addiert, so ist deren Summe unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (2.2a) für inkompressible Fluide identisch Null. Bei Rayleigh-Bénard-Konvektion in einem unendlich ausgedehnten Kanal ist die Strömung in den horizontalen Richtungen homogen, ausreichend große Mittelungszeiträume vorausgesetzt. Aus diesem Grund sind die Gradienten der Zeitmittelwerte nur in vertikaler Richtung ungleich Null. Im zeitlichen Mittel verschwinden zudem alle mittleren Geschwindigkeiten, d.h. es gilt  $\langle u_i \rangle = 0$ . Folglich tritt in der Bilanz (4.26) kein konvektiver Transport  $K_\epsilon$  und keine Produktion durch das mittlere Geschwindigkeitsfeld  $P_{\epsilon H}$  auf. Wird von einer eingelaufenen, im statistischen Sinne stationären Strömung ausgegangen, verschwindet auch die zeitliche Änderungsrate. Für Gleichung (4.26) folgt damit:

$$0 = -P_{\epsilon A} - P_{\epsilon W} - D_{\epsilon 1} - D_{\epsilon 2} + D_{\epsilon m} - V_\epsilon \quad (4.27)$$

Unter der Voraussetzung lokalisotroper Turbulenz, d.h. bei hohen Grashof-Zahlen, und ohne die Beeinflussung fester Wände, können noch weitere Voraussagen bezüglich einer Vereinfachung von Gleichung (4.26) gemacht werden. Der Produktions-/Vernichtungsterm durch Auftrieb sowie der turbulente diffusive Transportterm durch Druckschwankungen verschwinden bei isotroper Turbulenz im zeitlichen Mittel, weil Korrelationstensoren erster Ordnung im statistischen Sinne invariant gegenüber Translationen und Rotationen des vorgegebenen Koordinatensystems sind [Rotta (1972)]. Das gilt nicht bei kleinen Grashof-Zahlen oder in der Nähe fester Wände.

Bei der Auswertung statistischer Daten zur Analyse der Dissipationsgleichung wirken sich auftretende Ungenauigkeiten stärker aus als bei der Analyse anderer Transportgleichungen turbulenter Strömungsgrößen, wie z.B. der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie, des turbulenten Wärmestromes oder der Temperaturschwankungen, weil sie zum Teil Mehrfachkorrelationen zwischen einfachen und höheren Ableitungen der hochfrequenten turbulenten Fluktuationsgrößen enthält. Aus diesem Grund ist die Auswertung der Dissipationsgleichung nur mit Daten aus direkten numerischen Simulationen sinnvoll. Mögliche Ursa-

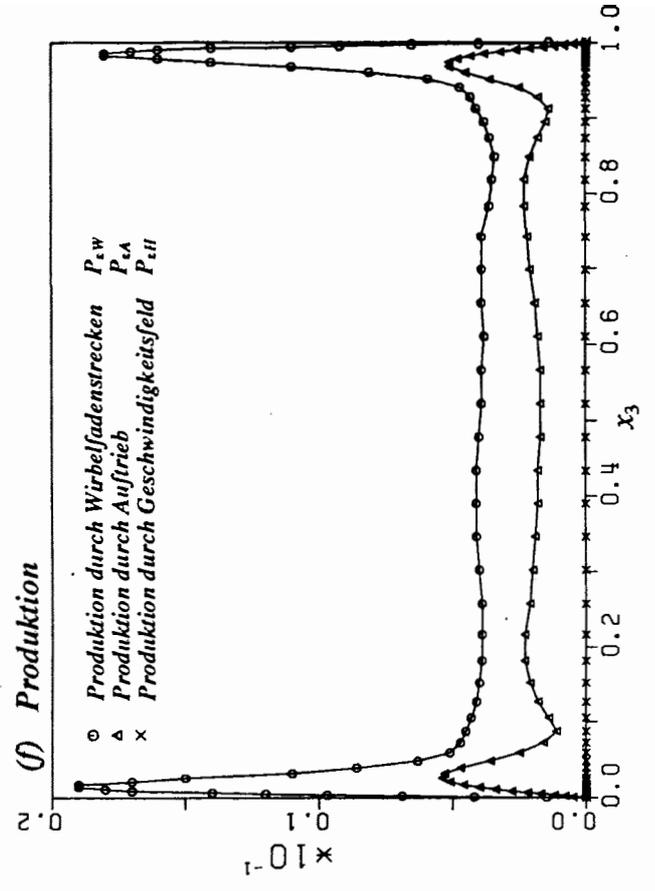
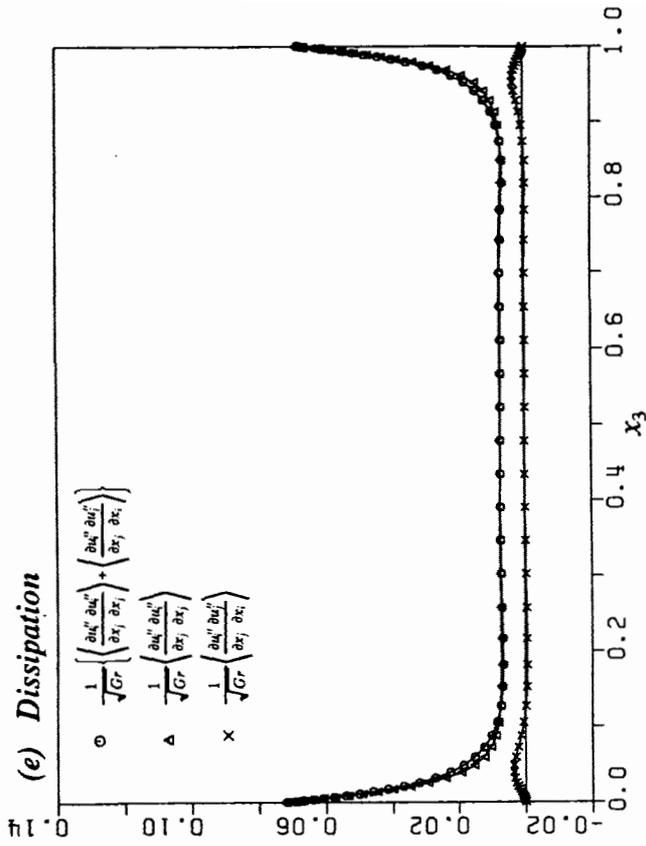
chen sind dabei hauptsächlich numerische Ungenauigkeiten, hervorgerufen durch die zu grobe Auflösung der turbulenten Felder. Das gilt vor allem in den Wandbereichen, aufgrund der dort starken nichtlinearen Änderungen. Aber auch statistische Ungenauigkeiten, hervorgerufen durch zu wenige Mittelungszeitpunkte, können die Ursache für Abweichungen sein. Indirekt können diese Ungenauigkeiten, sofern sie auftreten, an dem Ungleichgewicht der Gesamtbilanz des Transportes der Dissipation, eine im statistischen Sinne stationäre Strömung vorausgesetzt, abgelesen werden.

Die Abbildungen 4.27a-h zeigen die vertikalen Profile der Dissipation gemäß Gleichung (4.23) und von Termen ihrer Transportgleichung gemäß den Gleichungen (4.24, 4.26) für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium im Fall BNA3 im Vergleich zu Luft im Fall BLU3D. Grundsätzlich ist in allen Abbildungen auffallend, daß der absolute Betrag der einzelnen Terme, trotz ähnlicher Grashof-Zahlen, im Natriumfall um ungefähr eine Größenordnung geringer ist als im Luftfall. Das deutet darauf hin, daß im Fall BNA3 die Wirbelintensität sehr viel schwächer ist als im Fall BLU3D. Dieser Unterschied verschwindet jedoch mit zunehmender Grashof-Zahl. Das zeigt ein Vergleich der hier nicht dargestellten Simulationsergebnisse der Fälle BNA6 und BLU6 mit ebenfalls ähnlichen jedoch um den Faktor zwei größeren Grashof-Zahlen gegenüber den Fällen BNA3 und BLU3D. Dort haben die Beträge der Dissipation und der Terme ihrer Transportgleichung in Kanalmitte ungefähr dieselbe Größenordnung. Das deutet auf eine vergleichbare Wirbelintensität hin.

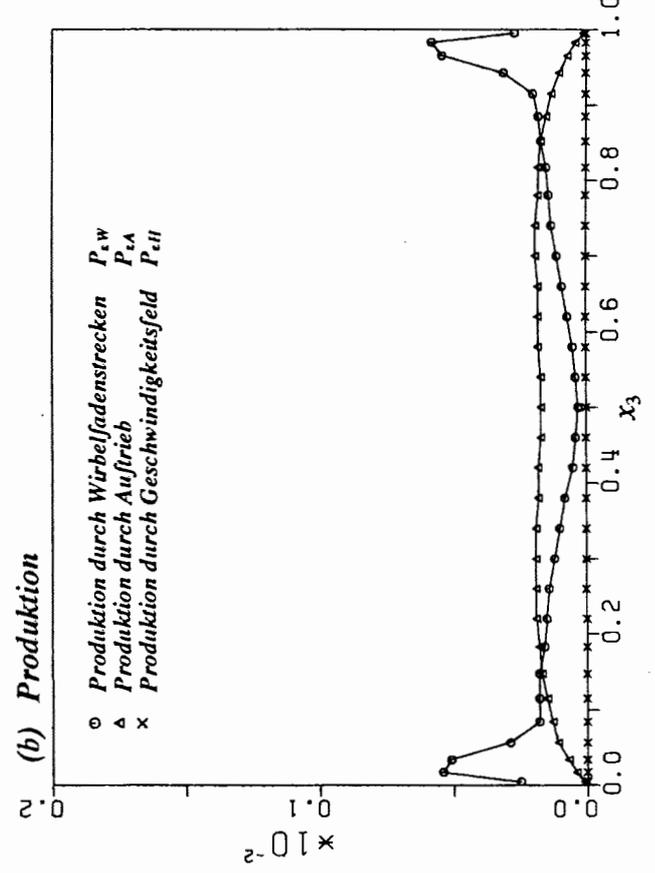
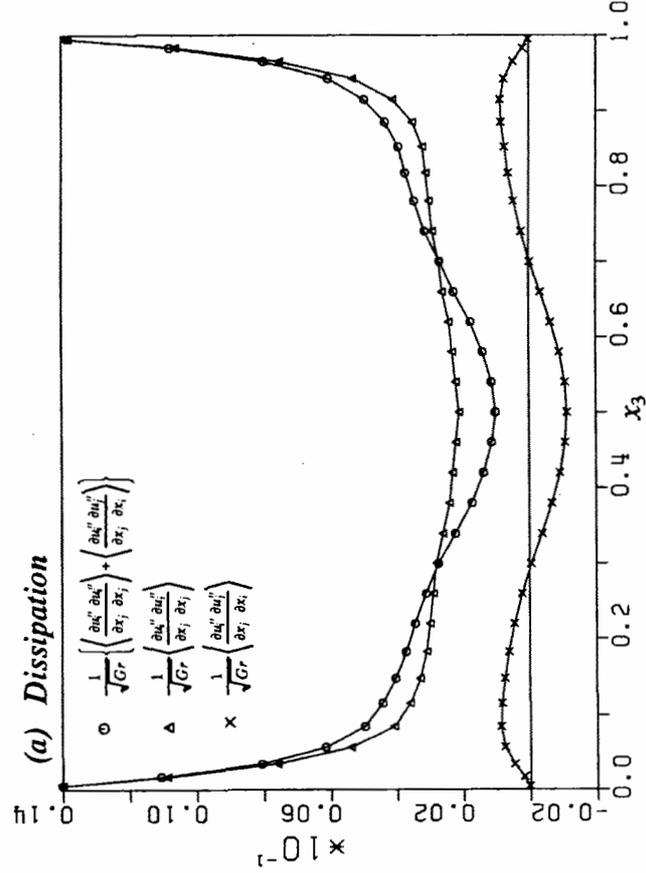
Die Abbildungen 4.27a,e verdeutlichen die starke Anisotropie des Natriumfalls BNA3 im gesamten Kanal, wogegen sie im Luftfall BLU3D scheinbar nur im Grenzschichtbereich auftritt. Nur dort ist der Term mit den gemischten Produkten der Ableitungen der Geschwindigkeitsschwankungen ungleich Null. Trotzdem ist in beiden Fällen der Produktions-/Vernichtungsterm durch Auftrieb noch ein wesentlicher Quellterm, der im isotropen Fall als Korrelationstensor erster Ordnung keinen Beitrag leisten sollte, hier jedoch gegenüber dem Produktionsterm durch gegenseitiges Wirbelfadenstrecken nicht vernachlässigbar ist, Abbildungen 4.27b,f. Der Produktionsterm durch das mittlere Geschwindigkeitsfeld ist in beiden Fällen aufgrund der fehlenden mittleren Grundströmung identisch Null. Anhand der beiden Abbildungen wird der Einfluß der großen molekularen thermischen Diffusivität im Natriumfall deutlich, der zu sehr unterschiedlichen Dicken der hydrodynamischen und thermischen Grenzschicht führt. Das macht sich durch den ansteigenden Verlauf des Produktions-/Vernichtungsterms durch Auftrieb am Rande der Grenzschicht bemerkbar, der im Natriumfall bis zur Kanalmitte reicht, während er im Luftfall mit der hydrodynamischen Grenzschichtdicke vergleichbar ist. Aus diesem Grund haben die Verläufe der beiden Produktionsterme  $P_{\epsilon W}$  und  $P_{\epsilon A}$  im Luftfall ein qualitativ ähnliches Aussehen.

Ein Vergleich der Diffusionsterme zeigt den dominierenden Einfluß der molekularen diffusiven Transportterme im unmittelbaren Wandbereich, während sie in Kanalmitte von untergeordneter Bedeutung sind, Abbildungen 4.27c,g. Im Natriumfall BNA3 leisten die turbulenten diffusiven Transportterme einen wichtigen Beitrag in Kanalmitte, während sie im Luftfall BLU3D dort keinen Einfluß haben. Vor allem das Verschwinden der turbulenten diffusiven Transportterme durch Druckschwankungen läßt auf den isotropen Zustand der hochfrequenten Fluktuationen im Luftfall schließen. Im Wandbereich dagegen spielen die turbulenten dif-

BLU3D



BNA3



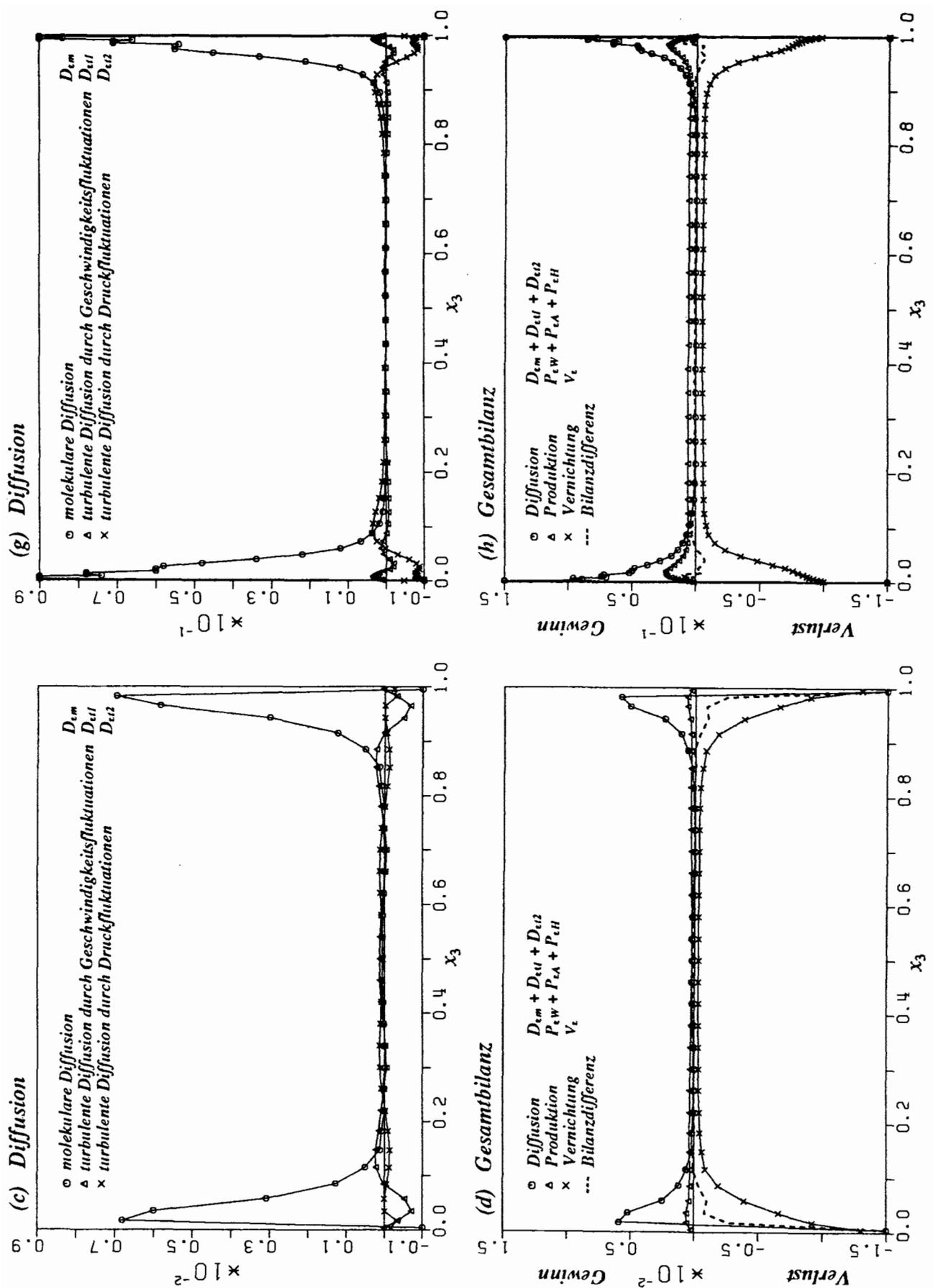


Abb. 4.27: Analyseergebnisse der Dissipation sowie von Termen ihrer Transportgleichung der Fälle BNA3 ( $Ra=3.0 \cdot 10^3$ ,  $Gr=5.5 \cdot 10^5$ ) (a-d) und BLU3D ( $Ra=3.8 \cdot 10^5$ ,  $Gr=5.3 \cdot 10^5$ ) (e-h). (a,e) Dissipation; (b,f) Produktion; (c,g) Diffusion; (d,h) Gesamtbilanz.

fusiven Transportterme beider Fälle eine wenn auch untergeordnete Rolle. Im Natriumfall überwiegt der turbulente diffusive Transport durch Geschwindigkeitsfluktuationen den durch Druckfluktuationen, während im Luftfall hier ein genau entgegengesetztes Verhalten zu verzeichnen ist. Im Vergleich zum Luftfall macht sich im Natriumfall der Einfluß der turbulenten diffusiven Transportterme in Kanalmitte in der Gesamtbilanz deutlich bemerkbar, Abbildungen 4.27d,h. Während im Luftfall BLU3D in Kanalmitte ein Gleichgewicht zwischen Produktion und molekularer Vernichtung besteht, bewirkt im Natriumfall BNA3 der als Quellterm auftretende turbulente diffusive Transport das Gleichgewicht in der Gesamtbilanz. An der Wand sind die Produktionsterme sowie die turbulenten diffusiven Transportterme gleich Null und es sollte ein Gleichgewicht zwischen molekularem diffusivem Transport und molekularer Vernichtung bestehen. Das große Ungleichgewicht in der Bilanz an dieser Stelle deutet auf eine für die detaillierte Auswertung der Dissipationsgleichung unzureichende Auflösung der unmittelbaren Wandbereiche hin. Die Bilanzdifferenz beider Fälle beträgt in Kanalmitte etwa 3%.

Die vertikalen Profile der Dissipation gemäß Gleichung (4.23) und von Termen ihrer Transportgleichung gemäß den Gleichungen (4.24, 4.26) sind für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium im Fall BNA24, bei einer um ungefähr eine Größenordnung höheren Grashof-Zahl als die der Fälle BNA3 und BLU3D, in den Abbildungen 4.28a-d dargestellt. Im Fall BNA24 ist die Strömung in Kanalmitte lokalisotrop, da der zweite Dissipationsanteil gemäß Gleichung (4.23) gegenüber dem ersten nahezu verschwindet, Abbildung 4.28a. Der Produktionsterm durch das mittlere Geschwindigkeitsfeld ist wie zuvor identisch Null, der Produktions-/Vernichtungsterm durch Auftrieb verschwindet als Korrelationstensor erster Ordnung im statistischen Mittel bei lokaler Isotropie und der Produktionsterm durch gegenseitiges Wirbelfadenstrecken wird zum entscheidenden Quellterm, Abbildung 4.28b. Der diffusive Transport weist keine wesentlichen Unterschiede gegenüber dem des zuvor diskutierten Luftfalles BLU3D auf, Abbildung 4.28c. Ähnlich diesem und im Gegensatz zum Natriumfall BNA3 hat der turbulente diffusive Transport in Kanalmitte keine Bedeutung mehr. Das spiegelt sich auch in der Gesamtbilanz wider, Abbildung 4.28d. In Kanalmitte besteht ein lokales Gleichgewicht zwischen der Produktion durch gegenseitiges Wirbelfadenstrecken und der molekularen Vernichtung. Im Wandbereich wird die Dissipation durch diffusiven Transport zur Wand umverteilt, wo sie durch molekulare Vernichtung kompensiert wird. Alle Abbildungen 4.28a-d verdeutlichen die unzureichende räumliche Auflösung für eine Analyse der Dissipation und ihrer Transportgleichung in unmittelbarer Wandnähe. In Kanalmitte beträgt die Bilanzdifferenz in etwa 3%.

Diese Unstimmigkeit der Bilanz in den wandnahen Maschen tritt bei allen in Tabelle 4.2 aufgezählten und analysierten Simulationen auf. Auch im Fall BLU3, obwohl dieser bezüglich einer detaillierteren Analyse der Wandbereiche in mehreren Schritten auf ein feineres Maschennetz interpoliert und jeweils in der Problemzeit weiterintegriert wurde. Das zeigt, daß es selbst mit der heute zur Verfügung stehenden Rechenleistung und Speicherkapazität schwierig ist, eine exakte Analyse der für die Dissipation wichtigen Grenzschichtbereiche auch bei relativ kleinen Grashof-Zahlen durchzuführen. Die Abweichung tritt auf, weil die unmittelbare Wandauflösung durch das Maschennetz offensichtlich nicht ausreichend ist. Bei der

BNA24

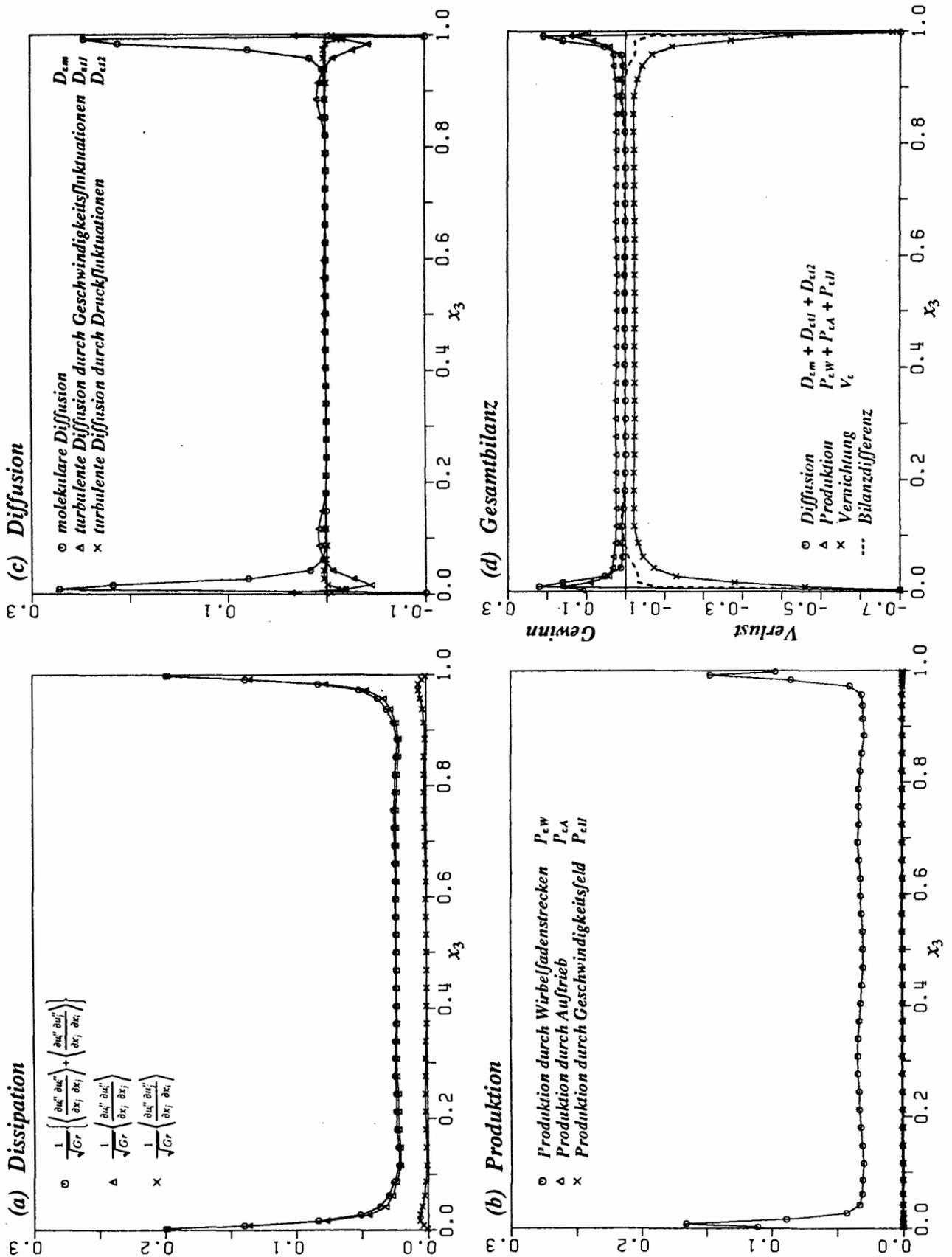


Abb. 4.28: Analyseergebnisse der Dissipation sowie von Termen ihrer Transportgleichung im Fall BNA24 ( $Ra=2.4 \cdot 10^4$ ,  $Gr=4.0 \cdot 10^6$ ). (a) Dissipation; (b) Produktion; (c) Diffusion; (d) Gesamtbilanz.

Herleitung der Dissipationsgleichung entstehen der molekulare diffusive Transportterm und der molekulare Vernichtungsterm durch folgende Aufspaltung:

$$\frac{2}{Gr} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial^3 u_i''}{\partial x_l \partial x_l \partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_l \partial x_l} - \frac{2}{Gr} \left\langle \left( \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_l \partial x_l} \right)^2 \right\rangle \quad (4.28)$$

$D_{em} \qquad V_\epsilon$

Der in Gleichung (4.28) auf der linken Seite stehende Korrelationstensor ist an der Wand identisch Null. Das zeigen Ergebnisse von Mansour et al. (1988). Alle anderen Terme in der Dissipationsgleichung (4.26) sind, mit Ausnahme der in Gleichung (4.28) dargestellten molekularen diffusiven Transportterme und der molekularen Vernichtungsterme, an der Wand ebenfalls identisch Null. Das zeigen die in dieser Arbeit ermittelten Ergebnisse. Es kann deshalb gefolgert werden, daß der molekulare diffusive Transportterm und der molekulare Vernichtungsterm in unmittelbarer Wandnähe im Gleichgewicht sein müssen. Andererseits muß das Volumenintegral des molekularen diffusiven Transportterms über den gesamten Kanal den Wert Null liefern, weil es sich bei diesem eben um keinen Produktions- oder Vernichtungsterm sondern um einen Umverteilungsterm handelt:

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_l \partial x_l} dV = 0 \quad (4.29)$$

Die analysierten turbulenten diffusiven Terme erfüllen diese Voraussetzung auch. Ihr Volumenintegral verschwindet in allen Fällen. Nach Analyse des molekularen diffusiven Transportterms bleibt festzuhalten, daß dieser in Kanalmitte aufgrund der konstanten Dissipation bei Rayleigh-Bénard-Konvektion identisch Null ist und wegen des Anstiegs der Dissipation in Wandnähe ebenfalls ansteigt. Um beide Voraussetzungen, d.h. das Gleichgewicht des molekularen Vernichtungsterms mit dem molekularen diffusiven Transportterm an der Wand und das Verschwinden des Volumenintegrals des molekularen diffusiven Transportterms über den ganzen Kanal, zu erfüllen, gibt es bei Naturkonvektion nur einen möglichen Verlauf der Dissipation in Wandnähe. Sie muß in unmittelbarer Wandnähe ein absolutes Maximum besitzen, zur Wand hin abnehmen und an der Wand ein lokales Minimum haben. Bei diesem Verlauf der Dissipation kann gefolgert werden, daß die wandnahen Bereiche in keiner der untersuchten direkten numerischen Simulationen durch das Maschennetz aufgelöst sind.

Ähnliche Untersuchungen zum Dissipationsverlauf bei erzwungener Konvektion wurden von Laufer (1954), Coles (1978), Patel et al. (1985), Mansour et al. (1988) und Rodi & Mansour (1990, 1993) durchgeführt. Bei Zwangskonvektion hat die Dissipation laut Mansour et al. (1988) ein Maximum in Wandnähe.

Es kann festgehalten werden, daß mit steigender Grashof-Zahl die hochfrequenten Fluktuationsanteile der Strömung zunehmend isotroper werden und dadurch das Wirbelfeld in Kanalmitte unabhängig von der Prandtl-Zahl wird, d.h. eine ähnliche Wirbelintensität besitzt. Im Kernbereich des Kanals besteht ein lokales Gleichgewicht zwischen dem Produktionsterm durch gegenseitiges Wirbelfadenstrecken und dem molekularen Vernichtungsterm. Das wie-

derum belegt die Gültigkeit der Grashof-Analogie bei hohen Grashof-Zahlen. Der Grund dafür ist der als Korrelationstensor erster Ordnung in isotroper Turbulenz verschwindende Produktions-/Vernichtungsterm durch Auftrieb. Damit existiert in der Dissipationsgleichung bei hohen Grashof-Zahlen keine Kopplung mehr zum Temperaturfeld. Hier deutet sich an, daß für Fluide mit kleinen Prandtl-Zahlen keine wesentlichen Änderungen oder Anpassungen in den bisher verwendeten Modellansätzen für die unbekanntenen Terme der Dissipationsgleichung zu erwarten sind.

#### 4.6.2.2 Analyse verschiedener Modellansätze

Für die unbekanntenen Korrelationsterme in der exakten Dissipationsgleichung (4.26) müssen Modellansätze eingeführt werden, die nur solche Terme enthalten, die auch in anderen Modellgleichungen schon vorkommen. Schließungsannahmen sind erforderlich für die turbulenten diffusiven Transportterme durch Geschwindigkeitsfluktuationen  $D_{e1}$ , die allerdings nur im wandnahen hydrodynamischen Grenzschichtbereich von Bedeutung sind, die Produktionsterme durch gegenseitiges Wirbelfadenstrecken  $P_{eW}$  sowie die molekularen Vernichtungsterme  $V_e$ , die im gesamten Kanal eine Rolle spielen.

Die molekularen diffusiven Transportterme  $D_{em}$  werden in statistischen Turbulenzmodellen im allgemeinen vernachlässigt [Rodi (1984)], obwohl für sie keine Modellannahmen notwendig sind. Wie die Analysen im vorigen Kapitel gezeigt haben, sind sie in der Tat im zentralen Kanalbereich von untergeordneter Bedeutung, in der hydrodynamischen Grenzschicht jedoch durchaus relevant und an der Wand sogar dominant. Die konvektiven Transportterme  $K_e$  müssen ebenfalls nicht modelliert werden, verschwinden aber bei Rayleigh-Bénard-Konvektion ebenso wie die Produktionsterme durch das mittlere Geschwindigkeitsfeld  $P_{eH}$  aufgrund der fehlenden mittleren Grundströmung. Diese sind ähnlich den Produktionstermen durch Auftrieb  $P_{eA}$  und den turbulenten diffusiven Transporttermen durch Druckfluktuationen  $D_{e2}$  bei hohen Grashof-Zahlen im zentralen Kanalbereich ohnehin bedeutungslos. Ihre Modellierung ist deshalb nur in den wandnahen hydrodynamischen Grenzschichtbereichen erforderlich. Um diese Anteile zu berücksichtigen, werden in der modellierten Dissipationsgleichung im allgemeinen Wanddämpfungsfunktionen eingeführt, die im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht werden. Eine Übersicht darüber geben die Arbeiten von Patel et al. (1985), Mansour et al. (1989) und Kessler (1993). Der turbulente diffusive Transportterm durch Druckfluktuationen  $D_{e2}$  wird in der Regel direkt oder indirekt vernachlässigt, indem er mit dem für den turbulenten diffusiven Transport durch Geschwindigkeitsfluktuationen  $D_{e1}$  abgeleiteten Näherungsansatz gemeinsam modelliert wird.

Der turbulente diffusive Transportterm durch Geschwindigkeitsschwankungen  $D_{e1}$  wird üblicherweise mit einem Gradientenansatz modelliert:

$$-\frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} u_l'' \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ c_\epsilon \frac{k}{\epsilon} \langle u_l'' u_k'' \rangle \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right\} \quad (4.30)$$

Dieser Modellansatz stammt von Hanjalic & Launder (1972) und kann aus der exakten Transportgleichung für die betrachtete Dreifachkorrelation  $D_{et1}$  durch deren Vereinfachung abgeleitet werden. Es wird angenommen, daß der Transport durch turbulente Diffusion aufgrund von Geschwindigkeitsfluktuationen proportional dem Gradienten der transportierten Größe ist. Für den Koeffizienten  $c_\epsilon$  wird gewöhnlich der von Hanjalic & Launder (1972) vorgeschlagene und von Launder et al. (1975) bestätigte Wert  $c_\epsilon=0.15$  verwendet.

Eine weitere Möglichkeit zur Modellierung von  $D_{et1}$  ist, in Analogie zur Modellierung der turbulenten Diffusion in der Gleichung der turbulenten kinetischen Energie, die Einführung eines der turbulenten Prandtl-Zahl  $Pr_t$  und dem Koeffizienten  $\sigma_k$  ähnlichen empirischen Koeffizienten  $\sigma_\epsilon$ . Dieser Ansatz kann bei Voraussetzung lokalisotroper Turbulenz mit Hilfe von Beziehung (4.30) abgeleitet werden. Die turbulenten Schubspannungen verschwinden und für die Normalspannungen gilt:

$$\langle u_1''^2 \rangle = \langle u_2''^2 \rangle = \langle u_3''^2 \rangle = \frac{2}{3} k \quad (4.31)$$

Der Ansatz für  $D_{et1}$  lautet unter Bezugnahme auf diesen Zusammenhang:

$$-\frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} u_i'' \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right\} \quad (4.32)$$

Wird Beziehung (4.31) in Ansatz (4.30) eingesetzt, für  $c_\epsilon$  der Wert  $c_\epsilon=0.15$  und für den Koeffizienten  $c_\mu$  zur Berechnung der Wirbelviskosität  $v_t$  nach Gleichung (4.21) der Wert  $c_\mu=0.09$  [Rodi (1993)] zugrunde gelegt, dann folgt durch einen Koeffizientenvergleich mit Ansatz (4.32) für den Koeffizienten  $\sigma_\epsilon$  ein Wert von der Größenordnung eins:

$$\sigma_\epsilon = \frac{3}{2} \frac{c_\mu}{c_\epsilon} = 0.9 \quad (4.33)$$

Im k- $\epsilon$  Modell wird für  $\sigma_\epsilon$  im allgemeinen der Wert  $\sigma_\epsilon=1.3$  verwendet [Rodi (1984, 1993)].

Beide Modellierungsansätze (4.30) und (4.32) werden ausgewertet, indem die in ihnen enthaltenen, als ortsunabhängig und konstant angenommenen Koeffizienten berechnet werden. Ihre Bestimmungsgleichungen haben, unter Bezugnahme auf die in Kapitel 4.6.2.1 diskutierten Vereinfachungen, folgende Form:

$$c_\epsilon = \frac{-\frac{1}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} u_3'' \right\rangle}{\frac{k}{\epsilon} \langle u_3'' u_3'' \rangle \frac{\partial \epsilon}{\partial x_3}} \quad (4.34a)$$

$$\frac{c_\mu}{\sigma_\epsilon} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} u_3'' \right\rangle}{\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_3}} \quad (4.34b)$$

Im Fall BNA3 ist der diffusive Transport durch Geschwindigkeitsfluktuationen  $D_{et1}$  in den Grenzschichtbereichen und im zentralen Kanalbereich gleichermaßen von Bedeutung, der Dissipationsverlauf im gesamten Kanal nicht konstant. Daraus resultieren weitgehend orts-unabhängige Profile für  $c_\epsilon$  im Zentralbereich und für  $c_\mu/\sigma_\epsilon$  im gesamten Kanal, Abbildung 4.29a. Die Wandnähe, in der die turbulente kinetische Energie  $k$  in beiden Gleichungen gegen Null geht, ist hier auszunehmen. Die Werte im Diagramm werden bei 0.2 und -0.1 abgeschnitten. Im Fall BNA24 ist der turbulente diffusive Transport  $D_{et1}$  im zentralen Kanalbereich vernachlässigbar und nur in den Grenzschichtbereichen von Bedeutung. In diesem für  $D_{et1}$  wichtigen wandnahen Bereich, in dem auch ein Gradient der Dissipation existiert, folgt für beide Gradientenansätze ein fast konstanter Verlauf der Koeffizienten  $c_\epsilon$  und  $c_\mu/\sigma_\epsilon$ , Abbildung 4.29b. Der unstetige Verlauf der Profile im zentralen Kanalbereich ist eine Folge des in den Ansätzen (4.34a,b) im Nenner stehenden Gradienten der Dissipation. Grundsätzlich kann bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit dem Fluid Natrium festgehalten werden, daß beide Ansätze (4.34a,b) unabhängig von der Grashof-Zahl an den Stellen einen sinnvollen konstanten Verlauf der Koeffizienten zeigen, an denen das Profil der Dissipation nicht konstant ist. Im Vergleich zu den exakten turbulenten diffusiven Transporttermen  $D_{et1}$  erweist sich dieser Ansatz als richtig, wenngleich die in der Praxis verwendeten Werte der Koeffizienten nicht bestätigt werden können. Sie liegen bei den hier durchgeführten Auswertungen mit dem Fluid Natrium gegenüber den üblicherweise verwendeten Werten um den Faktor 2 bis 3 niedriger.

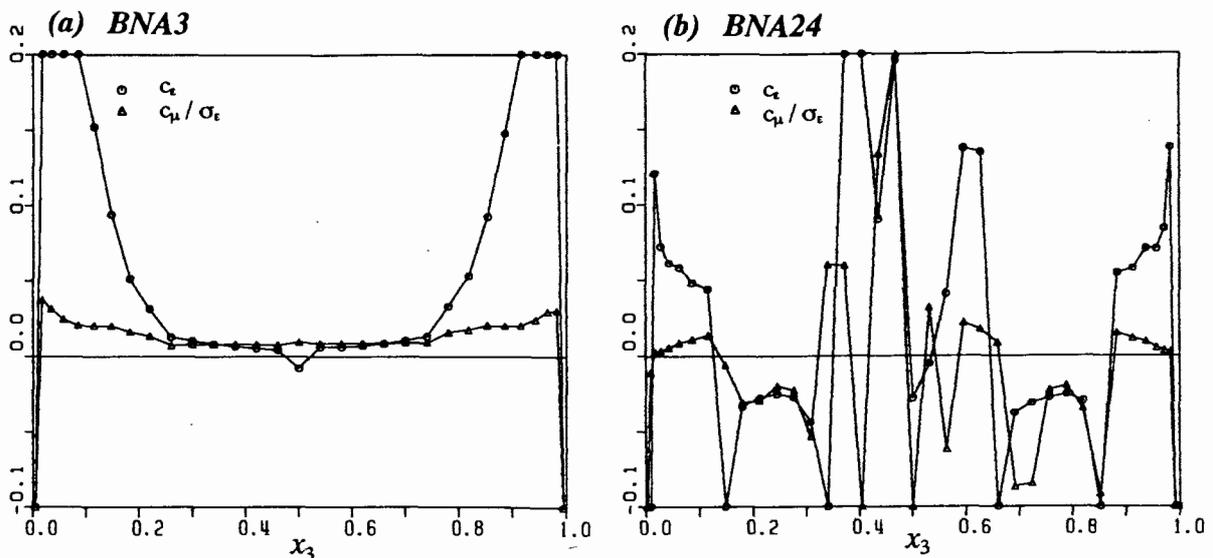


Abb. 4.29: Koeffizienten  $c_\epsilon$  und  $c_\mu/\sigma_\epsilon$  gemäß den Gleichungen (4.34a,b) für die Modellierung von  $D_{et1}$  der Fälle BNA3 (a) und BNA24 (b).

In den Abbildungen 4.30a,b sind die vertikalen Profile der Koeffizienten  $c_\epsilon$  und  $c_\mu/\sigma_\epsilon$  im Fall BLU3D für (a) die Modellierung von  $D_{et1}$  gemäß den Bestimmungsgleichungen (4.34a,b) sowie (b) die gemeinsame Modellierung der Dreifachgeschwindigkeitskorrelationen  $D_{et1}$  und der Druck-Geschwindigkeitskorrelationen  $D_{et2}$  mit den Ansätzen (4.30) und (4.32) dargestellt. Bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit dem Fluid Luft gelten im zentralen Kanalbereich prinzipiell dieselben Aussagen, die im vorigen Abschnitt für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit dem Fluid Natrium gemacht werden. Der turbulente diffusive Transport ist vernachlässigbar

klein, ausreichend hohe Grashof-Zahlen vorausgesetzt. Die Gradientenmodelle (4.30) und (4.32) tragen diesem Sachverhalt aufgrund des konstanten Profils der Dissipation und dem damit verschwindenden Gradienten der Dissipation in Kanalmitte Rechnung. Der modellierte turbulente diffusive Transport verschwindet in beiden Fällen und die berechneten Koeffizienten zeigen den schon bekannten unstetigen Verlauf.

In den Grenzschichtbereichen sind die turbulenten diffusiven Transportmechanismen durch Geschwindigkeitsfluktuationen  $D_{et1}$  im Vergleich zu denen des Fluids Natrium grundsätzlich verschieden. Die Dreifachgeschwindigkeitskorrelation  $D_{et1}$  hat in den Luftfällen ein den Natriumfällen genau entgegengesetztes Verhalten. Aus diesem Grund haben die Koeffizienten  $c_\epsilon$  und  $c_\mu/\sigma_\epsilon$  in den wandnahen Bereichen zwar den erwarteten konstanten Verlauf, sind jedoch negativ, Abbildung 4.30a. Während bei Natrium  $D_{et1}$  in Wandnähe ein Senkenterm ist, ist dieser bei Luft ein Quellterm. Diesem Sachverhalt müßte durch eine geeignete Modellierung

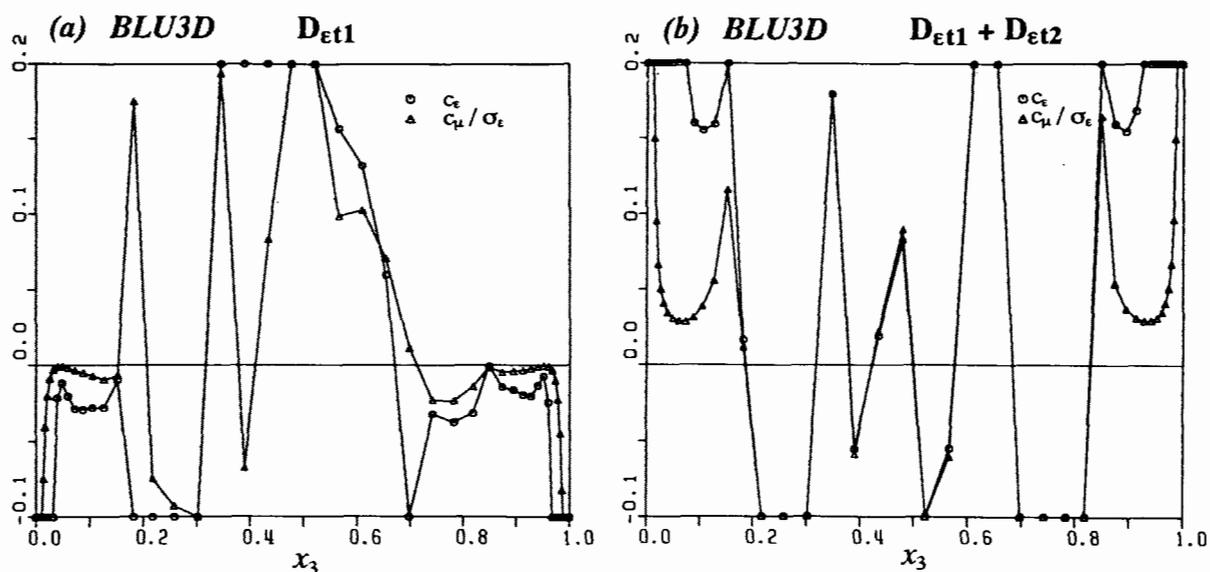


Abb. 4.30: Koeffizienten  $c_\epsilon$  und  $c_\mu/\sigma_\epsilon$  im Fall BLU3D für (a) die Modellierung von  $D_{et1}$  gemäß den Gleichungen (4.34a,b) und (b) die gemeinsame Modellierung von  $D_{et1} + D_{et2}$  mit den Ansätzen (4.30) und (4.32).

von  $D_{et1}$  im Luftfall Rechnung getragen werden, weil dieser im Grenzschichtbereich eigentlich als Quelle wirkende Term in der modellierten Dissipationsgleichung als Senkenterm auftritt. Das kann erreicht werden, indem die turbulenten diffusiven Transportterme durch Geschwindigkeits- und Druckfluktuationen,  $D_{et1}$  und  $D_{et2}$ , per Definition gemeinsam mit dem Gradientenansatz (4.30) oder (4.32) modelliert werden. Dies kann unabhängig von der Prandtl-Zahl geschehen, weil der turbulente diffusive Transportterm durch Druckfluktuationen sowohl im Luftfall als auch im Natriumfall, wo er eine sehr viel geringere Bedeutung hat, immer ein Senkenterm ist. In den Ansätzen (4.30) und (4.32) sowie den Zählern der Bestimmungsgleichungen (4.34a,b) erscheint dann bei der Auswertung zusätzlich die Druck-Geschwindigkeitskorrelation  $D_{et2}$ . Das Ergebnis dieser Vorgehensweise ist für die Koeffizienten  $c_\epsilon$  und  $c_\mu/\sigma_\epsilon$  im Fall BLU3D in Abbildung 4.30b dargestellt. Im interessierenden Grenzschichtbereich ist  $c_\epsilon$  stückweise konstant und hat einen Wert von  $c_\epsilon \approx 0.16$ . Auch  $c_\mu/\sigma_\epsilon$  ist

stückweise konstant und weist einen Wert von  $c_\mu/\sigma_\epsilon \approx 0.05$  auf, der gut mit dem im allgemeinen verwendeten Wert übereinstimmt. Die unmittelbare Wandnähe ist aus diesen Betrachtungen ausgeschlossen, weil  $k$  im Nenner beider Gleichungen gegen Null geht.

Insgesamt erweist sich nach diesen Untersuchungen Ansatz (4.32) gegenüber Ansatz (4.30) sowohl für das Fluid Luft als auch Natrium empfehlenswerter und in der Lage, beide turbulenten diffusiven Transportterme,  $D_{et1}$  und  $D_{et2}$ , gemeinsam zu modellieren. Im Natriumfall hat die turbulente Diffusion einen wesentlich geringeren Einfluß als im Luftfall. Dieser Sachverhalt sollte bei der Modellierung durch einen kleineren Diffusionskoeffizienten  $c_\epsilon$  oder einen größeren Koeffizienten  $\sigma_\epsilon$  berücksichtigt werden.

Als unbekanntes Korrelationsglied bleibt der Produktionsterm durch gegenseitiges Wirbelfadenstrecken  $P_{eW}$  und der molekulare Vernichtungsterm  $V_\epsilon$  übrig. Für diese hat Rodi (1971) gezeigt, daß sie nur zusammen modelliert werden dürfen. Geht die Reynolds-Zahl, d.h. im hier untersuchten Anwendungsfall die Grashof-Zahl, gegen unendlich, dann streben beide Terme mit unterschiedlichen Vorzeichen ebenfalls gegen unendlich, ihre Differenz ist jedoch von der Grashof-Zahl unabhängig und bleibt endlich. Weil die Dissipation  $\epsilon$  selbst bei hohen Grashof-Zahlen von dieser unabhängig ist, dürfen in der modellierten Dissipationsgleichung auch keine von der Grashof-Zahl abhängigen Glieder vorkommen. Folglich wird eine Modellbeziehung eingeführt [Hanjalic & Launder (1972), Launder et al. (1975)], die die von der Grashof-Zahl unabhängige Differenz beider Terme modelliert. Sie hat für auftriebsbehaftete Strömungen in horizontalen Fluidschichten folgende Form [Hossain (1980), Hossain & Rodi (1982), Rodi (1987, 1993)]:

$$-\frac{2}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{2}{Gr} \left\langle \left( \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right\rangle = c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P + c_{3\epsilon} G) - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (4.35)$$

Der Ansatz besteht aus zwei Anteilen, einem Quell- und einem Senkenterm.  $P$  und  $G$  sind hierin die modellierten Produktionsterme von  $k$  durch die Hauptströmung und die modellierten Produktions-/Vernichtungsterme von  $k$  durch Auftrieb in der turbulenten kinetischen Energiegleichung:

$$P = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \quad (4.36a)$$

$$G = \delta_{j3} \frac{c_\mu}{Pr_i} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \quad (4.36b)$$

Für die Koeffizienten  $c_{1\epsilon}$  und  $c_{2\epsilon}$  werden im  $k$ - $\epsilon$ -Modell die Werte  $c_{1\epsilon}=1.44$  und  $c_{2\epsilon}=1.92$  verwendet, während für  $c_{3\epsilon}$  kein allgemeingültiger Wert angegeben werden kann [Rodi (1987)]. Er ist abhängig von der betrachteten Strömungssituation und sollte laut Rodi (1987) in instabil geschichteten Fluidschichten, wo  $G$  ein Quellterm ist, den Wert  $c_{3\epsilon} \approx 1.0$ , in stabil geschichteten Fluidschichten, wo  $G$  ein Senkenterm ist, Werte zwischen  $c_{3\epsilon} \approx 0.0-0.2$  besit-

zen. Im hier untersuchten Anwendungsfall der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist demnach  $c_{3\varepsilon} = 1.0$  zu verwenden. Dem Koeffizienten  $c_\mu$  zur Berechnung der Wirbelviskosität wird der Wert  $c_\mu = 0.09$ , der turbulenten Prandtl-Zahl der Wert  $Pr_t = 0.9$  für Grenzschichtströmungen zugrunde gelegt. Bei der hier untersuchten Rayleigh-Bénard-Konvektion ist  $P$  wegen der fehlenden mittleren Grundströmung identisch Null.

Der Modellierungsansatz (4.35) wird unter diesen Voraussetzungen ausgewertet, indem erstens der gesamte Ansatz nach  $c_{1\varepsilon}$  aufgelöst, zweitens dem Produktionsterm durch gegenseitiges Wirbelfadenstrecken  $P_{\varepsilon W}$  nur der Modellquellterm gegenübergestellt und nach  $c_{1\varepsilon}$  aufgelöst und drittens dem molekularen Vernichtungsterm  $V_\varepsilon$  nur der Modellsenkenterm gegenübergestellt und nach  $c_{2\varepsilon}$  aufgelöst wird und die als ortsunabhängig angenommenen Koeffizienten  $c_{1\varepsilon}$  und  $c_{2\varepsilon}$  berechnet werden. In den ersten beiden Fällen müssen dabei die Koeffizienten  $c_\mu$ ,  $Pr_t$ ,  $c_{3\varepsilon}$  und im ersten Fall zusätzlich  $c_{2\varepsilon}$  vorgegeben werden. Die analysierten Bestimmungsgleichungen haben folgende Form:

$$c_{1\varepsilon} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{2}{Gr} \left\langle \left( \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right\rangle + c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}}{c_{3\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G} \quad (4.37a)$$

$$c_{1\varepsilon} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{Gr}} \left\langle \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right\rangle}{c_{3\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G} \quad (4.37b)$$

$$c_{2\varepsilon} = \frac{-\frac{2}{Gr} \left\langle \left( \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right\rangle}{\frac{\varepsilon^2}{k}} \quad (4.37c)$$

Im Fall BNA6 ergibt die Auswertung der Bestimmungsgleichung (4.37a) einen nahezu konstanten Verlauf für den Koeffizienten  $c_{1\varepsilon}$  im zentralen Kanalbereich, wenngleich der berechnete Wert geringer als der erwartete Wert ist, Abbildung 4.31d. Ein Grund dafür ist der scheinbar zu niedrig vorgegebene Koeffizient  $c_{2\varepsilon} = 1.92$ , wie die Abbildungen 4.31c,f zeigen werden. Nicht mehr konstant ist der Verlauf von  $c_{1\varepsilon}$  im Fall BNA50 und der Verlauf von  $c_{1\varepsilon}$  im Fall BLU6, Abbildungen 4.31a,d. Die Werte in den Diagrammen werden bei 3.2 und -0.8 abgeschnitten. Um diesen nichtkonstanten Verlauf zu untersuchen, wird der Ansatz (4.35) getrennt ausgewertet, d.h. der Produktionsterm  $P_{\varepsilon W}$  dem Modellquellterm, der Vernichtungsterm  $V_\varepsilon$  dem Modellsenkenterm gegenübergestellt. Wenn ausschließlich der Produktionsterm betrachtet wird, haben die Profile für  $c_{1\varepsilon}$  gemäß Gleichung (4.37b) ein qualitativ ähnliches Aussehen mit den zuvor diskutierten Kurven der Abbildungen 4.31a,d und deuten damit an, daß der Grund für den nichtkonstanten Verlauf von  $c_{1\varepsilon}$  in den Fällen BLU6 und BNA50 der Modellquellterm ist, Abbildungen 4.31b,e. Im Nenner der Gleichung (4.37b) geht ebenso wie

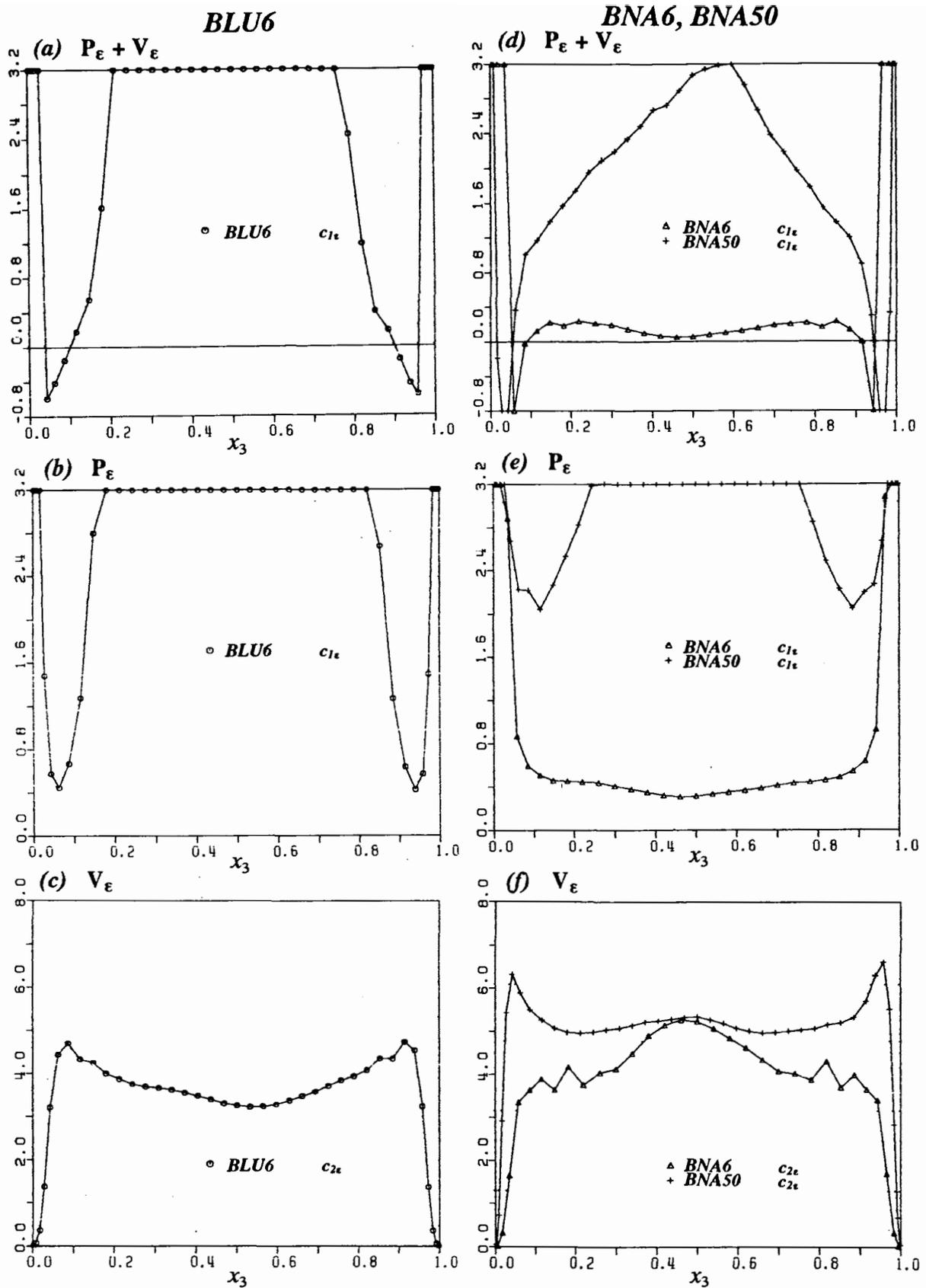


Abb. 4.31: Koeffizienten  $c_{1\epsilon}$  und  $c_{2\epsilon}$  gemäß den Gleichungen (4.37a-c) für die Modellierung der Produktion durch Wirbelfadenstrecken  $P_{\epsilon W}$  und der molekularen Vernichtung  $V_\epsilon$  der Fälle BLU6 (a-c) und BNA6 bzw. BNA50 (d-f). (a,d)  $c_{1\epsilon}$  gemäß Gleichung (4.37a); (b,e)  $c_{1\epsilon}$  gemäß Gleichung (4.37b); (c,f)  $c_{2\epsilon}$  gemäß Gleichung (4.37c).

im Nenner der Gleichung (4.37a) der modellierte Produktions-/Vernichtungsterm  $G$  von turbulenter kinetischer Energie  $k$  ein, der auf einem Ansatz mit dem Gradienten der Temperatur beruht. Während im Fall BNA6 auch in Kanalmitte noch ein Temperaturgradient vorhanden ist, verschwindet dieser mit steigender Grashof-Zahl bei Rayleigh-Bénard-Konvektion und ist im Fall BNA50 viel geringer. Im Fall BLU6 ist der Kernbereich des Kanals isotherm. Resultierend daraus ist der modellierte Produktions-/Vernichtungsterm durch Auftrieb  $G$  im zentralen Kanalbereich sehr klein, der Koeffizient  $c_{1\epsilon}$  demzufolge sehr groß. Demgegenüber wird jedoch kein statistisches Turbulenzmodell, das auf einem Ansatz mit dem Gradienten der Temperatur zur Bestimmung des turbulenten Wärmestroms beruht, eine isotherme Kernströmung vorhersagen können. Es erscheint deshalb vielversprechender, den turbulenten Wärmestrom mit einer Transportgleichung oder einem algebraischen Ansatz zu bestimmen, wenn indifferent geschichtete Bereiche im Temperaturfeld existieren [vgl. Wörner (1994)]. Das würde eine sinnvolle Verwendung des modellierten Produktions-/Vernichtungsterms durch Auftrieb  $G$  von turbulenter kinetischer Energie  $k$  zur Modellierung des Quellterms in der Dissipationsgleichung sicherstellen. Auch hier ist das Profil von  $c_{1\epsilon}$  im Fall BNA6 im zentralen Kanalbereich wieder nahezu konstant, der berechnete Wert von  $c_{1\epsilon}$  jedoch größer als in Abbildung 4.31d. Das deutet nochmals auf den zu niedrig vorgegebenen Wert von  $c_{2\epsilon}$  in Bestimmungsgleichung (4.37a) hin. Wenn ausschließlich der Vernichtungsterm betrachtet wird, haben die Profile für  $c_{2\epsilon}$  gemäß Gleichung (4.37c) unabhängig von der Prandtl-Zahl in allen Fällen einen fast konstanten Verlauf im zentralen Kanalbereich. Die Werte für  $c_{2\epsilon}$  liegen zwischen 3.5 und 5.5 und sind damit gegenüber dem erwarteten Wert  $c_{2\epsilon}=1.92$  um den Faktor 2 bis 3 höher. Die unmittelbaren Wandbereiche sind aus den Untersuchungen der Bestimmungsgleichungen (4.37a-c) wieder ausgeschlossen, weil sowohl  $G$  im Nenner der Gleichungen (4.37a,b) als auch  $k$  im Zähler aller Gleichungen gegen Null geht. Hier müssen Wandfunktionen eine richtige Modellierung der Transportvorgänge bewirken.

### 4.6.3 Transportgleichung für die Temperaturschwankungen

#### 4.6.3.1 Analyse der exakten Gleichung

Wie im vorigen Abschnitt diskutiert, ist es bei einer Strömung mit isothermen Bereichen vorteilhafter, die turbulenten Wärmeströme  $\langle T'' u_j'' \rangle$  nicht mit einem Temperaturgradientenansatz gemäß Gleichung (4.17b) zu modellieren, sondern besser Transportgleichungen oder daraus abgeleitete algebraische Flußansätze für die unbekanntenen Korrelationen einzuführen. Der bei dieser Vorgehensweise in beiden Fällen auftretende Produktionsterm von turbulentem Wärmestrom durch Auftrieb  $\delta_{j3} \langle T''^2 \rangle$  ist ebenfalls unbekannt, ein geeigneter Näherungsansatz notwendig. Für gewöhnlich erfolgt die Schließung der unbekanntenen Korrelation  $\langle T''^2 \rangle$  indem entweder eine neue Transportgleichung oder ein daraus abgeleiteter algebraischer Ansatz eingeführt wird.

In diesem Abschnitt wird die exakte Transportgleichung der Temperaturschwankungsquadrate, im nächsten die Modellierung der in ihr enthaltenen unbekanntenen Korrelationen Gegenstand der Untersuchungen sein. Aufgrund der Ähnlichkeit mit der Gleichung der turbulenten kinetischen Energie  $k$  wird eine analoge Gleichung für  $\langle T''^2 / 2 \rangle = g$  abgeleitet. Dies ge-

schieht mittels der Energiegleichung (2.2c). Zunächst wird die zeitlich gemittelte Energiegleichung von der für die momentanen Größen geltenden Gleichung subtrahiert, um eine Gleichung für die Fluktuationsgrößen zu erhalten. Diese wird mit  $T''$  multipliziert. Nach einer zeitlichen Mittelung sowie dem Zusammenfassen und Umformen einiger Terme, folgt die skalare Gleichung der Temperaturschwankungsquadrate:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{\partial \langle T''^2 \rangle}{\partial t} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial (\langle T''^2 \rangle \langle u_i \rangle)}{\partial x_i} \\
 \text{Änderungsrate} & \quad \text{konvektiver Transport} = K_g \\
 & - \langle T'' u_i'' \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i} \\
 & \quad \text{Produktion durch das mittlere Temperaturfeld} = P_{gH} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle T''^2 u_i'' \rangle \\
 & \quad \text{turbulenter diffusiver Transport} = D_{gt} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2 \sqrt{Gr} Pr} \frac{\partial \langle T''^2 \rangle}{\partial x_i} \right\} \\
 & \quad \text{molekularer diffusiver Transport} = D_{gm} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} \left\langle \frac{\partial T''}{\partial x_i} \frac{\partial T''}{\partial x_i} \right\rangle \\
 & \quad \text{molekulare Vernichtung} = V_g
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Im Gegensatz zur k-Gleichung enthält die g-Gleichung keinen turbulenten diffusiven Transportterm durch Druckschwankungen und keinen Produktionsterm durch Auftrieb. Die physikalische Bedeutung der übrigen Terme ist angegeben. Sie repräsentieren die Änderungsrate, den Transport, die Produktion und die Vernichtung von Temperaturschwankungen.

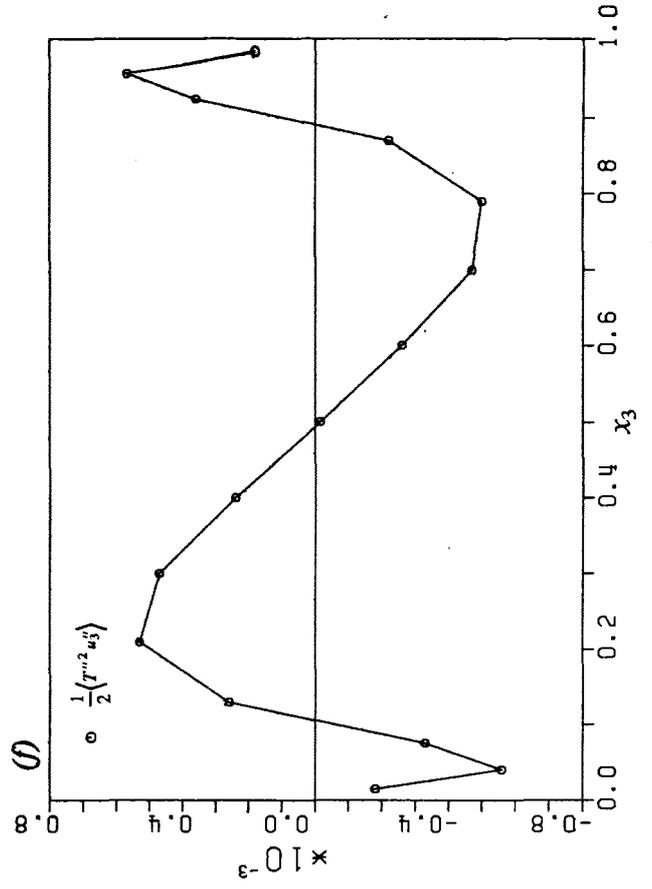
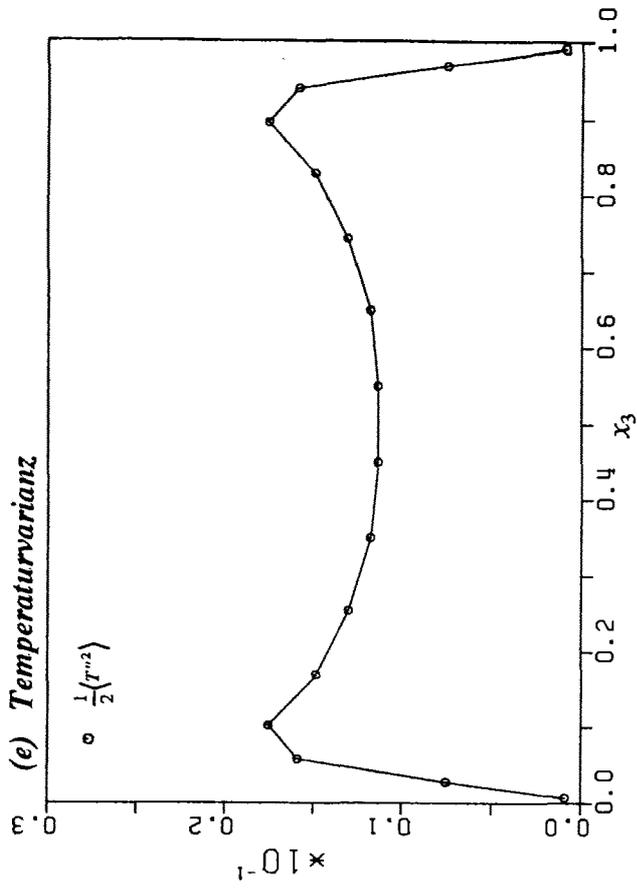
Aufgrund der fehlenden mittleren Grundströmungen verschwindet bei Rayleigh-Bénard-Konvektion der konvektive Transportterm  $K_g$ . Im Falle einer eingelaufenen, im statistischen Sinne stationären Strömung tritt keine zeitliche Änderungsrate auf und bei Homogenität in den horizontalen Richtungen sind nur die Gradienten der Zeitmittelwerte in vertikaler Richtung ungleich Null. Für Gleichung (4.38) folgt:

$$0 = -P_{gH} - D_{gt} + D_{gm} - V_g \tag{4.39}$$

Die Abbildungen 4.32a-h zeigen die vertikalen Profile der Temperaturschwankungsquadrate  $\langle T''^2 / 2 \rangle$  und der Terme ihrer Transportgleichung (4.39) für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium im Fall BNA84 und BNA10000.

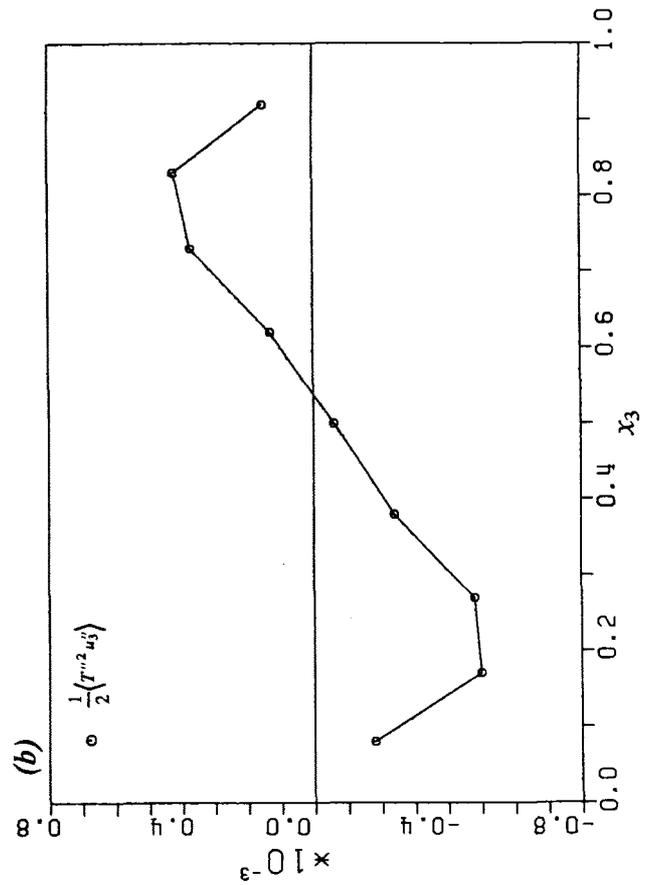
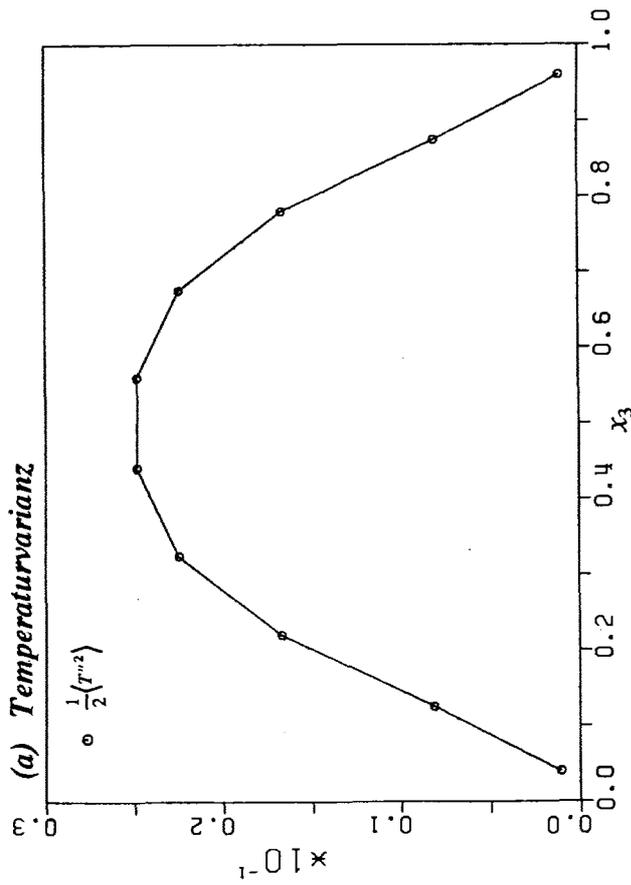
**BNA10000**

(e) Temperaturvarianz



**BNA84**

(a) Temperaturvarianz



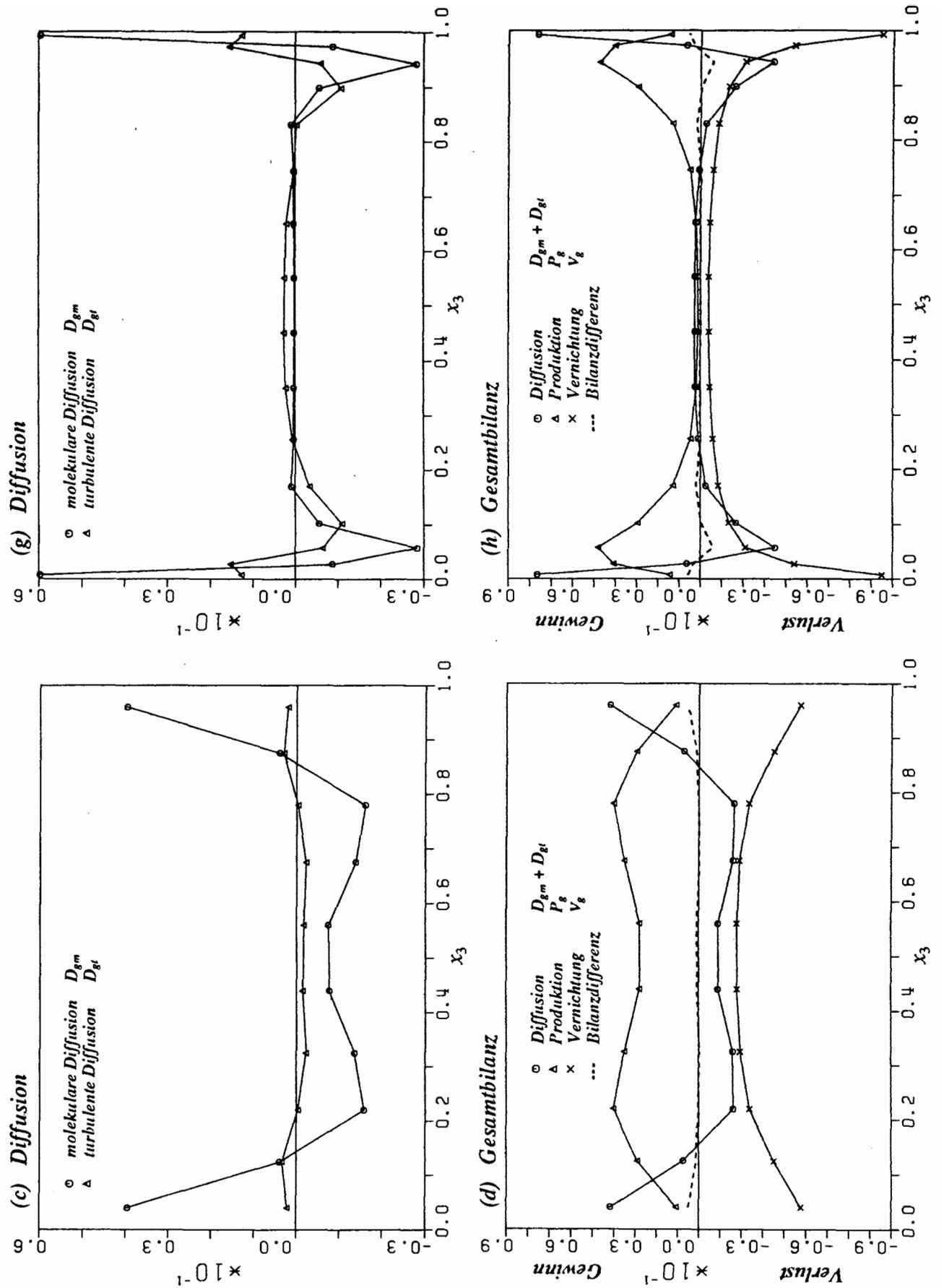


Abb. 4.32: Analyseergebnisse der Temperaturschwankungsquadrate sowie von Termen ihrer Transportgleichung der Fälle BNA84 (a-d) und BNA10000 (e-h). (a,e)  $\langle T'^2/2 \rangle$ ; (b,f)  $\langle T'^2 u'_i/2 \rangle$ ; (c,g) Diffusion; (d,h) Gesamtbilanz.

Bereits der Verlauf der Temperaturschwankungsquadrate  $\langle T''^2 / 2 \rangle$  deutet darauf hin, daß mit steigender Rayleigh-Zahl grundsätzlich veränderte Transportmechanismen von Bedeutung sind, Abbildungen 4.32a,e. Während im Fall BNA84 die Grenzschichten noch fast bis zur Kanalmitte reichen und kein ausgeprägter Kernbereich vorhanden ist, zeigt der Fall BNA10000 eindeutige Grenzschichtcharakteristika mit einer isothermen Kernströmung.

Auf die veränderten Transportvorgänge im Kernbereich gegenüber den Grenzschichten deuten auch die vertikalen Profile der Dreifachkorrelation  $\langle T''^2 u_3'' / 2 \rangle$  der turbulenten diffusiven Transportterme  $D_{gt}$  beider Fälle hin, Abbildungen 4.32b,f. Während in den Grenzschichten beide Fälle denselben Einflüssen unterliegen, findet im Fall BNA10000 im Übergangsbereich zwischen Grenzschicht und Konvektionsschicht ein Vorzeichenwechsel statt. Der Grund ist die prinzipiell unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Temperatur in der Konvektionsschicht gegenüber der Grenzschicht in der unteren wie oberen Kanalhälfte. Das beweisen die in Kapitel 4.4.1 diskutierten vertikalen Profile der Schiefe und der Flachheit der Temperatur. Die vertikalen Profile der Schiefe in Abbildung 4.15a haben einen den vertikalen Profilen der Dreifachkorrelation  $\langle T''^2 u_3'' / 2 \rangle$  in den Abbildungen 4.32b,f qualitativ ähnlichen Verlauf, die unmittelbaren Wandbereiche ausgenommen. Hier deutet sich der Einfluß der  $u_3''$  Komponente an, die in der viskosen Unterschicht gegen Null geht.

Damit hat der turbulente diffusive Transportterm  $D_{gt}$  von Temperaturschwankungen im Fall BNA84 gegenüber dem im Fall BNA10000 im Kernbereich des Kanals einen vollkommen anderen Verlauf und eine andere Bedeutung, Abbildungen 4.32c,g. Während  $D_{gt}$  im Fall BNA84 in der Konvektionsschicht ein Senkenterm ist, der nur eine geringe Bedeutung gegenüber dem molekularen diffusiven Transportterm  $D_{gm}$  hat, ist  $D_{gt}$  im Fall BNA10000 im zentralen Kanalbereich ein wichtiger Quellterm gegenüber dem vernachlässigbaren molekularen diffusiven Transportterm  $D_{gm}$ . In den Grenzschichten spielt  $D_{gm}$  neben  $D_{gt}$  immer eine Rolle, in den Unterschichten geht  $D_{gt}$  gegen Null und  $D_{gm}$  ist der dominante Diffusionsterm.

Die beiden Abbildungen 4.32d,h zeigen einen Vergleich der Gesamtbilanzen beider Fälle gemäß Gleichung (4.38). Im Fall BNA84 ist der Produktionsterm durch das mittlere Temperaturfeld  $P_{gH}$  im gesamten Kanal von Bedeutung. Im Fall BNA10000 findet die Produktion ausschließlich in den Übergangsbereichen und den thermischen Grenzschichten statt und  $P_{gH}$  verschwindet aufgrund der isothermen Kernströmung in der Konvektionsschicht. Demzufolge wird im Fall BNA84 der Überschuß von  $P_{gH}$  durch Diffusion nur in die Wandbereiche umverteilt und dort durch den molekularen Vernichtungsterm kompensiert, d.h. die Temperaturschwankungen werden gedämpft. Im Fall BNA10000 findet dagegen eine Umverteilung des Produktionsüberschusses von  $P_{gH}$  durch Diffusion sowohl in die Unterschichten als auch in den zentralen Kernbereich statt. Dort sind  $D_{gt}$  und  $V_g$  im Gleichgewicht.

Eine Analyse der Luftfälle BLU25 und BLU100 bezüglich der Transportgleichung der Temperaturschwankungen führt zu einem erwarteten, dem Natriumfall BNA10000 vergleichbaren Ergebnis. Die Bilanzdifferenz dieser Fälle, in denen das Temperaturfeld mit der Methode der Grobstruktursimulation berechnet wird, ist jedoch größer als die der Natriumfälle, bei denen im Temperaturfeld direkte numerische Simulationen durchgeführt werden. Das ist jedoch zu erwarten, weil sowohl für den turbulenten diffusiven Transportterm  $D_{gt}$  als auch den moleku-

laren Vernichtungsterm  $V_g$  keine Feinstrukturanteile in der Analyse berücksichtigt werden können. Zwar verschwinden viele Feinstrukturanteile wenn lokalisotrope Turbulenz vorausgesetzt wird, jedoch nicht die Dreifachkorrelation des turbulenten diffusiven Transportterms  $D_{gt}$  und der molekulare Vernichtungsterms  $V_g$ . Aus diesem Grund existiert hier eine Grenze der mit der Methode der Grobstruktursimulation sinnvoll analysierbaren statistischen Korrelationen höherer Ordnung.

Es kann festgehalten werden, daß in der Konvektionsschicht mit steigender Grashof-Zahl der Produktionsterm  $P_{gH}$  sowie der molekulare diffusive Transportterm  $D_{gm}$  unabhängig von der Prandtl-Zahl keine Bedeutung hat und ein Gleichgewicht zwischen  $D_{gt}$  und  $V_g$  besteht. In den Grenzschichten spielen alle Terme eine Rolle, während in den Unterschichten nur noch  $D_{gm}$  und  $V_g$  dominant sind. Eine experimentelle Bestätigung für diese Sachverhalte geben die Untersuchungen von Deardorff & Willis (1967). Die dort durchgeführten Untersuchungen der Transportgleichung der Temperaturschwankungen bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft ( $Ra=6.3 \cdot 10^5, 2.5 \cdot 10^6, 10^7$ ) bestätigen die hier erzielten Ergebnisse. Es deutet sich daher an, daß für Fluide mit kleinen Prandtl-Zahlen bei hohen Rayleigh-Zahlen keine wesentlichen Änderungen oder Anpassungen in den bisher verwendeten Modellansätzen für die unbekanntenen Terme der skalaren Gleichung der Temperaturschwankungsquadrate zu erwarten sind.

#### 4.6.3.2 Analyse verschiedener Modellansätze

In der exakten Transportgleichung für die Temperaturschwankungsquadrate (4.38) müssen Modellansätze für die unbekanntenen Korrelationen des turbulenten diffusiven Transportterms  $D_{gt}$  und des molekularen Vernichtungsterms  $V_g$  eingeführt werden. Für die konvektiven Transportterme  $K_g$ , die Produktionsterme durch das mittlere Temperaturfeld  $P_{gH}$  sowie die molekularen diffusiven Transportterme  $D_{gm}$  sind keine zusätzlichen Näherungsannahmen notwendig. Gerade diese sollten, obwohl in statistischen Turbulenzmodellen im allgemeinen vernachlässigt, berücksichtigt werden, weil sie in den Grenzschichten relevant und in den Unterschichten sogar dominant sind. Geschieht das nicht, dann müssen geeignete Wandfunktionen eingeführt werden.

Der in der Regel verwendete Ansatz zur Modellierung des turbulenten diffusiven Transportterms  $D_{gt}$  wurde von Spalding (1971) vorgeschlagen und beruht auf einer Gradientenannahme:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle T''^2 u_i'' \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ c_{TT} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial \langle T''^2 \rangle}{\partial x_i} \right\} \quad (4.40)$$

Für den als ortsunabhängig angenommenen Koeffizienten  $c_{TT}$  schlägt Spalding (1971) den Wert  $c_{TT}=0.3$  vor, den auch Tamanini (1977) zur Berechnung erzwungener oder auftriebsinduzierter Freistrahströmungen verwendet, wogegen Chen & Rodi (1975) für denselben Anwendungsfall den Wert  $c_{TT}=0.245$  wählen. Die Bestimmungsgleichung des Koeffizienten  $c_{TT}$  für den im Rahmen dieser Arbeit ausgewerteten Modellansatz (4.40) lautet unter Bezugnahme auf alle in Kapitel 4.6.3.1 diskutierten Vereinfachungen:

$$c_{TT} = \frac{-\langle T''^2 u_3'' \rangle}{\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle T''^2 \rangle}{\partial x_3}} \quad (4.41)$$

Chung et al. (1992b) kommen bei einem Vergleich verschiedener Näherungsansätze für die Dreifachkorrelation  $\langle T''^2 u_3'' \rangle$  zu dem Schluß, daß ein dem Modellansatz (4.40) sehr ähnlicher Ansatz von Launder (1973) gegenüber komplexeren Ansätzen von Lumley (1978), Dekeyser & Launder (1983) und Weinstock (1989), die meist die Gradienten mehrerer turbulenter Größen enthalten, bessere Ergebnisse erzielt.

Die vertikalen Profile von  $c_{TT}$  gem Gleichung (4.41) für Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft im Fall BLU100 und Natrium in den Fällen BNA84 und BNA10000 bestätigen dieses

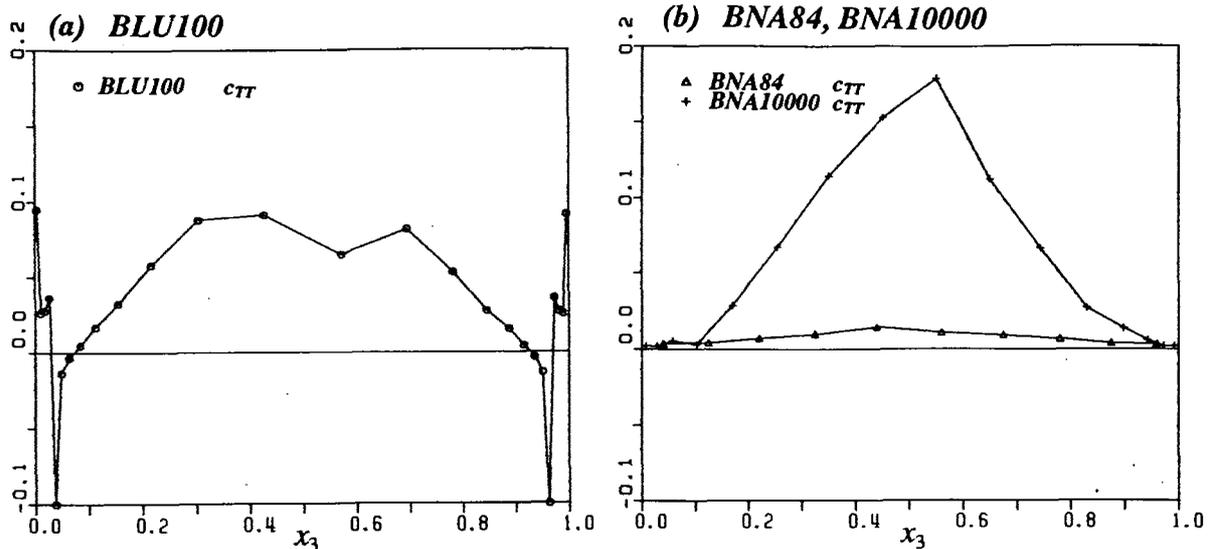


Abb. 4.33: Koeffizient  $c_{TT}$  gem Gleichung (4.41) für die Modellierung des turbulenten diffusiven Transportes von Temperaturschwankungen durch Geschwindigkeitsfluktuationen  $D_{gt}$  der Fälle BLU100 (a) und BNA84 bzw. BNA10000 (b).

Resultat nicht, Abbildungen 4.33a,b. Sowohl im Luftfall als auch in den Natriumfällen hat der Koeffizient einen nichtkonstanten Verlauf und ist ortsabhängig. Besonders das unstetige Profil von  $c_{TT}$  in Kanalmitte deutet an, daß der Ansatz (4.40) weniger geeignet erscheint. In der Kanalmittelebene führt der im zeitlichen Mittel verschwindende Gradient von  $\langle T''^2 / 2 \rangle$  zu einer Singularität in Bestimmungsgleichung (4.41). Wenn ein exakter Term einen wesentlichen Einfluß in der Bilanz der Transportgleichung einer turbulenten Größe hat, sollte deshalb auf Näherungsannahmen, in denen die Gradienten stückweise konstanter Modellierungsvariablen oder -korrelationen auftreten, verzichtet werden. Das gilt aber nicht für die Modellierung der turbulenten Diffusion durch Geschwindigkeitsfluktuationen  $D_{et1}$  in Kapitel 4.6.2, weil dort der exakte Term  $D_{et1}$  genau an den Stellen im Kanal bedeutungslos ist, an denen der Gradient der Dissipation verschwindet. Wo jedoch  $D_{et1}$  einen wichtigen Einfluß hat, ist auch der Gradient der Dissipation ungleich Null und ein Gradientenansatz sinnvoll. Das verdeutlicht, daß vor dem Einsatz einer Näherungsannahme in der Gradienten enthalten sind, zunächst Klarheit über den prinzipiellen Verlauf des exakten Terms bestehen muß. Die unmittel-

telbare Wandnähe ist bei den hier durchgeführten Analysen ausgenommen. Der grundsätzlich unterschiedliche Verlauf von  $c_{TT}$  im wandnahen Bereich im Luftfall gegenüber den Natriumfällen kommt zustande, weil im Fall BLU100 die hydrodynamische Grenzschicht durch das Maschennetz aufgelöst und in den Fällen BNA84 und BNA10000 nicht aufgelöst wird. In den Unterschichten gehen sowohl der Zähler als auch  $k$  im Nenner der Bestimmungsgleichung (4.41) gegen Null und führen dazu, daß der Bruch nicht mehr definiert ist. Dieses Verhalten ist in den Natriumfällen nicht sehr ausgeprägt, weil bei den Auswertungen außerhalb der hydrodynamischen Grenzschichten im wandnahen Bereich noch alle Größen endlich sind.

Eine weitere Korrelation, für die eine Näherungsannahme eingeführt werden muß, ist der molekulare Vernichtungsterm  $V_g$ . In  $k$ - $\epsilon$ - $\langle T''^2 \rangle$ -Modellen wird  $V_g$  in der Regel mit einem Ansatz von Launder (1975) approximiert. Dieser Ansatz beruht auf der Annahme, daß die molekulare Vernichtung  $V_g$  von Schwankungen  $\langle T''^2 / 2 \rangle$  proportional zur Dissipation  $\epsilon$  der turbulenten kinetischen Energie  $k$  ist. Der Mechanismus der Dämpfung von Temperaturschwankungen durch molekulare Transportvorgänge ist ähnlich dem Mechanismus der Dämpfung von Geschwindigkeitsschwankungen durch molekulare Transportvorgänge:

$$V_g = \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} \left\langle \frac{\partial T''}{\partial x_i} \frac{\partial T''}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{R} \frac{\langle T''^2 / 2 \rangle}{k} \epsilon \quad (4.42)$$

In diesem Ansatz hat der Koeffizient  $R$  die Bedeutung eines Verhältnisses des Zeitmaßstabes der Temperaturfluktuationen zu dem Zeitmaßstab der Geschwindigkeitsfluktuationen. Launder (1976a/b) schlägt für  $R$  in einer homogenen freien Scherströmung mit Auftriebseffekten den Wert  $R=0.8$  vor, weil dieser die beste Übereinstimmung mit Experimenten zur Folge hat. Er merkt jedoch gleichzeitig an, daß das Zeitskalenverhältnis  $R$  je nach Strömungssituation variieren und Werte zwischen  $R=0.5$ - $1.0$  annehmen kann. So verwendet Spalding (1971) den Wert  $R=0.5$ , während Wyngaard (1975) auf  $R=0.71$  zurückgreift. Aufgrund dieser Unbestimmtheit schlagen Lumley & Khajeh-Nouri (1974) und Lumley (1975) vor, für den molekularen Vernichtungsterm  $V_g$ , ähnlich der in Kapitel 4.6.2 analysierten Transportgleichung der Dissipationsrate, eine separate Transportgleichung abzuleiten und zu lösen. Diese Vorgehensweise führt zur Klasse der  $k$ - $\epsilon$ - $\langle T''^2 \rangle$ - $V_g$ -Modelle, auf die hier nicht eingegangen wird.

Die Bestimmungsgleichung des Zeitskalenverhältnisses  $R$  hat folgende Form:

$$R = \frac{\epsilon}{V_g} \frac{\langle T''^2 / 2 \rangle}{k} \sim \frac{\tau_g}{\tau_k} \quad (4.43)$$

Sowohl im Luftfall BLU100, wo  $R$  im zentralen Kanalbereich zwischen  $R=0.9$ - $1.6$  variiert, als auch den Natriumfällen BNA84, BNA250, BNA1000 und BNA10000 zeigt das Zeitskalenverhältnis  $R$  keinen konstanten Verlauf, sondern eine starke Ortsabhängigkeit, Abbildungen 4.34a,b. Hinzu kommt, daß die Zeitskalenverhältnisse mit ansteigender Rayleigh-Zahl in den Natriumfällen ebenfalls ansteigen. Die maximalen Werte für  $R$  treten in der Kanalmittelebene auf und gehen von  $R \approx 0.24$  im Fall BNA84 bis  $R \approx 0.64$  im Fall BNA10000. Sie liegen außerdem weit niedriger als im Luftfall. Das ist kein überraschendes Ergebnis, wenn berücksichtigt wird, daß die turbulenten Transportvorgänge im Temperaturfeld bei Fluiden

kleiner Prandtl-Zahl aufgrund der durch die große thermische Diffusivität verursachten schnellen molekularen Ausgleichsvorgänge sehr viel stärker gedämpft werden als die im Geschwindigkeitsfeld. Nur in unmittelbarer Wandnähe zeigen die Zeitskalenverhältnisse sowohl in den analysierten Luftfällen als auch den Natriumfällen einen konstanten Wert. Die Bilanzen der  $k$ - und der  $\langle T'^2/2 \rangle$ -Gleichung weisen in diesem Bereich ein Gleichgewicht zwischen molekularer Diffusion und molekularer Vernichtung auf. Mit Hilfe dieses Zusammenhangs kann abgeleitet werden, daß das Zeitskalenverhältnis  $R$  an der Wand gegen die molekulare Prandtl-Zahl strebt [Nagano et al. (1991)]. In der Tat erreicht in den wandnächsten Maschinen das Zeitskalenverhältnis der Luftfälle mit  $R \approx 0.65$  und das der Natriumfälle mit  $R \approx 0.006$  einen der molekularen Prandtl-Zahl dieser Fluide ähnlichen Wert.

Als ein Ergebnis dieser Analyse kann festgehalten werden, daß die Verwendung eines konstanten Zeitskalenverhältnisses  $R$  für die hier untersuchte Strömungsform nicht zu empfehlen

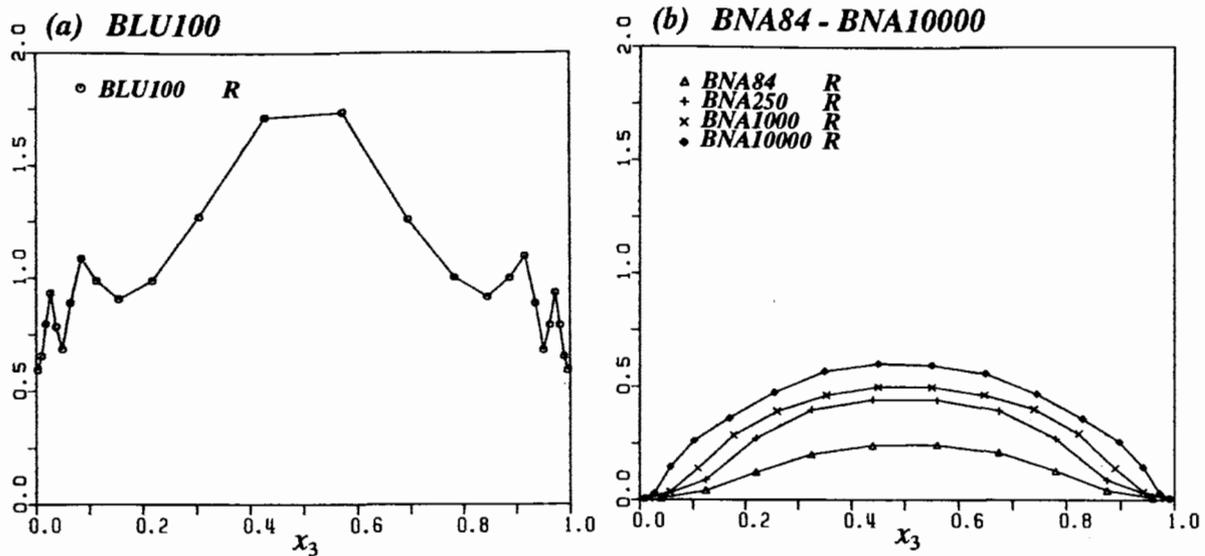


Abb. 4.34: Zeitskalenverhältnis  $R$  gemäß Gleichung (4.43) für die Modellierung des molekularen Vernichtungsterms  $V_g$  von Temperaturschwankungen der Fälle BLU100 (a) und BNA84, BNA250, BNA1000 bzw. BNA10000 (b).

ist. Das Zeitskalenverhältnis  $R$  ist sowohl vom Fluid, von der Rayleigh-Zahl und vom Ort abhängig. Selbst wenn berücksichtigt wird, daß in den Luftfällen, aufgrund der dort durchgeführten Grobstruktursimulationen im Geschwindigkeitsfeld und im Temperaturfeld, die auftretenden Analyseungenauigkeiten weitaus größer sind als in den Natriumfällen, bei denen nur im Geschwindigkeitsfeld eine Grobstruktursimulation durchgeführt wird, ist dieses Ergebnis konsistent mit Auswertungen von Wörner (1994). Er hat dieselbe Strömungsform bei kleinen Rayleigh-Zahlen mit der Methode der direkten numerischen Simulation untersucht. Eine Folgerung ist deshalb, daß es entsprechend den Vorschlägen von Lumley & Khajeh-Nouri (1974) in der Tat vielversprechender erscheint, eine Transportgleichung für die molekulare Vernichtung  $V_g$  der skalaren Schwankungen  $\langle T'^2/2 \rangle$  zu lösen. In dieser Transportgleichung treten, ähnlich den Termen der Dissipationsgleichung, wiederum komplizierte Korrelationen höherer Ordnung auf, für die geeignete Näherungsannahmen eingeführt werden müssen. Die verschiedenen exakten Terme dieser Gleichung gewährleisten jedoch die Berücksichtigung von Schichtung, Ortsabhängigkeit, Rayleigh-Zahl und Fluid.

## 5. Schlußfolgerungen und Ausblick

### 5.1 Schlußfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, das die dreidimensionale, zeitabhängige Berechnung der Grobstruktur turbulenter Auftriebsströmungen in einfachen Geometrien ermöglicht. Gegenstand der Untersuchungen ist die Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft ( $Pr=0.71$ ,  $Ra=2.5 \cdot 10^6$ ,  $10^7$ ) und Natrium ( $Pr=0.006$ ,  $Ra=8.4 \cdot 10^4$ ,  $2.5 \cdot 10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^7$ ) und eine Wasserschicht mit interner Wärmequelle ( $Pr=7.0$ ,  $Ra_1=1.5 \cdot 10^{10}$ ). Durch die Analyse von Strukturen momentaner und die statistische Analyse räumlich und/oder zeitlich gemittelter Daten, wird einerseits ein Beitrag zur Aufklärung grundlegender strömungsmechanischer Vorgänge, andererseits im Hinblick auf technische Anwendungsfälle ein Beitrag zur Aufklärung der statistischen Eigenschaften turbulenter Naturkonvektion vor allem mit Fluiden kleiner Prandtl-Zahl bei mittleren und hohen Rayleigh-Zahlen geleistet.

Alle numerischen Simulationen werden mit dem Rechenprogramm TURBIT durchgeführt. Das diesem zugrundeliegende Impuls- und Wärmefeinstrukturmodell sowie die darin enthaltenen Randbedingungen sind für die Grobstruktursimulation von Naturkonvektion in horizontalen Kanälen aufgrund der fehlenden mittleren Grundströmung nicht geeignet.

Aus diesem Grund werden die zur Berechnung der Feinstrukturaustauschgrößen für Impuls- und Wärme verwendeten Energie-Längen-Schließungsmodelle methodisch erweitert. Als charakteristischer Geschwindigkeitsmaßstab der kleinskaligen turbulenten Bewegung wird die Transportgleichung der kinetischen Feinstrukturenergie gelöst. Eine Erweiterung ist die lokale Reduktion der charakteristischen Längenmaßstäbe im Bereich fester Berandungen, weil dort der turbulente Austausch normal zur Wand stark eingeschränkt ist. Auch in Bereichen stabiler Schichtung werden die charakteristischen Längenmaßstäbe mit Hilfe neu abgeleiteter Funktionen lokal reduziert, weil die kleinskalige Turbulenzbewegung dort gedämpft wird. Dabei führt, in Übereinstimmung mit experimentellen Daten und Ergebnissen aus direkten numerischen Simulationen, die stärkere Reduzierung der Feinstruktur-Längenmaßstäbe für Wärme gegenüber denen für Impuls zu einem Anstieg der turbulenten Prandtl-Zahl. Als besonders wichtig erweist sich die Anpassung der Modellkoeffizienten, die das Ergebnis eines Vergleichs dimensionsloser Spektren der Geschwindigkeits- und der Temperaturvarianz zwischen Grobstruktursimulationen und direkten numerischen Simulationen sind.

Auch der Einsatz von universellen Wandgesetzen gestaltet sich im Falle der Naturkonvektion als schwierig, wenn die Grenzschichten nicht durch das Maschennetz aufgelöst werden können. Zur Berechnung der momentanen, lokalen Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand wird deshalb eine Beziehung abgeleitet, die die momentanen, lokalen Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand mit den zeitlich gemittelten Gradienten der Geschwindigkeitsbeträge an der Wand verknüpft. Weil die zeitlich gemittelten Gradienten der Geschwindigkeitsbeträge an der Wand unabhängig vom Fluid bei gleichen Grashof-Zahlen ähnlich sind, kann für die Gradienten der Geschwindigkeitsbeträge an der Wand in Fluiden mit Prandtl-Zahlen ungleich eins der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Temperatur in Fluiden mit einer Prandtl-Zahl von eins Verwendung finden. In diesem Fall kann eine Be-

ziehung zwischen den Gradienten der Geschwindigkeitsbeträge und den Gradienten der Temperatur an der Wand hergestellt werden. Damit wird die Berechnung des momentanen, lokalen Gradienten der Geschwindigkeit an der Wand bei Naturkonvektion mit Fluiden beliebiger Prandtl-Zahl möglich. Die ebenfalls erforderliche Berechnung der momentanen, lokalen Gradienten der Temperatur an der Wand erfolgt über eine Beziehung, die sie mit den zeitlich gemittelten Gradienten der Temperatur an der Wand verknüpft. Für diese wird ein Zusammenhang abgeleitet, der ihre Berechnung mit Hilfe einer geeigneten Nusselt-Zahl-Korrelation oder einem von der Prandtl-Zahl abhängigen Temperaturwandgesetz ermöglicht.

Mit den erweiterten und neuen Methoden, Modellen und Wandbedingungen sind die notwendigen Voraussetzungen in TURBIT geschaffen, numerische Simulationen der Grobstruktur turbulenter Naturkonvektion durchzuführen. Ein Vergleich verschiedener numerischer Ergebnisse des Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes sowohl der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium als auch der Wasserschicht mit interner Wärmequelle, zeigt selbst bei der Verwendung relativ grober Gitter eine gute Übereinstimmung mit Daten aus direkten numerischen Simulationen und Experimenten.

Mit einigen numerischen Vorstudien wird untersucht, welche Anforderungen die untersuchten Anwendungsfälle an die Simulationsmethode stellen und welche Beschränkungen existieren. So sind bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft und Natrium die Periodenlängen des horizontalen Strömungskanals kritische Einflußparameter, wogegen sie bei der Wasserschicht mit interner Wärmequelle nur von untergeordneter Bedeutung sind. Die Ursache ist die starke räumliche und zeitliche Kopplung der im Falle der Rayleigh-Bénard-Konvektion durch den Mechanismus der Rayleigh-Taylor-Instabilität induzierten Ablösegebiete durch die jeweils gegenüberliegenden Wände. Sie führt dazu, daß mit steigender Rayleigh-Zahl die makroskopische Wellenlänge zunimmt. Diese Kopplung ist im Fall der Fluidschicht mit interner Wärmequelle nicht gegeben. Folglich nimmt hier die makroskopische Wellenlänge der im Bereich der oberen instabilen Grenzschicht ebenfalls durch den Mechanismus der Rayleigh-Taylor-Instabilität induzierten Ablösegebiete mit steigender Rayleigh-Zahl ab. Werden die Periodenlängen des Strömungskanals zu gering gewählt, dann haben die dadurch aufgeprägten kleineren makroskopischen Strukturen einen erhöhten Energieinhalt der Spektren der turbulenten kinetischen Energie sowie der Temperaturvarianz im niederfrequenten Wellenzahlbereich zur Folge. Die Untersuchung der räumlichen Auflösung zeigt, daß auch bei der Anwendung der Methode der Grobstruktursimulation nicht beliebig große Maschenweiten verwendet werden dürfen. Diese müssen vielmehr so gewählt werden, daß sie die im Bereich des Kolmogorov-Spektrums auftretenden Strukturen auflösen. Ist das nicht der Fall, dann ist ein zu hoher spektraler Energieinhalt der durch das zu grobe Maschennetz aufgelösten Skalen die Folge. Eine Untersuchung der wandnahen Bereiche zeigt die wichtige Bedeutung einer feinen räumlichen Auflösung der Grenzschichten oder aber den notwendigen Einsatz von Wandgesetzen für die Diskretisierung der diffusiven Terme in den Erhaltungsgleichungen. Die Vorstudien verdeutlichen, daß auch die Methode der Grobstruktursimulation nicht ohne eine genaue Spezifikation angewendet werden kann. Vorab sind vielmehr den betrachteten Anwendungsfall betreffende Informationen und Erkenntnisse erforderlich, um dessen grundlegende Anforderungen an eine numerische Simulation festzulegen, d.h. Periodenlängen, räumliche Auflösung sowie Rand- und Anfangsbedingungen auszuwählen, die physika-

lich richtige und sinnvolle, einer Überprüfung standhaltende Ergebnisse erzielt. Dieses Wissen muß in jede Simulation neu einfließen.

Bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Luft sind die räumlichen Strukturen und zeitlichen Abläufe im Geschwindigkeits- und im Temperaturfeld vergleichbar. Bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium existieren dagegen wesentliche Unterschiede zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld. Die Temperaturfelder sind durch großräumige Strukturen geprägt und weisen eine sehr langsame zeitliche Entwicklung auf, wogegen in den Geschwindigkeitsfeldern sowohl großräumige als auch sehr kleine Wirbelstrukturen für einen wesentlich schnelleren turbulenten Impulstransport sorgen. Die Analyse der Simulationsdaten zeigt, daß bei der Rayleigh-Zahl  $Ra=8.4 \cdot 10^4$  im Temperaturfeld noch kurzzeitig stark gestörte Bandstrukturen auftreten, jedoch die Entstehung von dreidimensionalen geschlossenen Zellen, in denen warmes Fluid aufwärts oder kaltes Fluid abwärts strömt, überwiegt. Mit zunehmender Rayleigh-Zahl werden diese durch das Temperaturfeld aufgeprägten makroskopischen Zellstrukturen größer. Sie zeigen nur eine relativ geringe räumliche und zeitliche Dynamik. An den hydrodynamischen Grenzschichträndern der untersuchten Natriumfälle treten kohärente, speichenartige Strukturen auf, die sich zu Knoten organisieren und die entstehenden Ablösegebiete an den Wänden formen. Die Strukturen der unteren Wand sind jeweils um eine halbe makroskopische Wellenlänge in beiden horizontalen Raumrichtungen gegenüber denen der oberen Wand versetzt. Bei höheren Rayleigh-Zahlen wird die turbulente Vermischung im Kernbereich des Kanals gegenüber molekularen Ausgleichvorgängen immer bestimmender. Das hat für Rayleigh-Zahlen  $Ra > 10^6$  die Ausbildung eines im zeitlichen Mittel isothermen Kernbereichs zur Folge. In dem betroffenen Bereich deutet sich das durch die Entstehung zunehmend unregelmäßigerer und kleinerer Strukturen im Temperaturfeld an. Eine statistische Analyse zeigt, daß dieser Sachverhalt mit einer Änderung der Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte aller physikalisch abhängigen Variablen, insbesondere jedoch der Temperatur, einhergeht. Die Schiefe der Temperatur hat bei hohen Rayleigh-Zahlen sowohl in der unteren als auch der oberen Kanalhälfte jeweils innerhalb und außerhalb der thermischen Grenzschichten einen Vorzeichenwechsel und die Werte der Flachheit der Temperatur deuten an, daß die deterministischen Zeitsignale einen unregelmäßigeren Charakter erhalten. Das ist auch eine Erklärung für die mit steigender Rayleigh-Zahl abnehmenden Temperaturvarianzwerte. Dieses Verhalten ist, wenngleich nicht ganz so ausgeprägt, ebenso bei einer statistischen Analyse der Geschwindigkeitsfelder zu beobachten. Ein weiteres Ergebnis ist, daß der Luftfall mit  $Ra=10^7$  und der Natriumfall mit  $Ra=8.4 \cdot 10^4$  trotz ganz unterschiedlicher Rayleigh-Zahlen eine große Ähnlichkeit der kleinräumigen Strukturen im Geschwindigkeitsfeld zeigen. Der Grund ist die vergleichbare Grashof-Zahl beider Fälle, die als einziger Einflußparameter der viskosen Diffusionsterme in den Impulsgleichungen diese Ähnlichkeit bewirkt. Die Simulationsergebnisse bestätigen außerdem, daß in den Natriumfällen aufgrund der hohen Wärmeleitfähigkeit dieses Flüssigmetalls und im Gegensatz zu den Luftfällen keine thermische Übergangsschicht zwischen der Wärmeleitungsunterschicht und der Konvektionsschicht existiert, in der der Temperaturgradient  $dT^+/dz^+$  einen  $z^{+2}$ -Verlauf aufweist. An die Wärmeleitungsunterschicht mit einem konstanten Verlauf schließt sich vielmehr sofort die Konvektionsschicht mit dem typischen  $z^{+4/3}$ -Verlauf an.

Die Auswertung von exakten Termen der Dissipationsgleichung zeigt, daß für die Fluide Luft und Natrium im Kernbereich des Kanals bei hohen Grashof-Zahlen ein lokales Gleichgewicht zwischen der Produktion durch Wirbelfadenstrecken und der molekularen Vernichtung existiert. Bei niedrigen Grashof-Zahlen existiert dagegen eine Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl. Während im Luftfall mit  $Ra=6.3 \cdot 10^5$  der zuvor erwähnte Sachverhalt gilt, ist bei einer ähnlichen Grashof-Zahl im Natriumfall mit  $Ra=6.0 \cdot 10^3$  auch der turbulente diffusive Transport von Bedeutung. Die Kopplung der Dissipationsgleichung mit dem Temperaturfeld verschwindet bei hohen Grashof-Zahlen in Bereichen lokalisotroper Turbulenz, weil alle Korrelationstensoren erster Ordnung, d.h. insbesondere auch die Produktion durch Auftrieb, statistisch invariant gegenüber Translationen und Rotationen des vorgegebenen Koordinatensystems und damit identisch Null sind. Innerhalb der hydrodynamischen Grenzschichten sind grundsätzlich alle Terme der Dissipationsgleichung von Bedeutung und an der Wand existiert in allen Fällen ein Gleichgewicht zwischen molekularer Diffusion und molekularer Vernichtung. Der Modellierungsansatz für den turbulenten diffusiven Transport durch Geschwindigkeitsschwankungen zeigt für das Fluid Natrium gute Ergebnisse. Das gilt auch für das Fluid Luft, wenn der Ansatz gleichzeitig für den turbulenten diffusiven Transport durch Druckschwankungen verwendet wird. Der Modellierungsansatz für die Produktion durch Wirbelfadenstrecken und die molekulare Vernichtung hat den Nachteil, daß der in ihm enthaltene Quellterm einen Temperaturgradienten beinhaltet. Gerade dieser verschwindet jedoch im hier isothermen Kernbereich. Der im Modell enthaltene Senkenterm zeigt dagegen ein gutes Ergebnis, wenngleich die ausgewerteten Modellkoeffizienten  $c_{2E}$  für Luft und Natrium einen größeren als den in der Literatur verwendeten Wert aufweisen.

Die Auswertung von exakten Termen der Temperaturvarianzgleichung zeigt, daß in den Natriumfällen bei unterschiedlichen Rayleigh-Zahlen verschiedene Transportmechanismen von Bedeutung sind. Der Grund ist das unterschiedliche Verhalten der Strömung inner- und außerhalb der thermischen Grenzschichten, die bei  $Ra=8.4 \cdot 10^4$  noch fast bis zur Kanalmitte reichen, bei  $Ra=10^7$  dagegen durch einen ausgeprägten isothermen Kernbereich getrennt werden. Im ersten Fall ist der turbulente diffusive Transport in Kanalmitte ein Senkenterm, der zusammen mit dem molekularen Vernichtungsterm die Produktion durch das mittlere Temperaturfeld bilanziert. Im zweiten Fall ist die Produktion im isothermen Kernbereich identisch Null und der turbulente diffusive Transport als Quelle durch Umverteilungsprozesse der entscheidende Mechanismus zur Herstellung des Gleichgewichts mit der molekularen Vernichtung. Das gilt auch für die analysierten Luftfälle. Innerhalb der thermischen Grenzschichten sind alle Terme der Temperaturvarianzgleichung von Bedeutung und an der Wand existiert in allen Fällen ein Gleichgewicht zwischen molekularer Diffusion und molekularer Vernichtung. Der Modellierungsansatz für die turbulente Diffusion erweist sich als unzureichend, weil der dort eingehende Gradient der Temperaturvarianz in Teilbereichen des Kanals verschwindet. Das Zeitskalenverhältnis  $R$  im Schließungsansatz der molekularen Vernichtung hat, so das Ergebnis der hier ausgewerteten Auftriebsströmungen, keinen konstanten Wert, sondern ist vom Fluid, von der Rayleigh-Zahl und vom Ort abhängig.

Generell kann festgehalten werden, daß Gradientenannahmen in Modellansätzen dann Aussicht auf Erfolg haben, wenn die Gradienten der betrachteten Größen in den Bereichen, in denen die exakten Terme von Bedeutung sind, nicht verschwinden. Sie sind deshalb auch für

die statistische Turbulenzmodellierung von Auftriebsströmungen nicht grundsätzlich ungeeignet, wie der gute Ergebnisse liefernde Ansatz für die turbulente Diffusion in der Dissipationsgleichung zeigt. Die weniger guten Ergebnisse der Gradientenansätze für die Produktion in der Dissipationsgleichung und die turbulente Diffusion in der Temperaturvarianzgleichung verdeutlichen jedoch, daß die Kenntnis über den prinzipiellen Verlauf der exakten Terme eines bestimmten Anwendungsfalls die Voraussetzung für eine erfolgreiche Modellierung ist.

## 5.2 Ausblick

Aufbauend auf den im Rahmen dieser Arbeit erweiterten und neuen Feinstrukturmodellen und Randbedingungen für Naturkonvektion, folgt für die Zukunft eine Reihe weiterer Ansatzpunkte.

Dies ist zunächst die Anwendung der entwickelten Methoden für numerische Simulationen von Auftriebsströmungen bei hohen, im Bezug auf reale Strömungen realistischeren Rayleigh-Zahlen. Von Interesse ist z.B. die Untersuchung des Rayleigh-Bénard-Problems mit Flüssigmetallen und Luft für den Rayleigh-Zahlenbereich  $Ra > 10^7$ . Bei diesem Anwendungsfall ist die Untersuchung der makroskopischen Wellenlänge bei hohen Rayleigh-Zahlen von besonderem Interesse. Um Fortschritte bei der Erforschung von Auftriebsströmungen mit instabil und stabil geschichteten Bereichen zu erzielen, ist die Durchführung von weiteren Grobstruktursimulationen der Fluidschicht mit interner Wärmequelle oder des beheizten horizontalen Ringspaltes möglich.

Ein weiterer Ansatzpunkt ist die Erweiterung der neuen Methoden. Im Bezug auf die Feinstrukturmodellierung werden bisher sowohl die kinetische Feinstrukturenergie als charakteristischer Geschwindigkeitsmaßstab und im Falle einer lokal stabilen Schichtung die charakteristischen Längenmaßstäbe der kleinskaligen Turbulenz dynamisch als Funktion von Ort und Zeit berechnet. Hier ist eine dynamische Berechnung der Modellkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  als Funktion von Ort und Zeit anzustreben, um dem Modell einerseits die Fähigkeit zu geben, die aufgelöste Grobstruktur entsprechend dem dissipativen Charakter der kleinen Skalen zu dämpfen, andererseits jedoch auch eine Anfachung der Grobstruktur durch die kleinen Skalen zuzulassen (backscatter). Ebenso anzustreben ist die Erweiterung der Geschwindigkeitsrandbedingungen. Sie besitzen bisher aufgrund von getroffenen Einschränkungen bei deren Herleitung nur für die instabile Schichtung Gültigkeit.

Für die Auswertung exakter Terme in den Transportgleichungen statistischer Turbulenzmodelle sowie deren Modellierung ist es notwendig, auch Analysemöglichkeiten für die vielfältigen Dämpfungsfunktionen, wie sie in "low Reynolds-Modellen" verwendet werden, bereitzustellen. Anstrebenswert ist außerdem die Bereitstellung neuer Analysemöglichkeiten, die eine Auswertung exakter Terme der Transportgleichung für die molekulare Vernichtung von Temperaturvarianz sowie deren Modellierung ermöglichen. Desweiteren kann die jetzt vorhandene Datenbasis auch zukünftig genutzt werden, um neue, für Auftriebsströmungen geeignete Schließungsansätze zu entwickeln.



## Literaturverzeichnis

- D. Angirasa, F.T.M. Nieuwstadt (1991)  
*Large eddy simulation of Rayleigh-Bénard convection*  
Proceedings of the 8th Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, pp.99-101
- D. Angirasa, F.T.M. Nieuwstadt (1992)  
*The mean temperature profile and the flux-profile relation in turbulent thermal convection*  
International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 19, pp. 395-408
- B. Aupoix (1989)  
*Application of two-point closures to subgrid scale modelling for homogeneous, 3D turbulence*  
von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 03
- R.M. Beam, R.F. Warming (1982)  
*Implicit numerical methods for the compressible Navier-Stokes equations*  
von Kármán Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 04
- H. Bénard (1900)  
*Les tourbillions cellulaires dans une nappe liquide, Première partie: Description générale des phénomènes, pp. 1261-1271, Deuxième partie: Procédés mécaniques et optiques d'examen lois numériques des phénomènes, pp. 1309-1328*  
Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées et Bulletin de l'Avancement des Sciences, Paris
- H.A. Borgwaldt (1990)  
*CRESOR, a robust vectorized Poisson solver implemented in the COMMIX-2(V) thermal-hydraulics code*  
Proceedings of the Joint Conference on Mathematical Methods and Supercomputing in Nuclear Applications, Mito, Japan, pp. 346-351
- J. Boussinesq (1877)  
*Theorie de l'écoulement tourbillant*  
Mém. de l'Académie des Sciences XXIII, Paris, Vol. 46
- J. Boussinesq (1903)  
*Theorie analytique de la chaleur*  
Gauthier-Villars, Paris, Vol. 2
- K. Bremhorst, L. Krebs (1992)  
*Experimentally determined turbulent Prandtl numbers in liquid sodium at low Reynolds numbers*  
International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 35, pp. 351-359
- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew (1987)  
*Taschenbuch der Mathematik*  
Harri Deutsch Verlag, Thun, Frankfurt am Main, 23. Auflage
- J.A. Businger (1973)  
*A note on free convection*  
Boundary Layer Meteorology, Vol. 4, pp. 323-326

- R. Cheesewright (1986)  
*The scaling of turbulent natural convection boundary layers in the asymptotic limit of infinite Grashof number*  
 Proceedings of the EUROMECH Colloquium No. 207, Delft, the Netherlands, pp. 198-201
- C.J. Chen, W. Rodi (1975)  
*A mathematical model for stratified turbulent flows and its application to buoyant jets*  
 Proceedings of the 16th IAHR Congress, São Paulo, Brasil, pp. 114-118
- A.J. Chorin (1968)  
*Numerical solution of the Navier-Stokes equations*  
 Mathematics of Computation, Vol. 22, pp. 745-762
- S.L. Christie, J.A. Domaradzki (1993)  
*Numerical evidence for non universality of the soft/hard turbulence classification for thermal convection*  
 Physics of Fluids A, Vol. 5, pp. 412-421
- T.Y. Chu, R.J. Goldstein (1973)  
*Turbulent convection in a horizontal layer of water*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 60, No. 1, pp. 141-159
- M.K. Chung, H.C. Yun, R.J. Adrian (1992a)  
*Scale analysis and wall-layer model for the temperature profile in a turbulent thermal convection*  
 International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 35, No. 1, pp. 43-51
- M.K. Chung, H.C. Park, N.H. Kyong (1992b)  
*Comparative study of various computational models for triple moments of velocity and scalar in second-order closure*  
 International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 35, No. 10, pp. 2563-2570
- D. Coles (1978)  
*A model for flow in the viscous sublayer*  
 Proceedings of the Workshop on Coherent Structure of Turbulent Boundary Layers, Lehigh University, Bethlehem, Israel, pp. 212-215
- L. Davidson (1990)  
*Calculation of the turbulent buoyancy-driven flow in a rectangular cavity*  
 Numerical Heat Transfer A, Vol. 18, pp. 129-147
- J.W. Deardorff (1970a)  
*A three-dimensional numerical investigation of the idealized planetary boundary layer*  
 Geophysical Fluid Dynamics, Vol. 1, pp. 377-410
- J.W. Deardorff (1970b)  
*Preliminary results from numerical integrations of the unstable planetary boundary layer*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 27, pp. 1209-1211
- J.W. Deardorff (1970c)  
*Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for Rayleigh convection*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 27, pp. 1211-1213

- J.W. Deardorff (1971)  
*On the magnitude of the subgrid scale eddy coefficient*  
 Journal of Computational Physics, Vol. 7, pp. 120-133
- J.W. Deardorff (1972a)  
*Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 29, pp. 91-115
- J.W. Deardorff (1972b)  
*Parameterization of the planetary boundary layer for use in general circulation models*  
 Monthly Weather Review, Vol. 100, pp. 93-105
- J.W. Deardorff (1973)  
*The use of subgrid transport equations in a three dimensional model of atmospheric turbulence*  
 Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, pp. 429-438
- J.W. Deardorff (1980)  
*Stratocumulus-capped mixed layers derived from a three-dimensional model*  
 Boundary Layer Meteorology, Vol. 18, pp. 495-527
- J.W. Deardorff, G.E. Willis (1967)  
*Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 28, No. 4, pp. 675-704
- J.W. Deardorff, G.E. Willis (1985)  
*Further results from a laboratory model of the convective planetary boundary layer*  
 Boundary Layer Meteorology, Vol. 33, pp. 205-236
- W.R. Debler (1966)  
*On the analogy between thermal and rotational hydrodynamic stability*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 24, pp. 165-175
- J. Dekeyser, B.E. Launder (1983)  
*A comparison of triple moment temperature-velocity correlations in the asymmetric heated jet with alternative closure*  
 in: Turbulent Shear Flows, Vol. 4, pp. 102-120, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin
- A.J. Dyer (1974)  
*A review of flux-profile relationships*  
 Boundary Layer Meteorology, Vol. 7, pp. 363-372
- T.M. Eidson (1982)  
*Numerical simulation of the turbulent Rayleigh-Bénard problem using subgrid modelling*  
 Dissertation University of Michigan
- T.M. Eidson (1985)  
*Numerical simulation of the turbulent Rayleigh-Bénard problem using subgrid modelling*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 158, pp. 245-268
- H. Fasel (1979)  
*Numerische Simulation inkompressibler viskoser Strömungen*  
 Habilitationsschrift Universität Stuttgart

- W.K. George, S.P. Capp (1979)  
*A theory for natural convection turbulent boundary layers next to heated surfaces*  
 International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 22, pp. 813-826
- W.K. George, D.B. Taulbee (1992)  
*Designing experiments to test closure hypotheses*  
 Experimental Thermal and Fluid Science, Vol. 5, pp. 249-259
- M. Germano (1992)  
*Turbulence: The filtering approach*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 238, pp. 325-336
- M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W.H. Cabot (1991)  
*A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model*  
 Physics of Fluids A, Vol. 3, No. 7, pp. 1760-1765
- T. Gerz, U. Schumann, S.E. Elghobashi (1989)  
*Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 200, pp. 563-594
- T. Gerz, U. Schumann (1991)  
*Direct simulation of homogeneous turbulence and gravity waves in sheared and unsheared stratified flows*  
 in: Turbulent Shear Flows, Vol. 7, pp. 27-45, editors: F. Durst et al., Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- R.Y. Goldstein, T.Y. Chu (1969)  
*Thermal convection in a horizontal layer of air*  
 Progress in Heat and Mass Transfer, Vol. 2, pp. 55-75
- D.D. Gray, A. Giorgini (1976)  
*The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases*  
 International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 19, pp. 545-551
- G. Grötzbach (1977)  
*Direkte numerische Simulation turbulenter Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfelder bei Kanalströmungen*  
 Dissertation Universität Karlsruhe (TH), KfK 2426
- G. Grötzbach (1979)  
*Numerical investigation of radial mixing capabilities in strongly buoyancy-influenced vertical, turbulent channel flows*  
 Nuclear Engineering and Design, Vol. 54, No. 1, pp. 49-66
- G. Grötzbach (1982)  
*Direct numerical simulation of laminar and turbulent Bénard convection*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 119, pp. 27-53
- G. Grötzbach (1983)  
*Spatial resolution requirements for direct numerical simulation of the Rayleigh-Bénard convection*  
 Journal of Computational Physics, Vol. 49, No. 2

- G. Grötzbach (1986)  
*Application of the TURBIT-3 subgrid scale model to scales between large eddy and direct numerical simulation*  
 in: Notes on Numerical Fluid Dynamics, Vol. 15, pp. 210-226, editors: E.H. Hirschel, M. Pandolfi, A. Rizzi, Vieweg Verlag, Braunschweig
- G. Grötzbach (1987)  
*Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows*  
 in: Encyclopaedia of Fluid Mechanics, Vol. 6, pp. 1337-1391, editor: N.P. Cheremisinoff, Gulf Publishing Company
- G. Grötzbach (1988)  
*Turbulent heat transfer in an internally heated fluid layer*  
 Proceedings of the 3rd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, pp. 199-206
- G. Grötzbach (1989)  
*Numerische Simulation turbulenter Konvektion in Kanälen*  
 Tagungsband anlässlich des Symposiums zur Vorstellung des Projektes ODIN und zur Inbetriebnahme des Höchstleistungsrechners Siemens VP400-EX, pp. 113-131
- G. Grötzbach, M. Wörner (1992)  
*Analysis of second order transport equations by numerical simulation of turbulent convection in liquid metals*  
 Proceedings of the 5th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-5), Salt Lake City, USA, Vol. 2, pp. 358-365
- G. Grötzbach, M. Wörner (1993a)  
*Analysis of flow mechanisms in Rayleigh-Bénard convection at small Prandtl-numbers*  
 Proceedings of the Joint International Conference on Mathematical Methods and Supercomputing in Nuclear Applications, Karlsruhe, Germany, Vol. 1, pp. 236-247
- G. Grötzbach, M. Wörner, E. Hesselschwerdt (1993b)  
*Visualisation of three-dimensional time-dependent flow mechanisms in turbulent convection*  
 Proceedings of the Joint International Conference on Mathematical Methods and Supercomputing in Nuclear Applications, Karlsruhe, Germany, Vol. 2, pp. 793-794
- K. Hanjalic, B.E. Launder (1972)  
*A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 52, pp. 609-638
- R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn (1990)  
*Numerical determination of wall functions for the turbulent natural convection boundary layer*  
 International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 33, No. 6, pp. 1087-1097
- I. Hiltner (1993)  
 unveröffentlichter Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- J. Hinze (1975)  
*Turbulence*  
 McGraw Hill, Series in Mechanical Engineering, Second Edition

- H. Hoffmann, H. Kamide, K. Marten, H. Ohshima, D. Weinberg (1991)  
*Investigation on the transition from forced to natural convection for the pool type EFR in the 3d RAMONA model*  
 Proceedings of the International Conference on Fast Reactors and Related Fuel Cycles, Kyoto, Japan, Vol. 3, pp. 138-144
- A.A.M. Holtslag, A.P. van Ulden (1983)  
*A simple scheme for daytime estimates of the surface fluxes from routine weather data*  
 Journal of Climate and Applied Meteorology, Vol. 22, pp. 517-529
- M.S. Hossain (1980)  
*Mathematische Modellierung von turbulenten Auftriebsströmungen*  
 Forschungsbericht Sonderforschungsbereich 80, Universität Karlsruhe (TH), SFB 80/T/162
- M.S. Hossain, W. Rodi (1982)  
*A turbulence model for buoyant flows and its application to vertical buoyant jets*  
 in: Turbulent jets and plumes, pp. 121-178, editor: W. Rodi, Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt
- M. Jahn (1975)  
*Holographische Untersuchung der freien Konvektion in einer Kernschmelze*  
 Dissertation Universität Hannover
- W.P. Jones, B.E. Launder (1972)  
*The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence*  
 International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301-314
- W.P. Jones, B.E. Launder (1973)  
*The calculation of low Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence*  
 International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 16, pp. 1119-1130
- T. von Kármán (1930)  
*Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz*  
 Nachrichten der Gesellschaft für Akademische Wissenschaften Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse
- Z. Kawara, I. Kishiguchi, I. Michiyoshi (1990)  
*Characteristics of plumes in turbulent thermal convection in a horizontal fluid layer*  
 Proceedings of the 9th International Heat Transfer Conference, Jerusalem, Israel, Vol. 2, pp. 537-542
- V. Kek (1989)  
*Bénard Konvektion in flüssigen Natriumschichten*  
 Dissertation Universität Karlsruhe (TH), KfK 4611
- V. Kek, U. Müller (1993)  
*Low Prandtl number convection in layers heated from below*  
 International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 36, No. 11, pp. 2795-2804
- R. Kessler (1993)  
*Near-wall modelling of the dissipation rate equation using DNS data*  
 in: Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2, pp. 113-122, editors: W. Rodi, F. Martinelli, Elsevier, Amsterdam, London, New York, Tokyo

- J.U. Knebel (1993)  
*Experimentelle Untersuchungen in turbulenten Auftriebsstrahlen in Natrium*  
 Dissertation Universität Karlsruhe (TH), KfK 5175
- J.U. Knebel, L. Krebs, U. Müller (1993)  
*Experimental investigation of turbulent mixed convection in liquid sodium flow*  
 Proceedings of the 6th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics  
 (NURETH-6), Grenoble, France, pp. 221-228
- A.N. Kolmogorov (1941a)  
*Die lokale Struktur der Turbulenz in einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen*  
 in: Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz, pp. 71-76, Editor: H. Goering, Akademie Verlag, Berlin
- A.N. Kolmogorov (1941b)  
*Die Energiedissipation für lokalisotrope Turbulenz*  
 in: Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz, pp. 77-82, Editor: H. Goering, Akademie Verlag, Berlin
- R.H. Kraichnan (1962)  
*Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number*  
 Physics of Fluids, Vol. 5, pp. 1374-1389
- J. Laufer (1954)  
*The structure of turbulence in a fully developed pipe flow*  
 NACA report 1174
- B.E. Launder (1973)  
*Turbulence models and their experimental verification: II. Scalar property transport by turbulence*  
 Imperial College, Department of Mechanical Engineering, Report HTS/73/26
- B.E. Launder (1975)  
*On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 67, pp. 569-581
- B.E. Launder (1976a)  
*Prediction Methods for Turbulent Flows: Progress in the modelling of turbulent transport*  
 von Kármán Institute for Fluid Mechanics, Lecture Series 76
- B.E. Launder (1976b)  
*Heat and Mass Transport*  
 in: Turbulence, Topics in Applied Physics, Vol. 12, pp. 231-287, editor: P. Bradshaw, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin
- B.E. Launder, G.J. Reece, W. Rodi (1975)  
*Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 68, pp. 537-566
- S.P. Lawrence (1989)  
*Turbulence modelling in naturally convecting fluids*  
 Culham Laboratories, CLM-R292

- A. Leonard (1974)  
*Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows*  
in: *Turbulent Diffusion in Environmental Pollution*, Vol. 18A, pp. 237-248, editors: F.N. Frenhiel, R.E. Munn, Academic Press, New York, San Francisco, London
- D.K. Lilly (1962)  
*On the numerical simulation of buoyant convection*  
*Tellus*, Vol. 14, No. 2, pp. 148-172
- J.L. Lumley (1975)  
*Prediction Methods for Turbulent Flows: Introduction*  
von Kármán Institute for Fluid Mechanics, Lecture Series 76
- J.L. Lumley (1978)  
*Computational modelling of turbulent flows*  
in: *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 123-176, Academic Press, London, New York, San Francisco
- J.L. Lumley, B. Khajeh-Nouri (1974)  
*Computation of turbulent transport*  
*Advances in Geophysics*, Vol. 18, pp. 169-192
- W.V.R. Malkus (1954)  
*Discrete transitions in turbulent convection*  
*Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 255, pp. 185-195
- N.N. Mansour, J. Kim, P. Moin (1988)  
*Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow*  
*Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 194, pp. 15-44
- N.N. Mansour, J. Kim, P. Moin (1989)  
*Near-wall  $k$ - $\epsilon$  turbulence modelling*  
*AIAA Journal*, Vol. 27, pp. 1068-1073
- P.J. Mason (1989)  
*Large-eddy simulation of the convective atmospheric boundary layer*  
*Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 46, No. 11, pp. 1492-1516
- P.J. Mason, N.S. Callen (1986)  
*On the magnitude of the subgrid-scale eddy coefficient in large-eddy simulations of turbulent channel flow*  
*Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 162, pp. 439-462
- P.J. Mason, D.J. Thomson (1992)  
*Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers*  
*Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 242, pp. 51-78
- H. Mauch (1991)  
*Berechnung der 3-D Umströmung eines quaderförmigen Körpers im Kanal*  
Dissertation Universität Karlsruhe (TH)
- G.L. Mellor, T. Yamada (1974)  
*A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers*  
*Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 31, pp. 1791-1806

- G.L. Mellor, T. Yamada (1982)  
*Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems*  
 Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 20, No. 4, pp. 851-875
- C.H. Moeng (1984)  
*A large-eddy simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 41, No. 13, pp. 2052-2062
- C.H. Moeng, J.C. Wyngaard (1988)  
*Spectral analysis of large-eddy simulations of the convective boundary layer*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 45, No. 23, pp. 3573-3587
- C.H. Moeng, R. Rotunno (1990)  
*Vertical-velocity skewness in the buoyancy-driven boundary layer*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 47, No. 9, pp. 1149-1162
- A.S. Monin, A.M. Obuchow (1954)  
*Fundamentale Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Vermischung in der bodennahen Schicht der Atmosphäre*  
 in: Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz, pp. 199-226, Editor: H. Goering, Akademie Verlag, Berlin
- Y. Nagano, M. Tagawa, T. Tsuji (1991)  
*An improved two-equation heat transfer model for wall turbulent shear flows*  
 Proceedings of the ASME/ISME Thermal Engineering Joint Conference, Reno, USA, Vol. 3, pp. 233-240
- C.L.M.H. Navier (1822)  
*Mémoire sur les lois du mouvements des fluides*  
 Mém. de l'Academie des Sciences, Vol. 6, pp. 389-416
- F.T.M. Nieuwstadt (1990)  
*Direct and large-eddy simulation of free convection*  
 Proceedings of the 9th International Heat Transfer Conference, Jerusalem, Israel, Vol. 1, pp. 37-47
- F.T.M. Nieuwstadt, R.A. Brost, T.L. van Stijn (1985)  
*Decay of convective turbulence, a large eddy simulation*  
 in: Direct and Large Eddy Simulation of Turbulence, pp. 304-317, editors: U. Schumann, R. Friedrich, Vieweg Verlag, Braunschweig
- F.T.M. Nieuwstadt, R.A. Brost. (1986)  
*The decay of convective turbulence*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 43, No. 6, pp. 532-546
- F.T.M. Nieuwstadt, P.J. Mason, C.H. Moeng, U. Schumann (1991)  
*Large eddy simulation of the convective boundary layer: a comparison of four computer codes*  
 Proceedings of the 8th Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, pp. 343-367
- H. Ninokata (1990)  
*Advances in computer simulation of fast breeder reactor thermohydraulics*  
 Proceedings of the Joint International Conference on Mathematical Methods and Supercomputing in Nuclear Applications, Mito, Japan, pp. 80-85

- V.C. Patel, W. Rodi, G. Scheurer (1985)  
*Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review*  
 AIAA Journal, Vol. 23, No. 9, pp. 1308-1319
- C.A. Paulson (1970)  
*The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer*  
 Journal of Applied Meteorology, Vol. 9, pp. 856-861
- U. Piomelli, J. Ferziger, P. Moin (1989)  
*New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows*  
 Physics of Fluids A, Vol. 1, No. 6, pp. 1061-1068
- L. Prandtl (1925)  
*Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*  
 Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 5, No. 2, pp. 136-139
- L. Prandtl (1945)  
*Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz*  
 Nachrichten der Gesellschaft für Akademische Wissenschaften Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse
- C.H.B. Priestley (1955)  
*Convection from a large horizontal surface*  
 Australian Journal of Physics, Vol. 7, pp. 176-198
- S. Rajagopalan, R.A. Antonia (1979)  
*Some properties of the large structure in a fully developed turbulent duct flow*  
 Physics of Fluids, Vol. 22, No. 4, pp. 614-622
- L. Rayleigh (1916)  
*On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side*  
 Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 32, No. 192, pp. 529-546
- O. Reynolds (1894)  
*On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*  
 Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 186, pp. 123-164
- W. Rodi (1971)  
*On the equation governing the rate of turbulent energy dissipation*  
 Imperial College, Department of Mechanical Engineering, Report TM/TN/A/4
- W. Rodi (1984)  
*Turbulence models and their application in hydraulics - A state of the art review*  
 International Association for Hydraulic Research, Second Revised Edition
- W. Rodi (1987)  
*Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids*  
 Journal of Geophysical Research, Vol. 92, No. C5, pp. 5305-5328
- W. Rodi (1993)  
*Prediction Methods for Turbulent Flows: Examples of turbulence model applications*  
 von Kármán Institute for Fluid Mechanics, Lecture Series 76

- W. Rodi, N.N. Mansour (1990)  
*Modeling the dissipation-rate equation with the aid of direct simulation data*  
 Proceedings of the Summer Program 1990, Center for Turbulence Research, Stanford University, pp. 17-38
- W. Rodi, N.N. Mansour (1993)  
*Low-Reynolds number  $k$ - $\epsilon$  modelling with the aid of direct simulation data*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 250, pp. 509-529
- J.C. Rotta (1951a)  
*Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 1. Mitteilung*  
 Zeitschrift für Physik, Vol. 129, pp. 547-572
- J.C. Rotta (1951b)  
*Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 2. Mitteilung*  
 Zeitschrift für Physik, Vol. 131, pp. 51-77
- J.C. Rotta (1972)  
*Turbulente Strömungen*  
 B.G. Teubner-Verlag, Stuttgart
- K. Satoh, H. Miyakoshi (1989)  
*Study of decay heat removal by natural circulation*  
 Proceedings of the 4th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-4), Karlsruhe, Germany, Vol. 1, pp. 378-383
- C.E. Schemm, F.B. Lipps (1976)  
*Some results from a simplified three-dimensional numerical model of atmospheric turbulence*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 33, pp. 1021-1041
- H. Schlichting (1958)  
*Grenzschichttheorie*  
 G. Braun Verlag, Karlsruhe
- H. Schmidt (1988)  
*Grobstruktur-Simulation konvektiver Grenzschichten*  
 Dissertation Ludwig-Maximilians-Universität München, DFVLR-FB 88-30
- H. Schmidt, U. Schumann, U. Volkert, W. Ulrich (1984)  
*Three-dimensional, direct and vectorized elliptic solvers for various boundary conditions*  
 DFVLR-Mitteilung 84-15
- H. Schmidt, U. Schumann (1989)  
*Coherent structure of the convective boundary layer derived from large eddy simulations*  
 Journal of Fluid Mechanics. Vol. 200, pp. 511-562
- L. Schmitt (1988)  
*Grobstruktursimulation turbulenter Grenzschicht-, Kanal- und Stufenströmungen*  
 Dissertation Technische Universität München
- U. Schumann (1973)  
*Ein Verfahren zur direkten Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen*  
 Dissertation Universität Karlsruhe (TH), KfK 1854

- U. Schumann (1975)  
*Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli*  
 Journal of Computational Physics, Vol. 18, pp. 376-404
- U. Schumann (1988)  
*Minimum friction velocity and heat transfer in the rough surface layer of a convective boundary layer*  
 Boundary Layer Meteorology, Vol. 44, pp. 311-326
- U. Schumann (1991)  
*Subgrid length-scales for large eddy simulation of stratified turbulence*  
 Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol. 2, pp. 279-290
- C. Seiter (1992)  
 unveröffentlichter Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- C. Seiter (1993)  
 unveröffentlichter Bericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe
- J. Smagorinsky (1958)  
*On the numerical integration of the primitive equations of motion for baroclinic flow in a closed region*  
 Monthly Weather Review, Vol. 86, No. 12, pp. 457-466
- J. Smagorinsky (1963)  
*General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment*  
 Monthly Weather Review, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164
- D.B. Spalding (1971)  
*Concentration fluctuations in a round turbulent free jet*  
 Chemical Engineering Science, Vol. 26, pp. 95-167
- E.M. Sparrow, R.J. Goldstein, V.K. Jonsson (1964)  
*Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions on non-linear temperature profile*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 18, pp. 513-528
- G.G. Stokes (1845)  
*On the theories of internal friction of fluids in motion*  
 Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 8, pp. 287-305
- K. Sugiyama, Y. Ma, R. Ishiguro (1991)  
*Laminar natural convection heat transfer from a horizontal circular cylinder in liquid metals*  
 Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, Vol. 113, pp. 91-96
- R.I. Sykes, D.S. Henn (1989)  
*Large-eddy simulation of turbulent sheared convection*  
 Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 46, No. 7, pp. 1106-1118
- F. Tamanini (1977)  
*An improved version of the k-ε-g model of turbulence and its application to axisymmetric forced and buoyant jets*  
 Factory Mutual Research, Technical Report 22360-4/RC 77-BT-4

- H. Tennekes, J.L. Lumley (1972)  
*A first course in turbulence*  
 The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London
- A.A. Townsend (1959)  
*Temperature fluctuations over a heated horizontal surface*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5, pp. 209-241
- A. Walz (1966)  
*Strömungs- und Temperaturgrenzschichten*  
 G. Braun Verlag, Karlsruhe
- P.M. Watson (1968)  
*Classical cellular convection with a spatial heat source*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 32, pp. 399-411
- C.A.G. Webster (1964)  
*An experimental study of turbulence in a density stratified shear flow*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 19, pp. 221-245
- J. Weinstock (1989)  
*A theory of turbulent transport*  
 Journal of Fluid Mechanics, Vol. 203, pp. 319-338
- M. Wörner (1994)  
*Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium*  
 Dissertation Universität Karlsruhe (TH), KfK 5228
- M. Wörner, G. Grötzbach (1992)  
*Analysis of semi-implicit time integration schemes for direct numerical simulation of turbulent convection in liquid metals*  
 in: Notes on Numerical Fluid Mechanics, pp. 542-551, editors: J.B. Vos, A. Rizzi, I.L. Ryming, Vieweg Verlag, Braunschweig
- M. Wörner, G. Grötzbach (1993a)  
*Contributions to turbulence modelling of natural convection in liquid metals by direct numerical simulation*  
 Proceedings of the Joint International Conference on Mathematical Methods and Supercomputing in Nuclear Applications, Karlsruhe, Germany, Vol. 1, pp. 224-235
- M. Wörner, G. Grötzbach (1993b)  
*Turbulent heat flux balance for natural convection in air and sodium analysed by direct numerical simulations*  
 Proceedings of the 5th International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Paris, France, pp. 335-342
- M. Wörner, G. Grötzbach (1993c)  
*Analysis of diffusion of turbulent kinetic energy by numerical simulations of natural convection in liquid metals*  
 Proceedings of the 6th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-6), Grenoble, France, Vol. 1, pp. 186-193
- J.C. Wyngaard (1975)  
*Modeling the planetary boundary layer - Extension to the stable case*  
 Boundary Layer Meteorology, Vol. 9, pp. 441-460

J.C. Wyngaard, R.A. Brost (1984)

*Top-down and bottom-up diffusion of a scalar in the convective boundary layer*  
Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 41, No. 1, pp. 102-112

H.C. Yun, M.K. Chung (1988)

*Experimental study of turbulent thermal convection between two flat plates*  
KSME, Vol. 12, pp. 1138-1149

J. Zierep (1982a)

*Grundzüge der Strömungslehre*  
G. Braun Verlag, Karlsruhe

J. Zierep (1982b)

*Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*  
G. Braun Verlag, Karlsruhe

## A. Normierung der Gleichungen

### A.1 Dimensionsbehaftete Grundgleichungen

Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen von freier Konvektion in einer horizontal unendlich ausgedehnten, zähen, wärmeleitenden, zwischen zwei ebenen Wänden eingeschlossenen Fluidschicht, in der die Dichteunterschiede ausschließlich durch Temperaturunterschiede hervorgerufen werden, die entweder eine Folge der äußeren thermischen Beheizung oder Kühlung der Außenwände oder der inneren Wärmefreisetzung sind, sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- instationäre Strömung
- inkompressibles Fluid, d.h.  $\hat{\rho}_0$  ist konstant
- dreidimensionale Strömung
- reibungsbehaftete Strömung
- Eulersche, d.h. ortsfeste Betrachtungsweise
- Fluid als Kontinuum beschreibbar
- Newtonsches Fluid
- homogenes Fluid, d.h. alle Stoffwerte sind konstant
- Boussinesq-Approximation gültig
- Dissipation in der Energiegleichung vernachlässigbar

Die Grundgleichungen sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$\hat{\rho}_0 \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho}_0 \frac{\partial (\hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial \hat{x}_j} = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left\{ \hat{\mu} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \right\} + \hat{f}_i \quad (\text{A.1b})$$

$$\hat{\rho}_0 \hat{c}_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho}_0 \hat{c}_p \frac{\partial (\hat{T} \hat{u}_j)}{\partial \hat{x}_j} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left\{ \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}_j} \right\} + \hat{Q} \quad (\text{A.1c})$$

Sie sind in problemorientierten kartesischen Koordinaten und tensorieller, differentieller und konservativer Schreibweise notiert.

Die einzige in den Bewegungsgleichungen, d.h. den Impulserhaltungsgleichungen, auftretende Massenkraft ist die Gravitationskraft

$$\hat{f}_i = \hat{\rho} (-\hat{g}_1, -\hat{g}_2, -\hat{g}_3)^T, \quad (\text{A.2})$$

die für einen beliebig ausgerichteten Kanal in drei Komponenten aufgespalten wird. Dichteänderungen werden nur zur Erfassung des Schwerkrafteinflusses berücksichtigt, ohne den in den hier untersuchten Fällen eine Strömung überhaupt nicht zustande käme. In der Literatur

wird diese Vereinfachung als Boussinesq-Approximation [Boussinesq (1903)] bezeichnet. Zur Beschreibung der Auftriebseinflüsse wird im Gravitationskraftterm ein linearer Ansatz für die Dichteänderung in Abhängigkeit von der Temperaturänderung eingeführt:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 \left\{ 1 - \hat{\beta} (\hat{T} - \hat{T}_{p_0}) \right\} \quad (\text{A.3})$$

Diese Zustandsgleichung gilt in guter Näherung für inkompressible Fluide. Wird die Dichte  $\hat{\rho}_0$  im Schwerkraftterm (A.2) durch die lineare Dichte-Temperaturbeziehung (A.3) ersetzt und der Druckterm in Gleichung (A.1b) in einen statischen und einen hydrostatischen Anteil

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial \hat{p}_s}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial \hat{p}_h}{\partial \hat{x}_i} \quad (\text{A.4})$$

aufgespalten, so ist zu erkennen, daß der Anteil  $\hat{\rho}_0 \hat{g}_i$  im Schwerkraftterm den Anteil  $\partial \hat{p}_h / \partial \hat{x}_i$  im Druckterm gemäß dem hydrostatischen Grundgesetz aufhebt:

$$\frac{\partial \hat{p}_h}{\partial \hat{x}_i} = -\hat{\rho}_0 \hat{g}_i \quad (\text{A.5})$$

Übrig bleibt letztlich der statische Anteil  $\partial \hat{p}_s / \partial \hat{x}_i$  im Druckterm, der im weiteren Verlauf aus Gründen der einfacheren Schreibweise mit  $\partial \hat{p} / \partial \hat{x}_i$  bezeichnet wird.

Werden die Impulserhaltungsgleichungen durch  $\hat{\rho}_0$  und die Energieerhaltungsgleichung durch  $\hat{\rho}_0 \hat{c}_p$  dividiert und die Zusammenhänge (A.2-5) berücksichtigt, dann folgt für die Erhaltungsgleichungen (A.1b,c):

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial \hat{x}_j} = -\frac{1}{\hat{\rho}_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left\{ \hat{v} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \right\} + \hat{g}_i \hat{\beta} (\hat{T} - \hat{T}_{p_0}) \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{T} \hat{u}_j)}{\partial \hat{x}_j} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left\{ \hat{a} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}_j} \right\} + \frac{\hat{Q}}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_p} \quad (\text{A.6b})$$

Sie werden als Boussinesq-Gleichungen bezeichnet und dienen der Beschreibung natürlicher Konvektion inkompressibler Fluide. Die sechs Gleichungen (A.1a), (A.3) und (A.6a,b) bilden ein gekoppeltes, geschlossenes, partielles, nichtlineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit den vier unabhängigen Variablen  $\hat{\underline{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^T$  und  $\hat{t}$  sowie den sechs abhängigen Variablen  $\hat{\underline{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)^T, \hat{\rho}, \hat{p}$  und  $\hat{T}$ .

Zu den Erhaltungsgleichungen (A.1a) und (A.6a,b) in Differentialgleichungsform und der Zustandsgleichung (A.3) zur Erfassung der Dichteänderung in Abhängigkeit von der Temperaturänderung im Schwerkraftterm treten Randbedingungen, um das Problem festzulegen. Für die Geschwindigkeitskomponenten gilt an festen Berandungen die Wandhaftbedingung:

$$\hat{u}_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 = 0, \hat{t}) = 0 \quad i = 1(l)\beta \quad (\text{A.7a})$$

$$\hat{u}_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 = \hat{D}, \hat{t}) = 0 \quad i = 1(l)\beta \quad (\text{A.7b})$$

In experimentellen Untersuchungen kann an festen Berandungen entweder der Wandwärmestrom oder die Temperatur vorgegeben werden. Es sollen folgende thermische Randbedingungen gelten:

$$\hat{T}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 = 0, \hat{t}) = \hat{T}_{w1} \quad (\text{A.8a})$$

$$\hat{T}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 = \hat{D}, \hat{t}) = \hat{T}_{w2} \quad (\text{A.8b})$$

Im Falle der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist  $\hat{T}_{w1} > \hat{T}_{w2}$  und im Falle der Fluidschicht mit interner Wärmequelle gilt  $\hat{T}_{w1} = \hat{T}_{w2}$ .

## A.2 Dimensionslose Grundgleichungen

Aus den in Kapitel 2.1 genannten Gründen werden die in den Differentialgleichungen (A.1a) und (A.6a,b) und in den Randbedingungen (A.7a,b) und (A.8a,b) vorkommenden unabhängigen und abhängigen Variablen mit Hilfe der folgenden Beziehungen dimensionslos gemacht:

$$x_i = \frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_0} \quad (\text{A.9a})$$

$$t = \frac{\hat{t}}{\hat{t}_0} \quad (\text{A.9b})$$

$$u_i = \frac{\hat{u}_i}{\hat{u}_0} \quad (\text{A.9c})$$

$$p = \frac{\hat{p}}{\hat{p}_0} \quad (\text{A.9d})$$

$$T = \frac{\hat{T}'}{\hat{T}_0} = \frac{\hat{T} - \hat{T}_{w2}}{\hat{T}_0} \quad (\text{A.9e})$$

Vor der Einführung der Transformationen (A.9a-e) wird zunächst das Temperaturfeld  $\hat{T}$  durch  $\hat{T}' = \hat{T} - \hat{T}_{w2}$  ersetzt. Die Differentialgleichung (A.6b) geht dabei ohne Änderung in eine Differentialgleichung für  $\hat{T}'$  über. Es folgt:

$$\frac{\partial \hat{T}'}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial(\hat{T}' \hat{u}_j)}{\partial \hat{x}_j} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left\{ \hat{a} \frac{\partial \hat{T}'}{\partial \hat{x}_j} \right\} + \frac{\hat{Q}}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_p} \quad (\text{A.10})$$

Die Randbedingungen (A.8a,b) gehen über in:

$$\hat{T}'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 = 0, \hat{t}) = \hat{T}_{w1} - \hat{T}_{w2} \quad (\text{A.11a})$$

$$\hat{T}'(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 = \hat{D}, \hat{t}) = 0 \quad (\text{A.11b})$$

Für  $\hat{x}_3 = 0$  entspricht dies im Falle der Rayleigh-Bénard-Konvektion der maximalen Temperaturdifferenz  $\Delta\hat{T}_{\max}$ , im Falle der Fluidschicht mit interner Wärmequelle wegen  $\hat{T}_{w1} = \hat{T}_{w2}$  dem Wert Null.

Durch das Einsetzen der Transformationen (A.9a-e) in die Differentialgleichungen (A.1a), (A.6a) und (A.10) und die Randbedingungen (A.7a,b) und (A.11a,b) sowie dem Durchmultiplizieren der Impuls- und der Energieerhaltungsgleichungen mit den charakteristischen Bezugsgrößen vor dem instationären Term, erhalten sie die folgende dimensionslose Form:

Massenerhaltung

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.12a})$$

Impulserhaltung

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\hat{u}_0 \hat{t}_0}{\hat{x}_0} \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\hat{p}_0 \hat{t}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{x}_0 \hat{u}_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\hat{v} \hat{t}_0}{\hat{x}_0^2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\hat{g}_i \hat{\beta} \hat{T}_0 \hat{t}_0}{\hat{u}_0} (T - T_{p_0}) \quad (\text{A.12b})$$

Energieerhaltung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\hat{u}_0 \hat{t}_0}{\hat{x}_0} \frac{\partial(T u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\hat{a} \hat{t}_0}{\hat{x}_0^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\} + \frac{\hat{Q} \hat{t}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{c}_p \hat{T}_0} \quad (\text{A.12c})$$

Geschwindigkeitsrandbedingungen

$$u_i(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = 0 \quad i = 1(1)\beta \quad (\text{A.13a})$$

$$u_i(x_1, x_2, x_3 = 1, t) = 0 \quad i = 1(1)\beta \quad (\text{A.13b})$$

Temperaturrendbedingungen

$$T(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = \begin{cases} 1 & \text{Rayleigh-Benard-Konvektion} \\ 0 & \text{Fluidschicht mit interner Wärmequelle} \end{cases} \quad (\text{A.14a})$$

$$T(x_1, x_2, x_3 = 1, t) = 0 \quad (\text{A.14b})$$

Wie in Kapitel 2.1 beschrieben, werden die charakteristischen Bezugsgrößen für die Längen und die Temperatur frei gewählt:

$$\hat{x}_0 = \hat{D} \quad (\text{A.15a})$$

$$\hat{T}_0 = \Delta \hat{T}_{max} = \begin{cases} \hat{T}_{w1} - \hat{T}_{w2} & \text{Rayleigh- Benard- Konvektion} \\ \hat{T}_{max} - \hat{T}_w & \text{Fluidschicht mit interner Wärmequelle} \end{cases} \quad (\text{A.15b})$$

Aufgrund der Forderung, daß die in den Impulsgleichungen (A.12b) auftretenden Trägheitsterme, der Druckterm und der Auftriebsterm die gleiche Größenordnung haben sollen, können die Bezugsgrößen für die Zeit, den Druck und die Geschwindigkeiten abgeleitet werden:

$$\hat{t}_0 = \frac{\hat{D}}{\hat{u}_0} \quad (\text{A.15c})$$

$$\hat{p}_0 = \hat{\rho}_0 \hat{u}_0^2 \quad (\text{A.15d})$$

$$\hat{u}_0 = (\hat{g} \hat{\beta} \Delta \hat{T}_{max} \hat{D})^{1/2} \quad (\text{A.15e})$$

Durch Einsetzen dieser Bezugsgrößen in die Gleichungen (A.12b,c) folgen die Grundgleichungen (2.2b,c) in dimensionsloser Form. In ihnen treten drei problembeschreibende, dimensionslose Kennzahlen auf:

$$Gr = \frac{\hat{g} \hat{\beta} \Delta \hat{T}_{max} \hat{D}^3}{\hat{\nu}^2} \sim \frac{\text{Auftriebskraft} \cdot \text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}^2} \quad (\text{A.16a})$$

$$Pr = \frac{\hat{\mu} \hat{c}_p}{\hat{\lambda}} = \frac{\hat{\nu}}{\hat{a}} \quad (\text{A.16b})$$

$$Da = \frac{\hat{Q} \hat{D}^2}{\hat{\lambda} \Delta \hat{T}_{max}} \quad (\text{A.16c})$$

Die Grashof-Zahl beschreibt den physikalischen Einfluß, den Trägheits- und Auftriebskräfte im Verhältnis zu den Reibungskräften einer Strömung haben. Die Prandtl-Zahl kennzeichnet als Verhältnis von kinematischer Viskosität zu Temperaturleitfähigkeit das Medium. Die Damköhler-Zahl beschreibt aus physikalischer Sicht das Verhältnis aus freigesetzter Wärme durch innere Wärmequellen zum Wärmetransport durch Leitung und spielt als Quellterm nur bei der Fluidschicht mit interner Wärmequelle eine Rolle.

## B. Abschätzung der erreichbaren Rayleigh-Zahlen

Abbildung B.1 ist das Ergebnis einer Analyse bezüglich der erreichbaren Rayleigh-Zahl mit verschiedenen Methoden der numerischen Simulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium hinsichtlich der zur Verfügung stehenden Speicherkapazität und Rechenzeit auf dem Vektorrechner VP400-EX [Seiter (1992)]. Dargestellt sind die Speicheranforderung und der Rechenzeitbedarf einer direkten numerischen Simulation des gesamten physikalischen Problems und einer gemischten Simulation, mit einer direkten numerischen Simulation des Temperaturfeldes und einer Grobstruktursimulation des Geschwindigkeitsfeldes, als Funktion der Rayleigh-Zahl. Die beiden gestrichelten horizontalen Linien charakterisieren die maximal verfügbare Arbeitsspeicherkapazität der VP400-EX sowie eine Vorgabe der noch vertretbaren Rechenzeit für einen Simulationslauf.

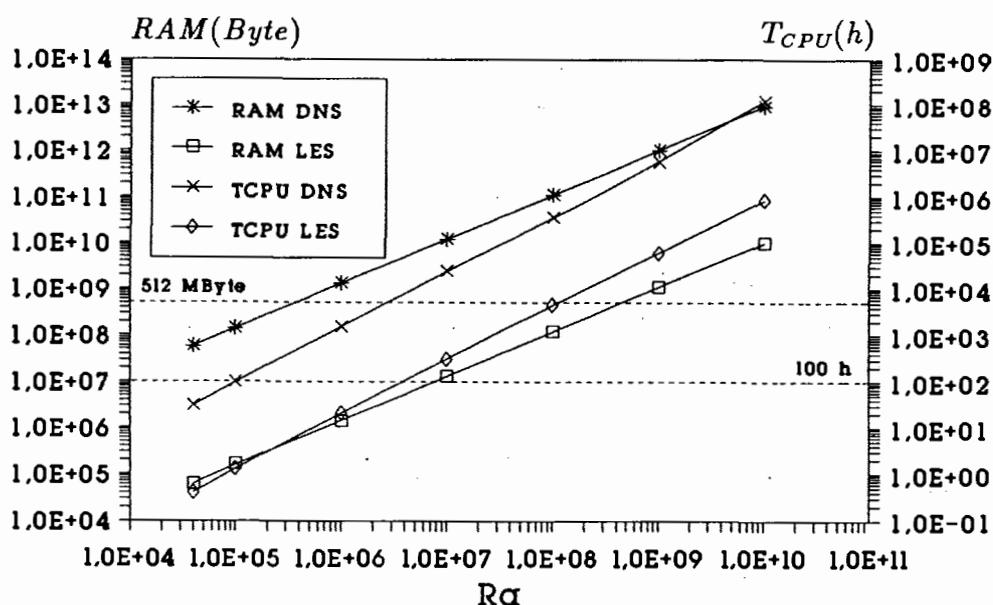


Abb. B.1: Speicheranforderung und maximale Arbeitsspeicherkapazität sowie Rechenzeitbedarf und vertretbare Rechenzeit für die direkte numerische und die gemischte Simulation von Rayleigh-Bénard-Konvektion mit Natrium.

Die dargestellten Zusammenhänge werden unter der Voraussetzung der Auflösung der thermischen und vor allem der hydrodynamischen Grenzschicht abgeleitet. Aufgrund dieser Forderung erwächst, wie in diesem Anhang noch gezeigt wird, ein nur geringfügiger Mehraufwand bezüglich der Speicheranforderung, jedoch ein erheblicher Mehraufwand bezüglich des Rechenzeitbedarfes eines Simulationslaufes im Vergleich zu einer Simulation, in der die nichtlinearen Änderungen in den Grenzschichten mittels Wandgesetzen erfaßt werden. Den Grund dafür liefert das Stabilitätskriterium des expliziten Zeitintegrationsverfahrens (2.22), in dem kleine Maschenweiten sehr kleine Zeitschrittweiten und folglich große Rechenzeiten nach sich ziehen.

Die Einschränkung zum Erreichen hoher Rayleigh-Zahlen durch den Rechenzeitbedarf ist viel kritischer als die Begrenzung durch die Speicheranforderung. Das wird durch den steileren Anstieg der beiden den Rechenzeitbedarf charakterisierenden Geraden deutlich. Der

Rechenzeitbedarf einer direkten numerischen Simulation, gemischten Simulation oder Grobstruktursimulation nimmt demnach mit wachsender Rayleigh-Zahl stärker zu als deren Speicheranforderung.

Bei den vorgegebenen Grenzen bezüglich der maximal verfügbaren Arbeitsspeicherkapazität von 512 MByte RAM und einer vertretbaren Rechenzeit von 100 h CPU für eine Rechnung wirkt sich dieser Unterschied bei der direkten numerischen Simulation jedoch weniger stark aus als bei der gemischten Simulation. Bei ersterer liegt die durch die maximal verfügbare Arbeitsspeicherkapazität erreichbare Rayleigh-Zahl bei  $Ra \approx 3.0 \cdot 10^5$ , was einem Rechenzeitbedarf von ca. 300 h CPU entspricht. Da dieser jedoch die selbst und willkürlich vorgegebene Grenze von 100 h CPU nicht überschreiten sollte, liegt die derzeit maximal erreichbare Rayleigh-Zahl für diese Art der numerischen Simulation bei  $Ra < 10^5$ .

Im Falle einer gemischten Simulation ist die maximal erreichbare Rayleigh-Zahl zwar höher, wird jedoch um so stärker durch den geforderten Rechenzeitbedarf eingeschränkt. Sie beträgt  $Ra < 4.0 \cdot 10^6$ , obwohl mit dem verfügbaren Arbeitsspeicher von 512 MByte RAM durchaus  $Ra \approx 10^8$ - $10^9$  erreichbar wäre. Durch die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes mit der Methode der Grobstruktursimulation wird gegenüber der direkten numerischen Simulation des gesamten physikalischen Problems immerhin ein Zuwachs von ungefähr zwei Größenordnungen in der Rayleigh-Zahl ermöglicht und damit wesentlich zum Erreichen höherer Rayleigh-Zahlen bei diesem Strömungstyp beigetragen.

Der Grund, warum im Rahmen dieser Arbeit gemischte Simulationen bis zu  $Ra=10^7$  durchgeführt werden können, liegt in der Verwendung von Wandgesetzen. Die sehr dünne hydrodynamische Grenzschicht muß nicht durch das Maschennetz erfaßt werden, so daß die Wahl dickerer Wandmaschen möglich ist. Die Speicheranforderung für  $Ra=10^7$  läge bei 20 MByte RAM, der Rechenzeitbedarf bei ungefähr 300 h CPU. Im Fall BNA10000 mit  $Ra=10^7$  beträgt dieser aufgrund der Verwendung von Geschwindigkeitswandgesetzen jedoch nur 10 h CPU, während die Speicheranforderung mit 21 MByte RAM in etwa der abgeschätzten entspricht. Das verdeutlicht, daß die Verwendung von Wandgesetzen, zwar auch mit einigen Nachteilen behaftet, deutlich reduzierte Rechenzeiten oder bei gleicher Rechenzeit die Simulation höherer Rayleigh-Zahlen ermöglicht.

Eine weitere Steigerung der Rayleigh-Zahl bei diesem Strömungstyp, über den Rayleigh-Zahlenbereich der gemischten Simulation hinaus, erfordert eine Grobstruktursimulation des gesamten physikalischen Problems, d.h. in diesem Fall auch die Grobstruktursimulation des Temperaturfeldes und gegebenenfalls die Verwendung von Temperaturwandgesetzen.

## C. Zusammenfassung der Modelle

In diesem Abschnitt werden die in TURBIT verwendeten Schließungsmodelle zusammenfassend dargestellt. Sie beruhen auf dem Wirbeldiffusivitätsprinzip und können in die Gruppe der Ein-Transportgleichungsmodelle eingeordnet werden.

Für die Berechnung der unbekanntenen Feinstrukturspannungen und -wärmeströme werden in TURBIT Gradientenansätze verwendet:

$$\bar{\tau}_{ijSGS} = -\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k} \quad (\text{C.1a})$$

$$-\bar{q}_{jSGS} = -\overline{T' u'_j} = a_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (\text{C.1b})$$

Die Bestimmung der in diesen Ansätzen enthaltenen Feinstrukturaustauschkoeffizienten für Impuls und Wärme erfolgt mit Energie-Längen-Modellen:

$$\nu_t = C_2 \overset{ij}{C} l_m \left( {}^j C_5 \bar{E}' \right)^{1/2} \quad (\text{C.2a})$$

$$a_t = C_{T2} {}^j C_T l_h \left( {}^j C_5 \bar{E}' \right)^{1/2} \quad (\text{C.2b})$$

In diesen Ansätzen sind die Koeffizienten  $\overset{ij}{C}$ ,  ${}^j C_T$  und  ${}^j C_5$  nur von der Geometrie abhängig und mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz exakt und ohne empirische Information berechenbar. Sie sind nur bei ungleichseitigen Maschen von eins verschieden. Die modellbestimmenden Koeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  werden aus den zeitgemittelten Gleichungen der Geschwindigkeits- und der Temperaturvarianz innerhalb der Feinstruktur abgeleitet und sind mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz und einiger empirischer Information berechenbar:

$$C_2 = \frac{1 - \alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{18}{55} \left( \frac{1}{Gr^{3/2} h^4 \langle \epsilon \rangle} \right)^{1/3} \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D2_{ij} \right)}{\gamma_1 \left[ \alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^{3/2} \left( \frac{9}{20} \right)^{1/2} \frac{18}{55} \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \overset{ij}{C} D2_{ij} \left( {}^j F EN2(j) \right)^{1/2} \right\} \right)} \quad (\text{C.3a})$$

$$C_{T2} = \frac{\frac{1}{2} - \beta \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{9}{20} \left( \frac{1}{Gr^{3/2} Pr^3 h^4 \langle \epsilon \rangle} \right)^{1/3} \left( \sum_{j=1}^3 DT2_j \right)}{\gamma_T \alpha^{1/2} \beta \left[ \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^{3/2} \left( \frac{9}{20} \right)^{3/2} \left( \sum_{j=1}^3 \left\{ {}^j C_T DT2_j \left( {}^j F EN2(j) \right)^{1/2} \right\} \right)} \quad (\text{C.3b})$$

Für die universell gültige Kolmogorov- und Batchelor-Konstante wird  $\alpha=1.5$  und  $\beta=1.3$  verwendet.  $\Gamma$  ist die Gamma-Funktion,  $h$  ist die mittlere Maschenweite und  $Gr$ ,  $Pr$  sind die Grashof- und die Prandtl-Zahl.  $D2_{ij}$ ,  $DT2_j$  und  $EN2(j)$  sind Volumen- und Flächenintegrale, die

ausschließlich geometrische Informationen des Maschennetzes beinhalten. Das zeitlich gemittelte Dissipationsprofil  $\langle \varepsilon \rangle$  wird für Rayleigh-Bénard-Konvektion gemäß Gleichung (3.22) und für die Fluidschicht mit interner Wärmequelle gemäß Grötzbach (1986) abgeschätzt. Die Korrekturkoeffizienten  $\gamma_1$  und  $\gamma_T$  erweisen sich in dieser Arbeit bei der numerischen Simulation von Naturkonvektion als sehr wichtig, um die ortsabhängigen Modellkoeffizienten  $C_2$  und  $C_{T2}$  in halber Schichthöhe (Bereich isotroper Turbulenz) zu kalibrieren. Ihr Wert folgt als Ergebnis des Vergleichs dimensionsloser räumlicher Energiespektren in Kanalmitte aus direkten numerischen Simulationen, gemischten Simulationen und Grobstruktursimulationen. Im Fall der Naturkonvektion in einer horizontalen Fluidschicht werden für die ortsabhängigen Modellkoeffizienten in halber Schichthöhe die maximalen Werte  $C_2=0.105$  und  $C_{T2}=0.215$  verwendet. Sie stimmen gut mit den Modellkoeffizienten anderer Autoren für Anwendungsfälle dieser Art überein.

Für die Feinstrukturenergie als charakteristischer Geschwindigkeitsmaßstab der kleinskaligen Turbulenz wird eine orts- und zeitabhängige Energiegleichung gelöst:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E'}{\partial t} \right) + \delta_j ({}^j C_5 \overline{E' u_j}) = & + C_2 C_{20} {}^j C l_m \overline{E'}^{1/2} (\delta_j \overline{u_i} + \delta_i \overline{u_j}) \delta_j \overline{u_i} - \delta_{j3} C_{T2} {}^j C_T l_h \overline{E'}^{1/2} \delta_j \overline{T} \\ & + \delta_j \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{Gr}} + \sigma_t ({}^j F \overline{E'})^{1/2} \right] {}^j C_5 \delta_j \overline{E'} \right\} \\ & - C_3 \frac{\overline{E'}^{3/2}}{l_{em}} - \frac{C_{32} \overline{E'}}{\sqrt{Gr} l_{em}^2} - \frac{2}{\sqrt{Gr}} (\delta_3 \overline{E'}^{1/2})^2 \end{aligned} \quad (C.4)$$

Die Koeffizienten  $C_{20}$  und  $C_3$  sind mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz exakt und ohne empirische Unterstützung berechenbar. Für den turbulenten Diffusionskoeffizienten  $\sigma_t$  und den Koeffizienten  $C_{32}$  im Dissipationsmodell wird mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz und einiger empirische Unterstützung und in Anlehnung an Grötzbach (1977)  $\sigma_t=0.3$  und  $C_{32}=20.0$  gewählt.

Für die charakteristischen Längenmaße der kleinskaligen Turbulenz werden in Abhängigkeit vom Wandabstand und der Schichtung neue Funktionen in TURBIT eingeführt:

$$l_m = \min \left( {}^j F^{1/2}, C_w |n_w|, G_m \right) \quad (C.5a)$$

$$l_h = \min \left( {}^j F^{1/2}, C_w |n_w|, G_h \right) \quad (C.5b)$$

$$l_{em} = \min \left( V^{1/3}, C_w |n_w| \right) \quad (C.5c)$$

In Wandnähe wird der charakteristische Längenmaßstab aufgrund des reduzierten turbulenten Impuls- und Wärmeaustausches senkrecht zur Wand gegebenenfalls mit der folgenden von Prandtl (1925) eingeführten Beziehung reduziert:

$$l_m, l_h, l_{em} = C_w |n_w| \quad (C.6)$$

Für den Wandkoeffizienten  $C_w$  kann mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz und einiger empirischer Unterstützung  $C_w=0.74$  abgeleitet werden,  $|n_w|$  ist der kürzeste senkrechte Wandabstand.

Im Fall instabiler oder indifferenter Schichtung werden für flächengemittelte Größen die Quadratwurzel der senkrecht zur jeweiligen physikalischen Größe stehenden Maschenoberfläche  $^jF(x_3)$  und für volumengemittelte Größen die Kubikwurzel des jeweils betrachteten Maschenvolumens  $V(x_3)$  als die charakteristischen Längenmaßstäbe der subskaligen turbulenten Fluktuationsbewegung angesehen:

$$l_m, l_h = [^jF(x_3)]^{1/2} = [\Delta x_1 \Delta x_2, \Delta x_1 \Delta x_3(x_3), \Delta x_2 \Delta x_3(x_3)]^{1/2} \quad (C.7a)$$

$$l_{em} = [V(x_3)]^{1/3} = [\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3(x_3)]^{1/3} \quad (C.7b)$$

Im Fall stabiler Schichtung wird der charakteristische Längenmaßstab aufgrund des reduzierten subskaligen turbulenten Impuls- und Wärmeaustausches gegebenenfalls mit den aus der Energiegleichung und unter Einführung vereinfachender Annahmen abgeleiteten neuen Längenmaßstäben reduziert:

$$l_m = G_m = \left( \frac{2 C_3 \bar{E}'}{C_2 (\delta_j \bar{u}_i + \delta_i \bar{u}_j)^2} \right)^{1/2} \quad (C.8a)$$

$$l_h = G_h = \left( \frac{C_3 \bar{E}'}{\delta_{j3} \delta_j \bar{T}} \right)^{1/2} \quad (C.8b)$$

Diese charakteristischen Längenmaßstäbe werden orts- und zeitabhängig berechnet und nur in lokal stabil geschichteten Bereichen wirksam. Die in den Gleichungen enthaltenen Modellkoeffizienten folgen aus der Herleitung.

Das Modell wird in der hier angegebenen Form für alle Grobstruktursimulationen von Naturkonvektion verwendet. Für die Koeffizienten gelten die angegebenen Zahlenwerte oder die vom Maschennetz, vom Fluid und von der Rayleigh-Zahl abhängigen Bestimmungsgleichungen.